TITULO DE LA OBRA

CONSTRUCCIONES EN TRIÁNGULOS

PRIMERA EDICIÓN

PUBLICADO POR IMPECUS

SUPERVISIÓN GENERAL

ING. JOSE LUIS MEZA BARCENA

REVISIÓN GENERAL DEL MANUSCRITO

PROF. ERICH A. VILLAVICENCIO GUTIERREZ

COMPOSICIÓN, DIAGRAMACION Y ARTE

DANIEL DURAN VARGAS - @DHDV - 95013748 / 2264638
Email: DanielDHDV@Hotmail.com

AUSPICIADO

- COMPETITIVIDAD Revista Especializada en Negocios



- BUSSINES IMPLEMENTACIÓN ASSOCIATION (BIASSO)



- CENTRO CULTURAL AVANZADA TECNOLÓGICA (CCAT) UNI-FIIS



Presentación

Permítanme presentarme primero como estudiante y ahora como profesional egresado de la Universidad Nacional de Ingeniería, presentando al respetable lector este sencillo aporte al conocimiento práctico de la Geometría que es el Fruto de una fructífera experiencia cotidiana en la enseñanza, de consultar e investigar sobre las ideas y la forma de la resolución de los problemas empleando trazos auxiliares, contenido que han sido discutidos por varios docentes que han participado en mi formación, han sido reevaloradas, actualizadas y emsambladas para realizar esta obra.

Me he propuesto con él tres objetivos: claridad en la exposición, rigor en la explicación de los métodos y la utilidad de la imaginación y abstracción.

Precisamente, la colección de problemas resueltos detalla claramente que constituyen esta obra ha sido concebida con el objeto de llevar al estudiante a una asimilación más rápida y segura de tales métodos de lo que suele ser no posible con los textos corrientes, no se trata por cierto de una colección de problemas de adiestramiento mecánico, sino de exponer resoluciones bien detalladas que tienen precisamente por objetivo acostumbrar al que aprende a trabajar correctamente, dando todos los <u>*pasos indispensables y fundamentando*</u> *todos sus operaciones y reglas graduando cuidadosamente la dificultad de los ejercicios.*

Así paso por paso, el estudiante es conducido por mano firme hasta el momento que pueda resolver los problemas solo. Es el momento en que puede decirse plenamente que la técnica en particular que se estudiaba ha sido asimilada a la perfección.

Tras un atento estudio de las reglas que abre cada método, recuérdese que, como proceso de asimilación más indicado, se ha de tratar de resolver por propia cuenta lo más posible de los problemas y comparar después los resultados obtenidos con los que aparecen en la obra, y en ocasiones será muy provechoso revisar previamente los "trucos" lógicos (métodos de construcciones), por así llamarlos, que permiten muchas veces emprender la resolución de los problemas de aquellas que constituyen "El dolor de cabeza" de todo principiante. En suma, la colección de problemas que aquí se representa obedece a la clara convicción de que todo curso de matemática tiene por columna vertebral el estudio y solución de ejercicios y problemas; Recomiendo que tengamos paciencia, consultemos y revisemos nuestras dudas, pensando que el buen conocimiento está directamente relacionado con la práctica y que ésto nos permitira ingresar en el grandioso mundo de la matemática.

El autor.

Agradecimiento

El autor desea manifestar su agradecimiento, en primer lugar a todos los profesores y alumnos pre universitarios que me han escuchado y enriquecido con su amistad, experiencias, enseñanzas, críticas y comentarios.

A la Editorial "IMPECUS" por su auspicio en la publicación de esta obra.

De modo particular a Erich A. Villavicencio G., Rossel Higinio Regalado, Ivan Tovar [illegible], Alex Achulla, Arturo Jacinto Cahuana, Matilde Gamboa, a mis grandes amigos del "Centro Cultural Avanzada Tecnológica (CCAT)", cuna de excelentes profesionales de la Universidad Nacional de Ingeniería de la facultad de ingeniería Industrial y de sistemas quienes han hecho valerosos comentarios para mejorar tanto el contenido como la forma de la presente obra

Un agradecimiento especial a mis padres Teofilo y Francisca quienes me iluminan mi camino con sus sabios consejos y a mis inquietos y extrañables hermanos Miguel, Roger, Juana, [illegible], Gabriel, Alcides, Millar que me motivan a ser cada vez mejor.

Y una dedicatoria muy especial de esta obra a mi querida tía María Apari Suarez y Familia.

Y a todo aquel que tenga a bien dirigirnos sus críticas, comentarios o sugerencias serán muy bien recibidas.

El autor.

La Geometría está en todas partes

Fíjese en las formas regulares y perfectas que presentan muchos cuerpos. Las flores, las hojas e incontables animales revelan simetrías admirables que dislumbran nuestro espíritu.

La Geometría, repito, existe en todas partes: en el disco solar, en las hojas, en el arco iris, en los suaves pétalos de una flor, en la mariposa, en el diamante, en la estrella de mar y hasta en un diminuto grano de arena, hay, en fin, una infinita variedad de formas geométricas extendidas por la naturaleza. Un cuervo que vuela lentamente por el cielo describe con la mancha negra de su cuerpo figuras admirables. La sangre que circula por las venas del camello no escapa tampoco a los rigurosos principios geométricos, ya que sus glóbulos presentan la singularidad única entre los mamíferos de tener forma elíptica: la piedra que se tira al perro inoportuno dibuja en el aire una curva perfecta, denominada parábola; la abeja construye sus panales con la forma de prismas hexagonales y adopta esta forma geométrica, creo yo, para obtener su casa con la mayor economía posible de material.

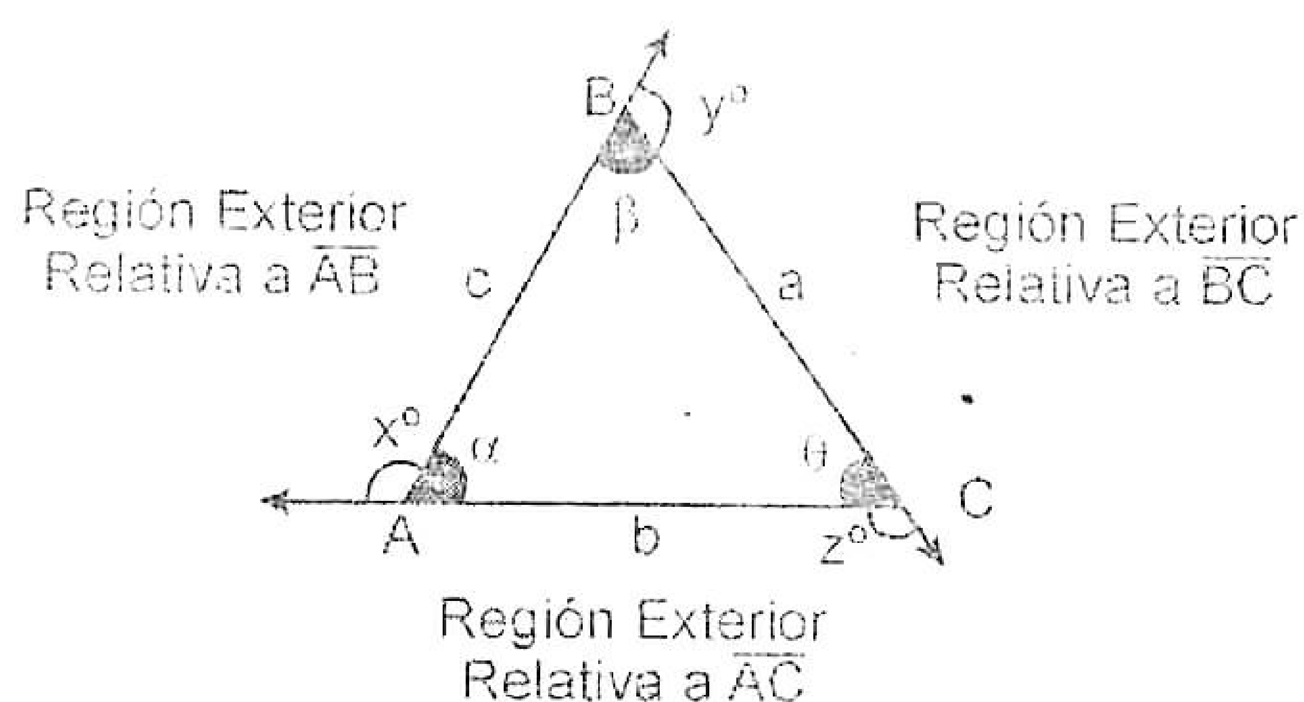
La Geometría existe, como dijo el filósofo, en todas partes. Es preciso, sin embargo, tener ojos para verla, inteligencia para comprenderla y alma para admirarla.

El campesino ve las formas geométricas pero no las entiende; el citadino común las entiende, pero no las admira; el artista, en fin, ve a la perfección de las figuras, comprende la belleza, y admira el orden y la armonía. Dios fue el Gran Geómetra. que Geometrizó el cielo y la tierra.

El autor.

Triángulos

Es aquella figura geométrica determinada por la unión de tres puntos no colineales mediante segmentos de línea recta.



ELEMENTOS	NOTACIÓN
• Vértices .... A, B, C • Lados .... AB, BC, AC - ∡s Internos .... α, β y θ - ∡s Externos ...... x, y, z	ΔABC: .... Se lee: triángulo de vértices A, B y C

PERÍMETRO (2P)	SEMIPERÍMETRO (P)
Es la longitud del contorno de la región triangular ABC $2P = a + b + c$	$P = \frac{a+b+c}{2}$

PROPIEDAD FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

Nº	PROPIEDAD	GRÁFICO	SE CUMPLE
1	Suma de las medidas de sus ángulos internos	β, α, θ	$\alpha+\beta+\theta = 180°$
2	Medida de un ángulo exterior	β, α, x	$x = \alpha + \beta$
3	Suma de las medidas de sus ángulos externos	y°, x°, z°	$x°+y°+z° = 360°$
4	Correspondencia	B, A, α, θ, C	Si: $\overline{AB} > \overline{BC}$ $\Rightarrow \theta > \alpha$
5	Existencia del Triángulo ó de Desigualdad Triangular	c, a, b	Si $a > b > c$ $b-c < a < b+c$ $a-c < b < a+c$ $a-b < c < b+a$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

	TRIÁNGULO	FIGURA	CARACTERÍSTICA
LADOS	ESCALENO	B, β, A, α, θ, C	$AB \neq BC \neq AC$ $\Rightarrow \alpha \neq \beta \neq \theta$
	ISÓSCELES	B, A, α, α, C	$AB = BC$ $\Rightarrow m∡A = m∡C$ AC → Base
	EQUILÁTERO	B, 60°, A, 60°, 60°, C	$AB=BC=AC$ $\Rightarrow \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$
ÁNGULOS	ACUTÁNGULO	β, α, θ	$\alpha < 90°$ $\beta < 90°$ $\theta < 90°$ (Tiene ∡s agudos)
	RECTÁNGULO	C, b, a, α, θ, A, c, B	* AC y BC Catetos * AB → Hipotenusa * $\alpha + \theta = 90°$ * $c^2 = a^2 + b^2$
	OSTUSÁNGULO	B, β, Lado Mayor, α, θ, A, C	$\alpha > 90°$ $\beta<90° \wedge \theta<90°$

LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

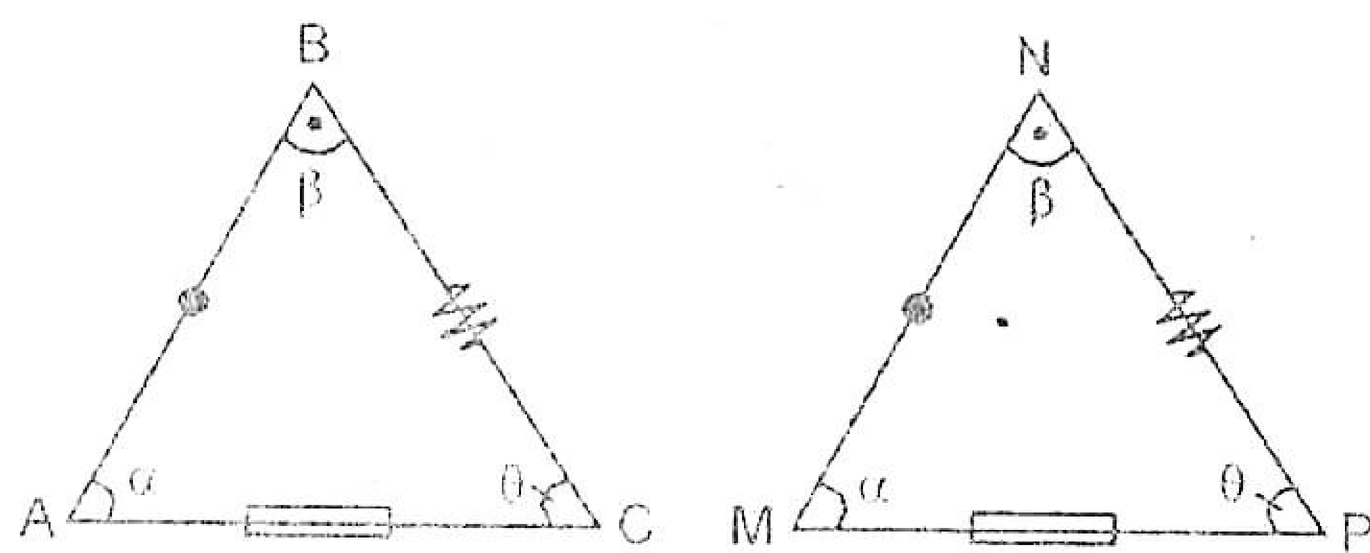
	CARACTERÍSTICA	GRÁFICO
CEVIANA	Es aquel segmento que tiene por extremos un vértice del triángulo y un punto cualquiera del lado opuesto o de su respectiva prolongación.	Ceviana Exterior; Ceviana Interior
MEDIANA	Es aquel segmento que tiene por extremos un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.	Mediana
ALTURA	Es aquel segmento perpendicular trazado de un vértice del triángulo hacia al lado opuesto o hacia su respectiva prolongación	Altura
MEDIATRIZ	Es la recta perpendicular a un lado cualquiera del triángulo en su punto medio.	Mediatriz; B, D, A, C; AD=DC; ∢DAC= ∢DCA
BISECTRIZ INTERIOR	Es la ceviana interior trazado desde un vértice del triángulo que biseca o divide en partes iguales al ángulo interior.	Bisectriz interior; θ θ
BISECTRIZ EXTERIOR	Es la ceviana exterior trazado desde un vértice del triángulo que divide en partes iguales al ángulo exterior.	β β; Bisectriz Exterior

PROPIEDADES

GRÁFICO	SE CUMPLE
B, A, H, C; θ θ	En todo triángulo isósceles $\overline{BH}$ {Altura, Mediana, Bisectriz, Mediatriz}
En todo triángulo Rectángulo; B, A, M, C	Si: $\overline{BM}$ → Mediana ⇒ AM = MC = BM
Si tenemos: B, A, C; 60°; ⇒ 60°, 60°, 60°	Si: AB = BC y m$\angle A\hat{B}C$ = 60° ⇒ △ABC es Equilátero
β, α, x, θ	En todo cuadrilátero cóncavo: $x = \alpha + \beta + \theta$
$\alpha°$, $\theta°$, x	$x = \dfrac{\alpha° + \theta°}{2}$
$\alpha°$, x	$x = 90° + \dfrac{\alpha°}{2}$
x, $\alpha°$	$x = 90° - \dfrac{\alpha°}{2}$
α, x	$x = \dfrac{\alpha°}{2}$

Congruencia de Triángulos

Dos triángulos son congruentes si ellos tienen igual forma y tamaño, es decir a ángulos de igual medida se oponen lados de igual longitud y viceversa.



➧ ΔABC ≅ ΔMNP

Se lee "es congruente con"

CASOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

CASO	CONDICIÓN	GRÁFICO
I	Lado Ángulo Lado (L.A.L.)	➧ ΔABC ≅ ΔMNP
II	Ángulo Lado Ángulo (A.L.A.)	➧ ΔABC ≅ ΔMNP
III	Lado Lado Lado (L.L.L.)	➧ ΔABC ≅ ΔMNP

APLICACIONES DE CONGRUENCIA

TEOREMA	CARACTERÍSTICA	SE CUMPLE
BISECTRIZ	Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo	➧ AP = PB ∧ AO = OB
MEDIATRIZ	Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento	Mediatriz de $\overline{AB}$ ➧ $\overline{AP} = \overline{PB}$
BASE MEDIA	En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado y además su longitud es la mitad de dicho tercer lado.	➧ $\overline{BN} = \overline{NC} \wedge \overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}$

«La ciencia exige del hombre toda su vida y aún si ustedes tuvieran dos vidas no les serían suficientes, la ciencia exige del hombre una gran tensión y una pasión inmensa»

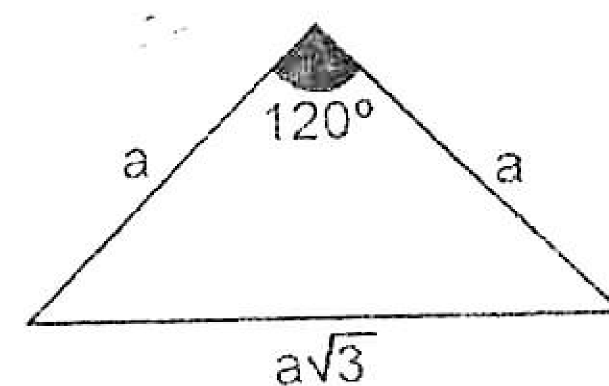
Anónimo

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES	
MEDIDA	RELACIÓN DE LADOS
45° y 45°	$a\sqrt{2}$, 45°, a, 45°, a
30° y 60°	2a, 60°, a, 30°, $a\sqrt{3}$
TRIÁNGULO RECTÁNGULO NOTABLES APROXIMADOS	
37° y 53°	5a, 53°, 3a, 37°, 4a
53°/2 (26° 30')	$a\sqrt{5}$, a, 53°/2, 2a
37°/2 (18° 30')	$a\sqrt{10}$, a, 37°/2, 3a
14° y 76°	$a\sqrt{17}$, 76°, a, 14°, 4a
3° y 87°	87°, a, 3°, 19a

MEDIDA	RELACIÓN DE LADOS
8° y 82°	$5a\sqrt{2}$, 82°, a, 8°, 7a
15° y 75°	4a, 75°, $a(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, 15°, $a(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
16° y 74°	25a, 74°, 7a, 16°, 24a

ADICIONALES

- 13a, 67°, 5a, 23°, 12a
- 17a, 62°, 8a, 28°, 15a
- $\sqrt{34}a$, 59°, 3a, 31°, 5a
- $\sqrt{137}a$, 70°, 4a, 20°, 11a
- $\sqrt{61}a$, 50°, 6a, 40°, 5a
- 4a, 54°, $(\sqrt{10-2\sqrt{5}})a$, 36, $(\sqrt{5}+1)a$

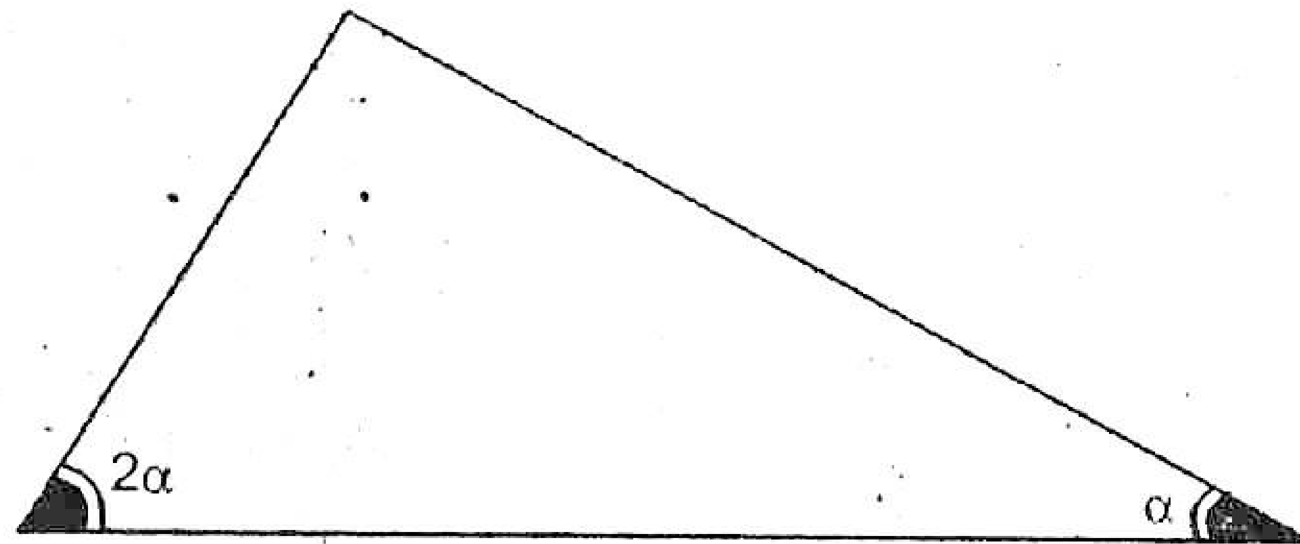
ADICIONAL	
MEDIDA	RELACIÓN DE LADOS
120°	

CRITERIOS PARA HACER TRAZOS AUXILIARES EN TRIÁNGULOS

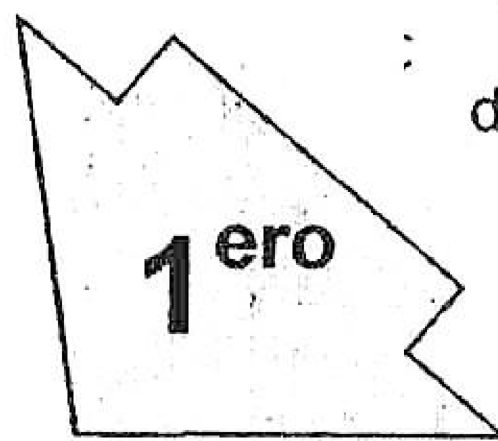
1er Criterio

"TRAZO DE LA CEVIANA"

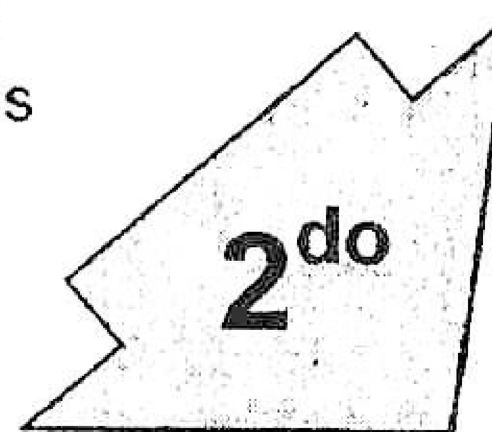
Cuando se observa un triángulo que tenga ángulos interiores en el relación de uno a dos, de la siguiente forma.



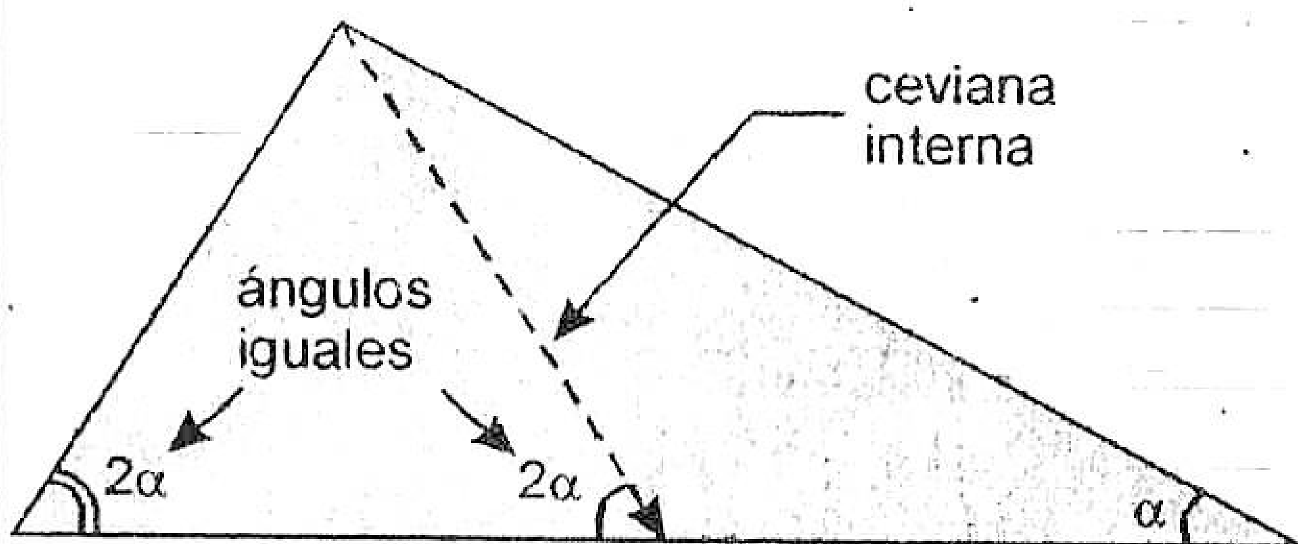
Tendremos dos opciones

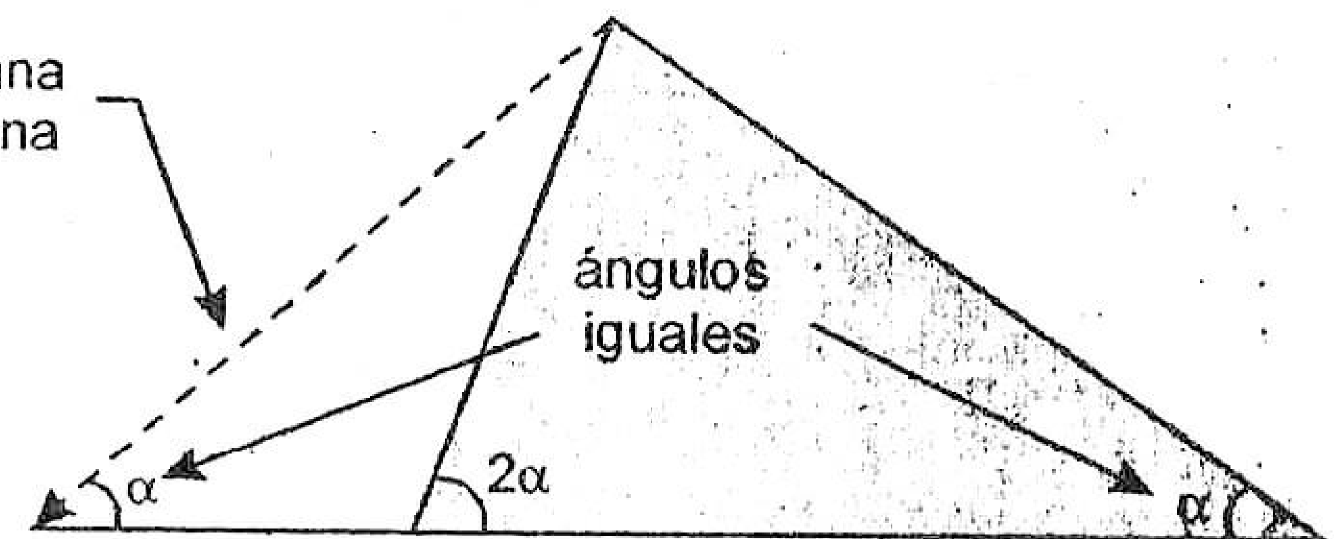


Se trazará una ceviana interna tal que forme un ángulo igual al mayor en la misma base del triángulo.

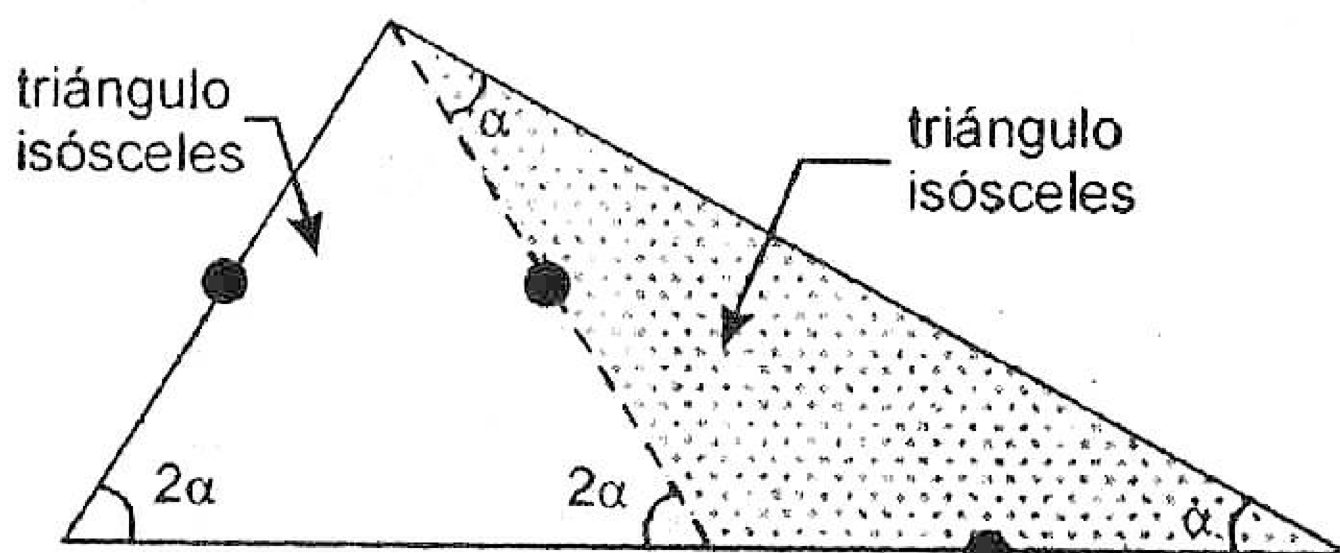


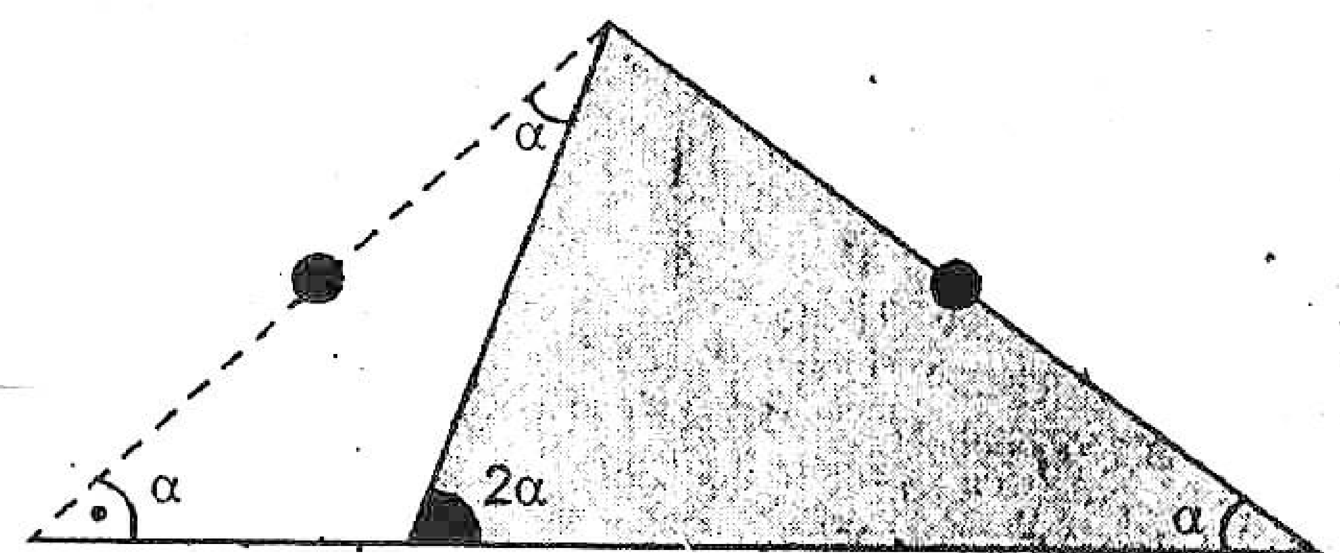
Se trazará una ceviana externa tal que forme un ángulo igual al menor en la misma base del triángulo.



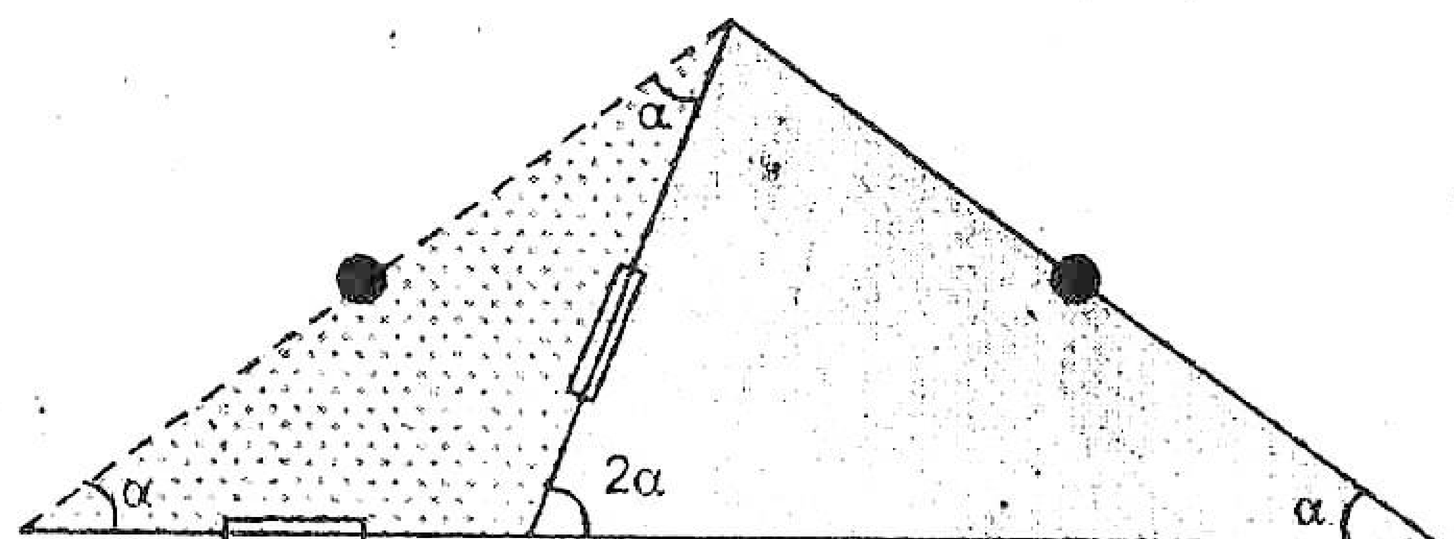


En ambos casos obtenemos triángulos isósceles como se muestra en las figuras.



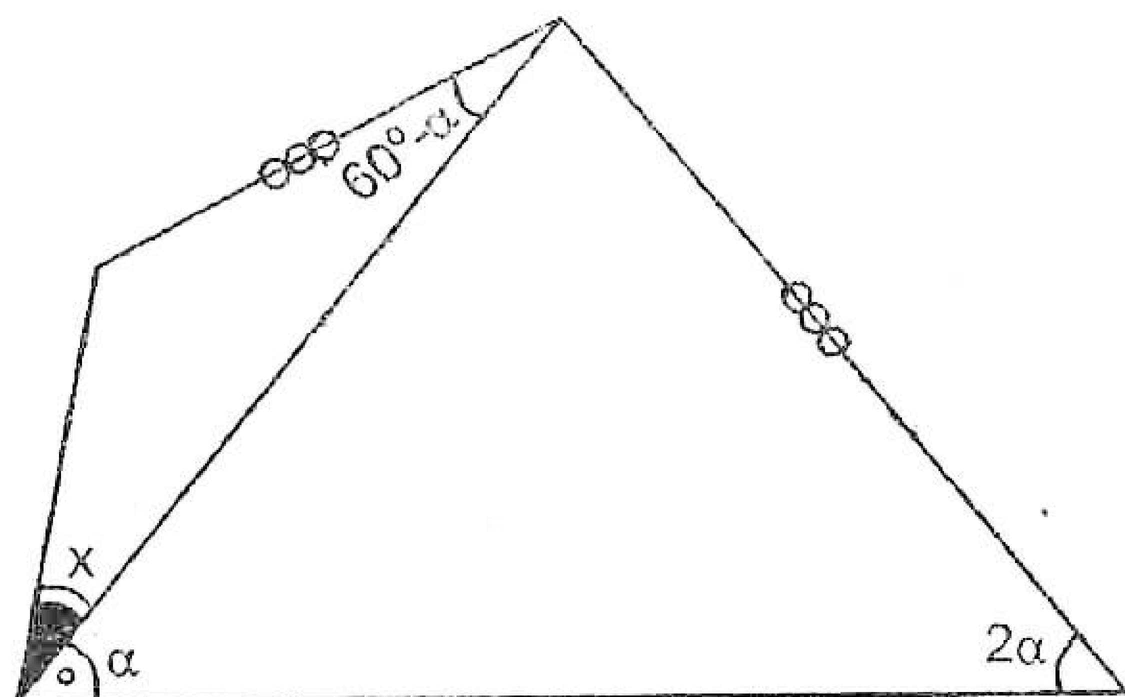


también:



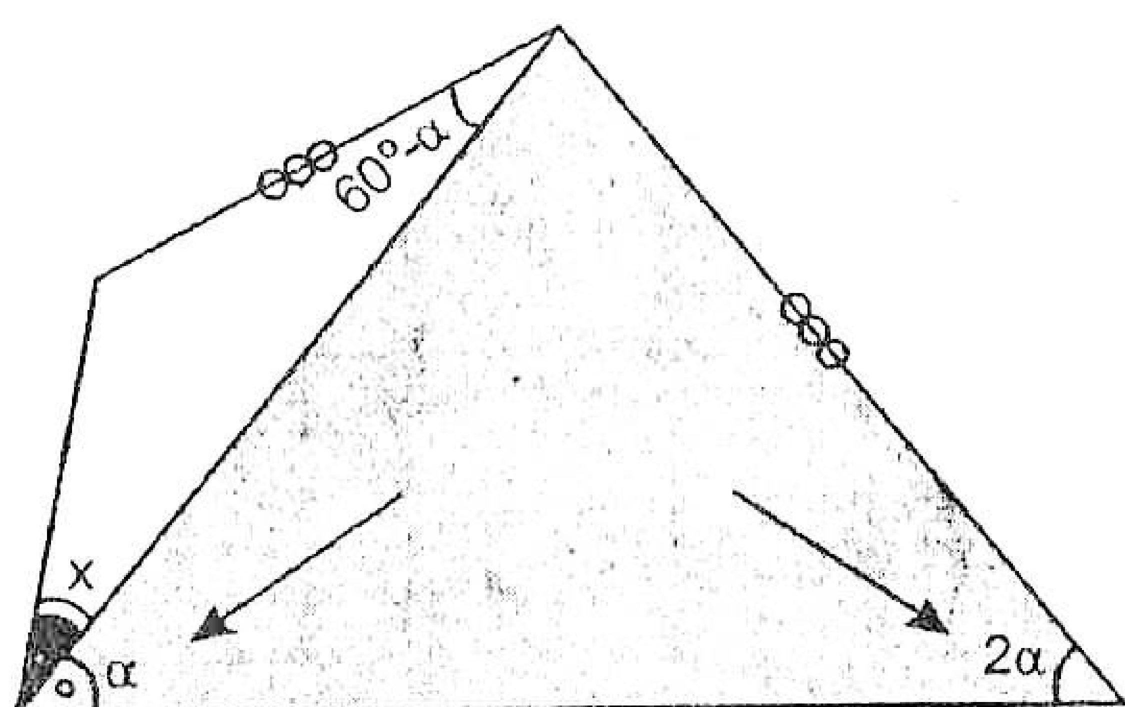
EJEMPLO Nº 1

De la figura calcular "x"

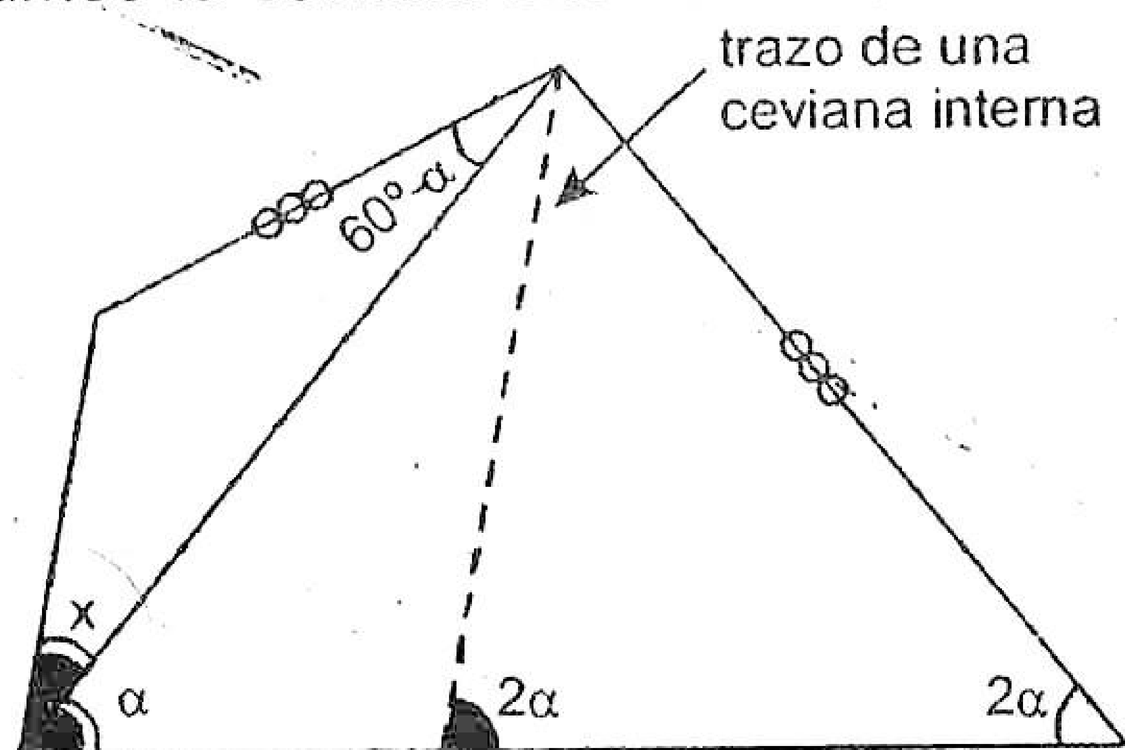


SOLUCIÓN:

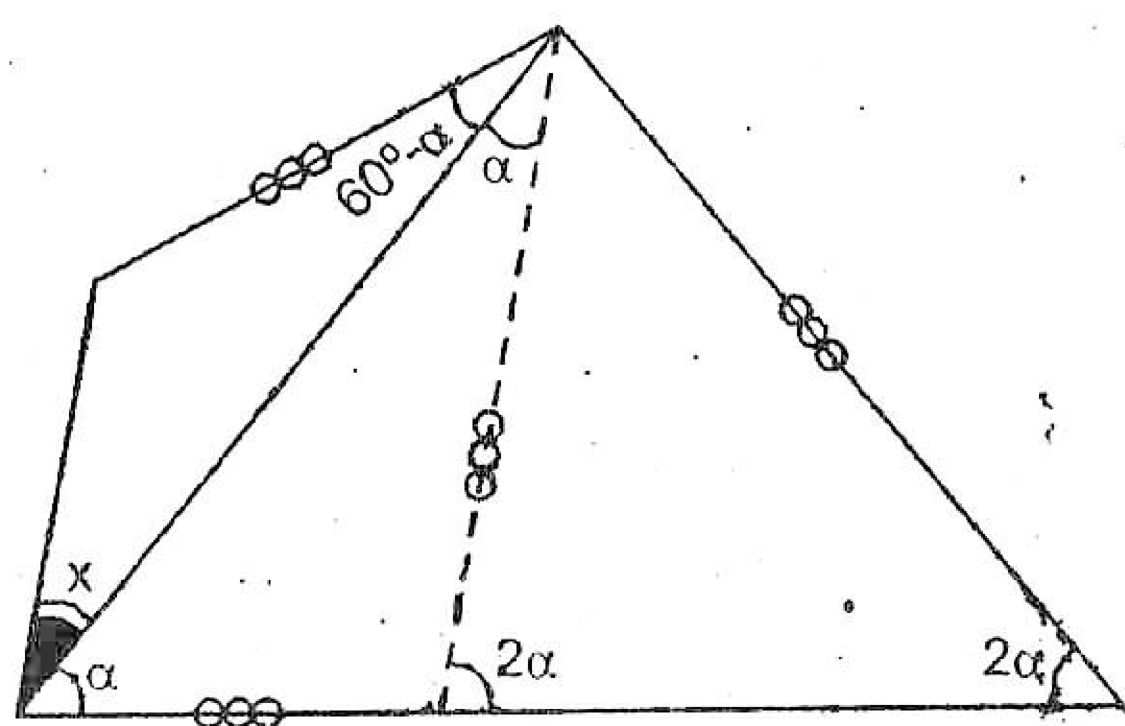
Se tiene en la figura un triángulo que tiene ángulos internos la relación de 1 a 2.



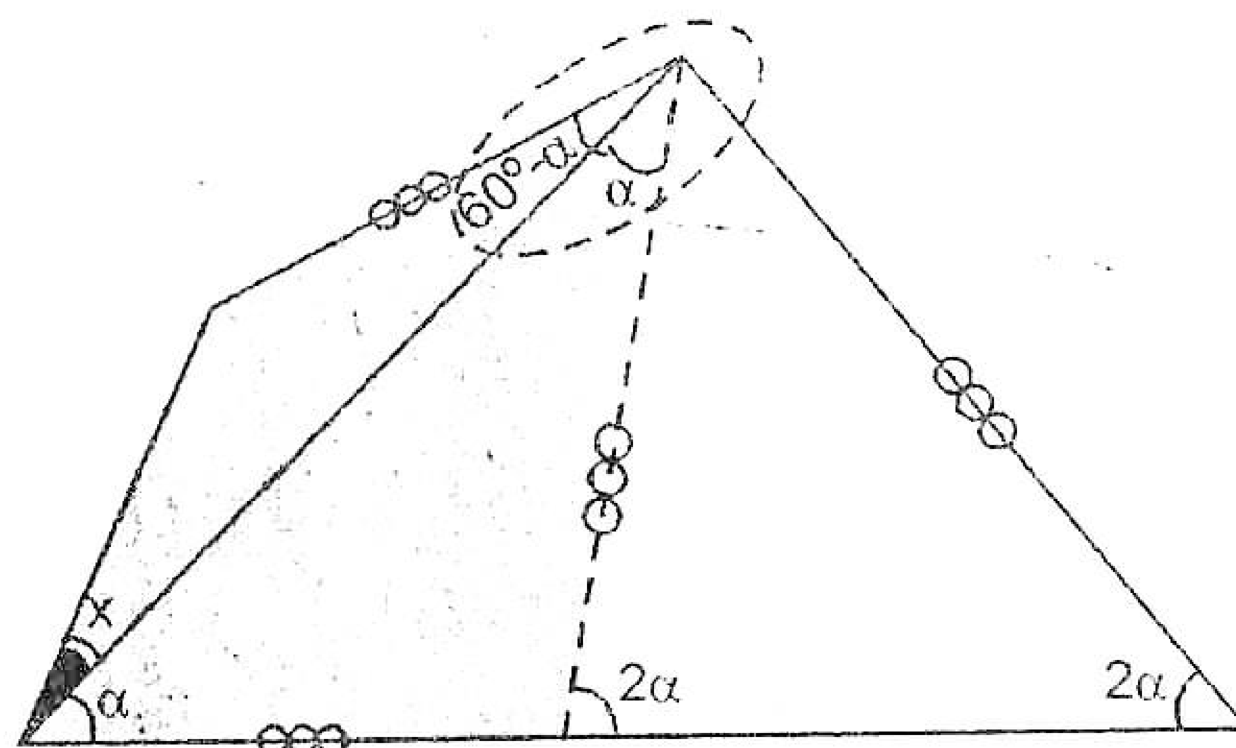
Paso Nº 1: Entonces aplicamos el primer criterio: Trazamos la ceviana interna.



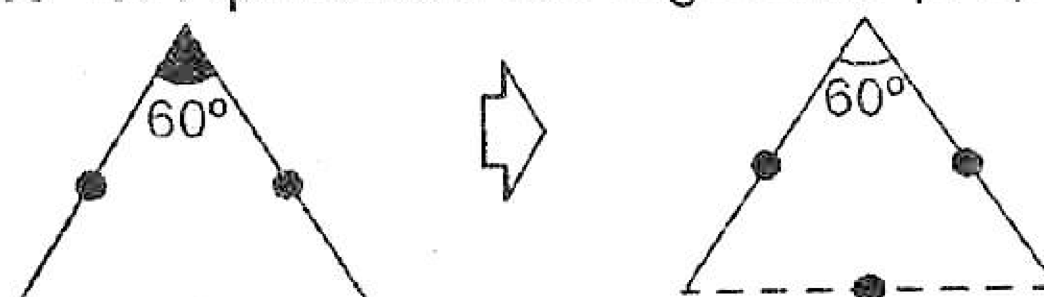
Paso Nº 2: Ahora, completamos ángulos y observamos lados iguales.

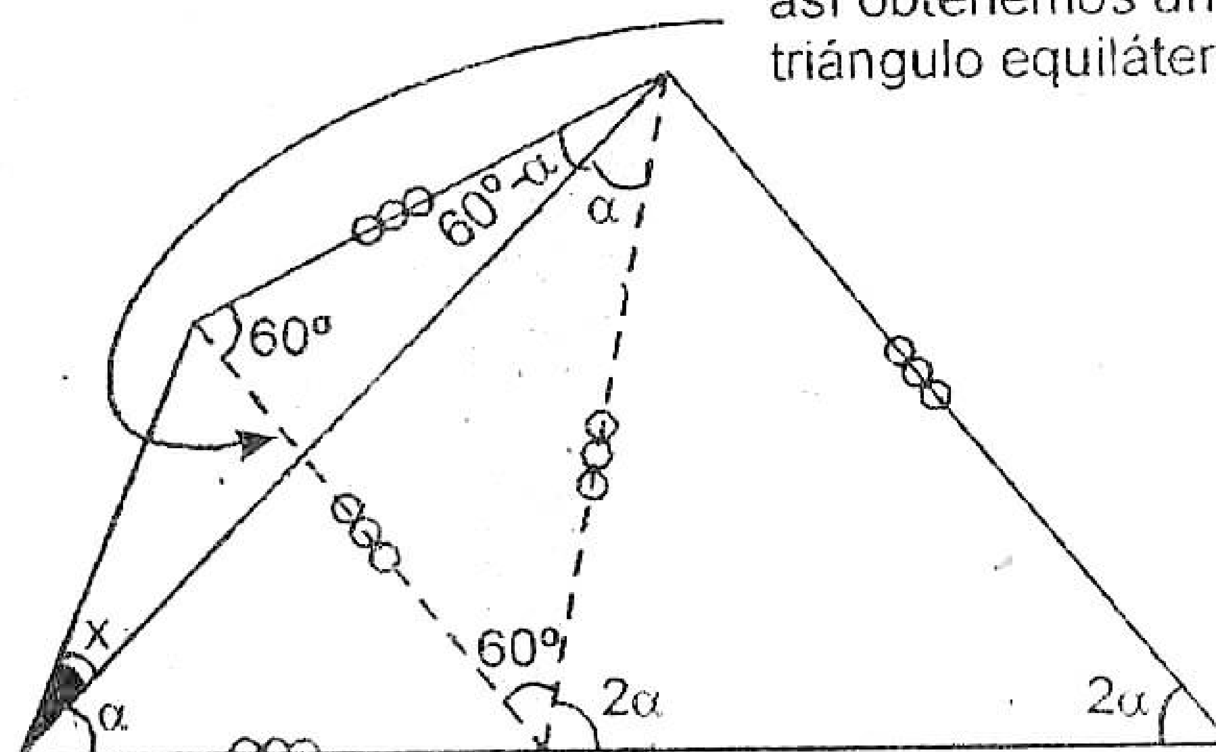


Paso Nº 3: Se observa, un ángulo de 60° de la siguiente forma.

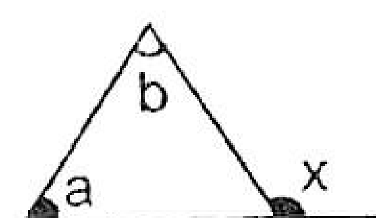


Paso Nº 4: Aplicando las siguiente propiedad.

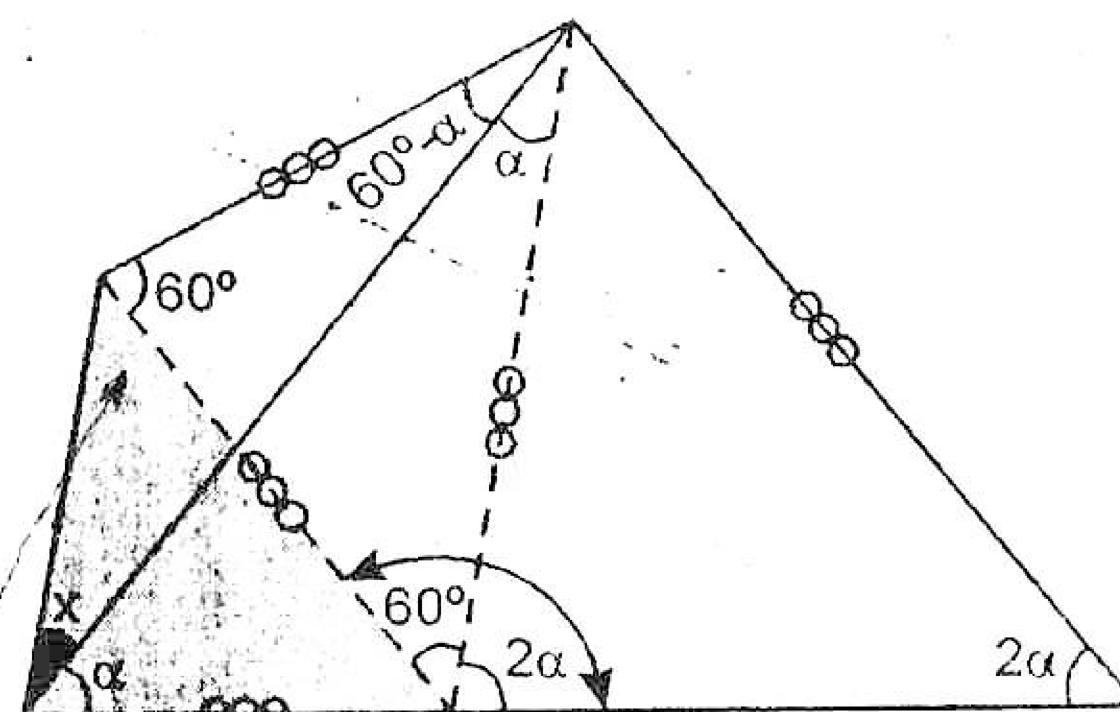




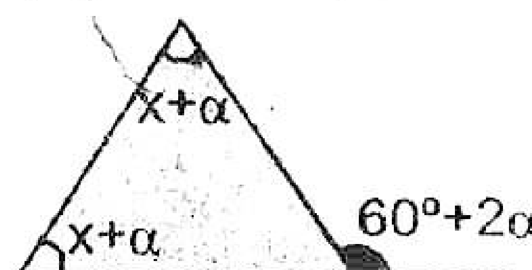
Paso Nº 5: Se observa un triángulo isósceles adicional donde se podrá aplicar.



x = a + b



De aquí:



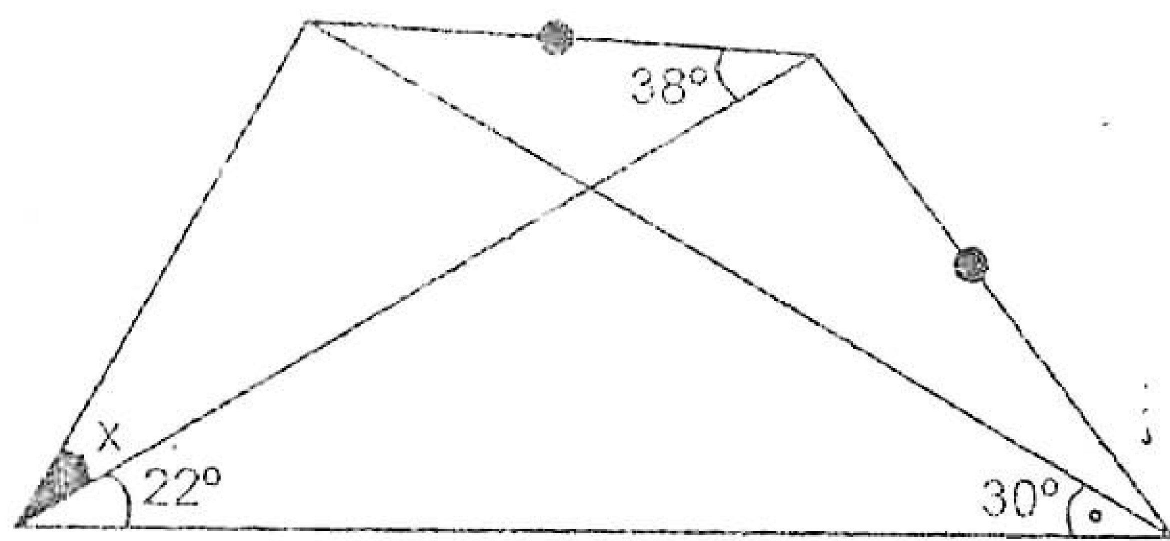
$$x + \alpha + x + \alpha = 60° + 2\alpha$$

$$2x + \cancel{2\alpha} = 60° + \cancel{2\alpha}$$

$$\mathbf{x = 30°}$$

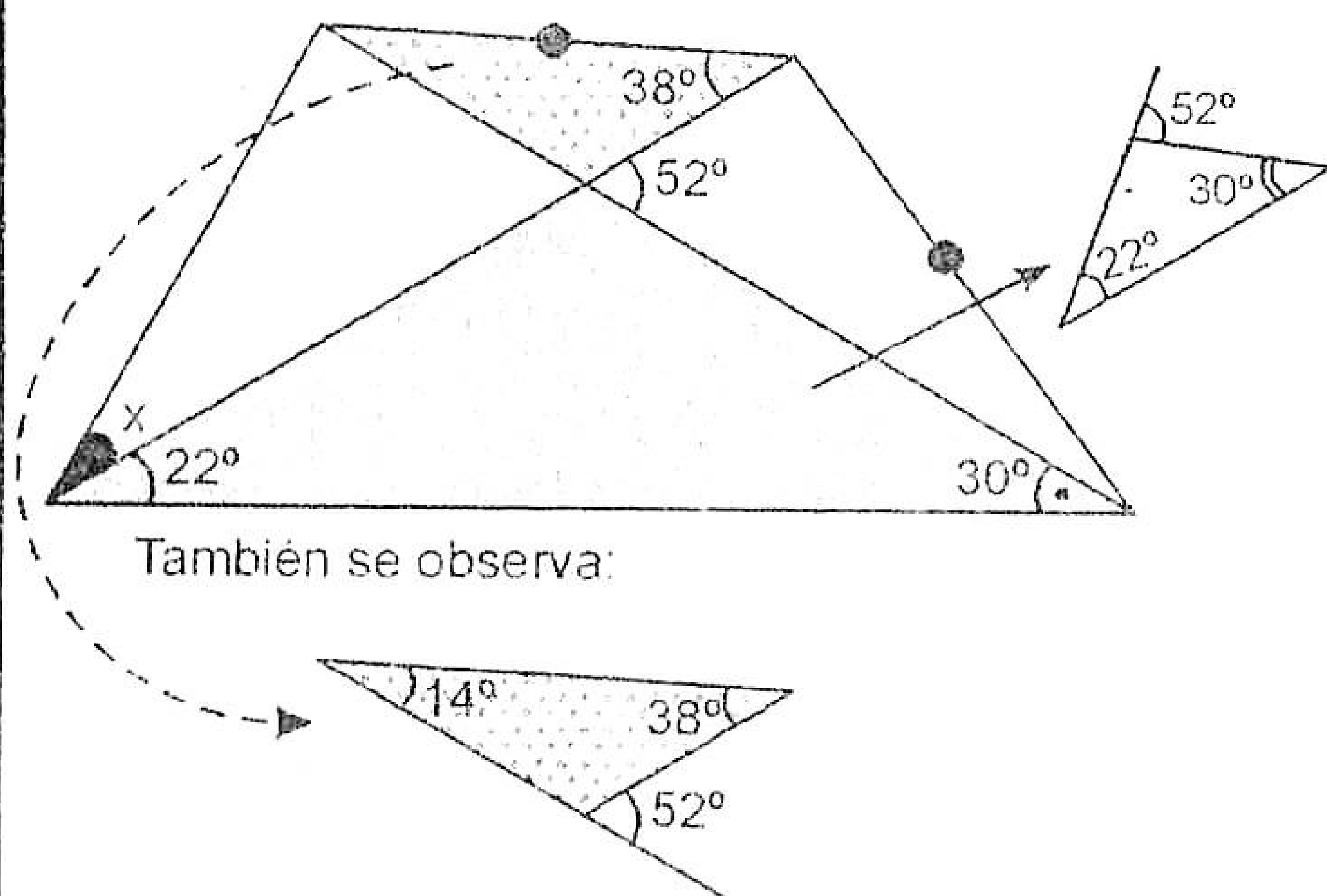
EJEMPLO Nº 2

De la figura calcular "x"

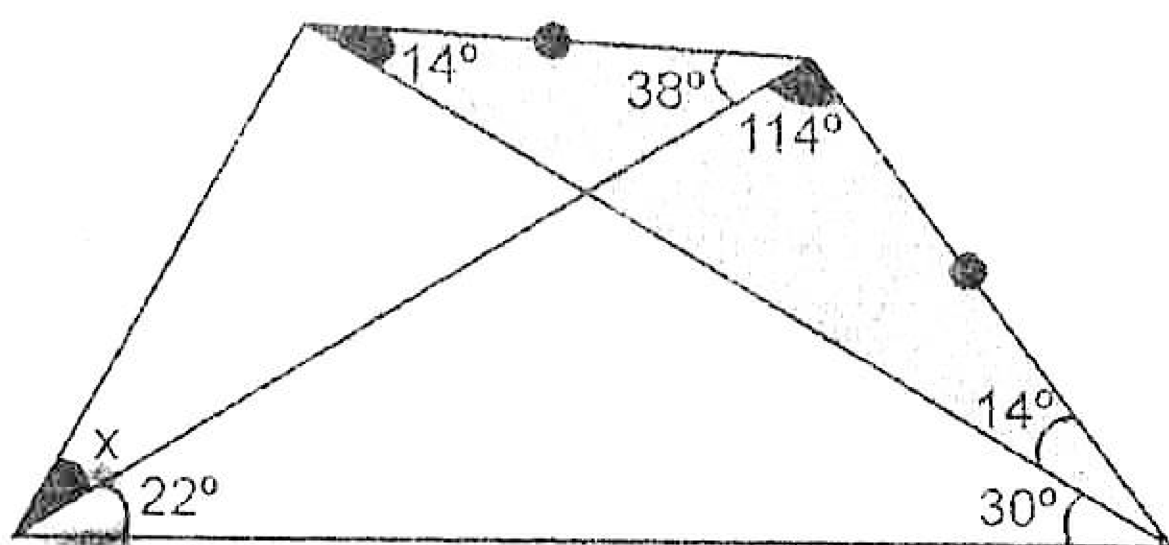


SOLUCIÓN:

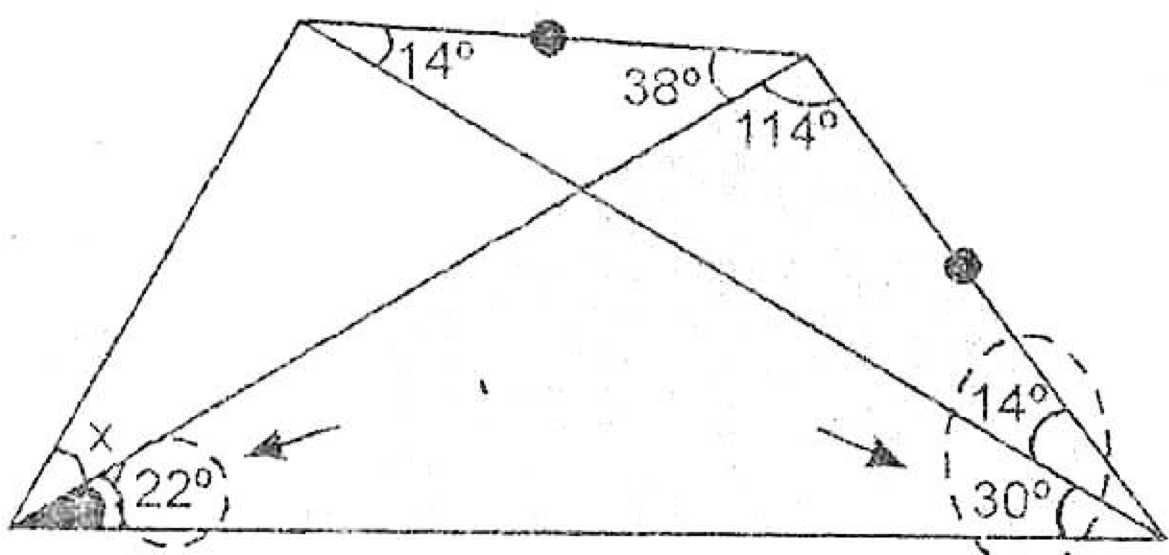
Paso Nº 1: Completamos ángulos, internos en la figua y se tiene:



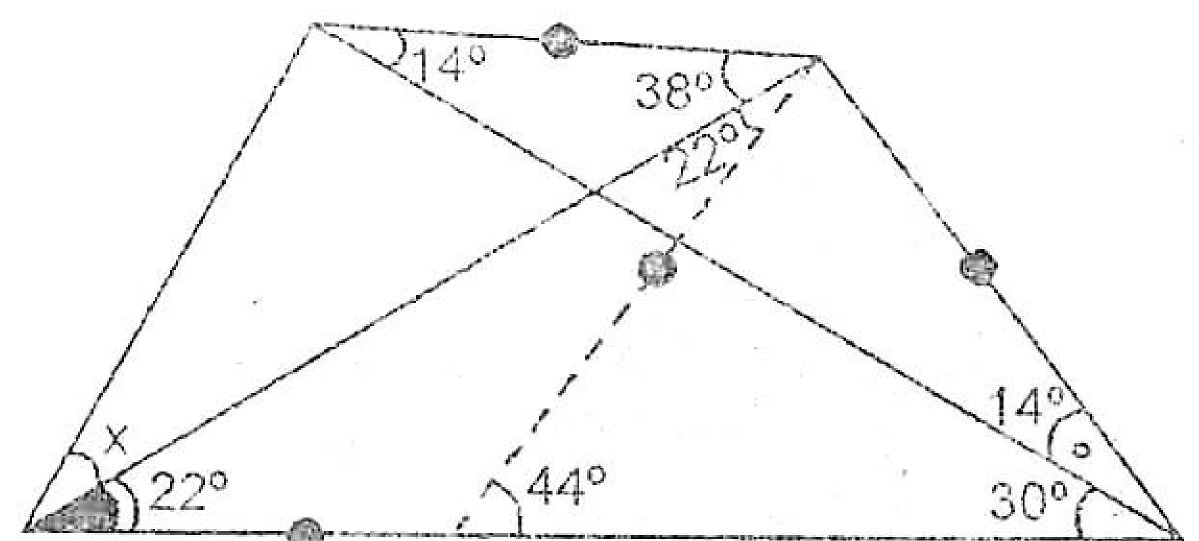
Paso Nº 2: Se tiene un triángulo isósceles.



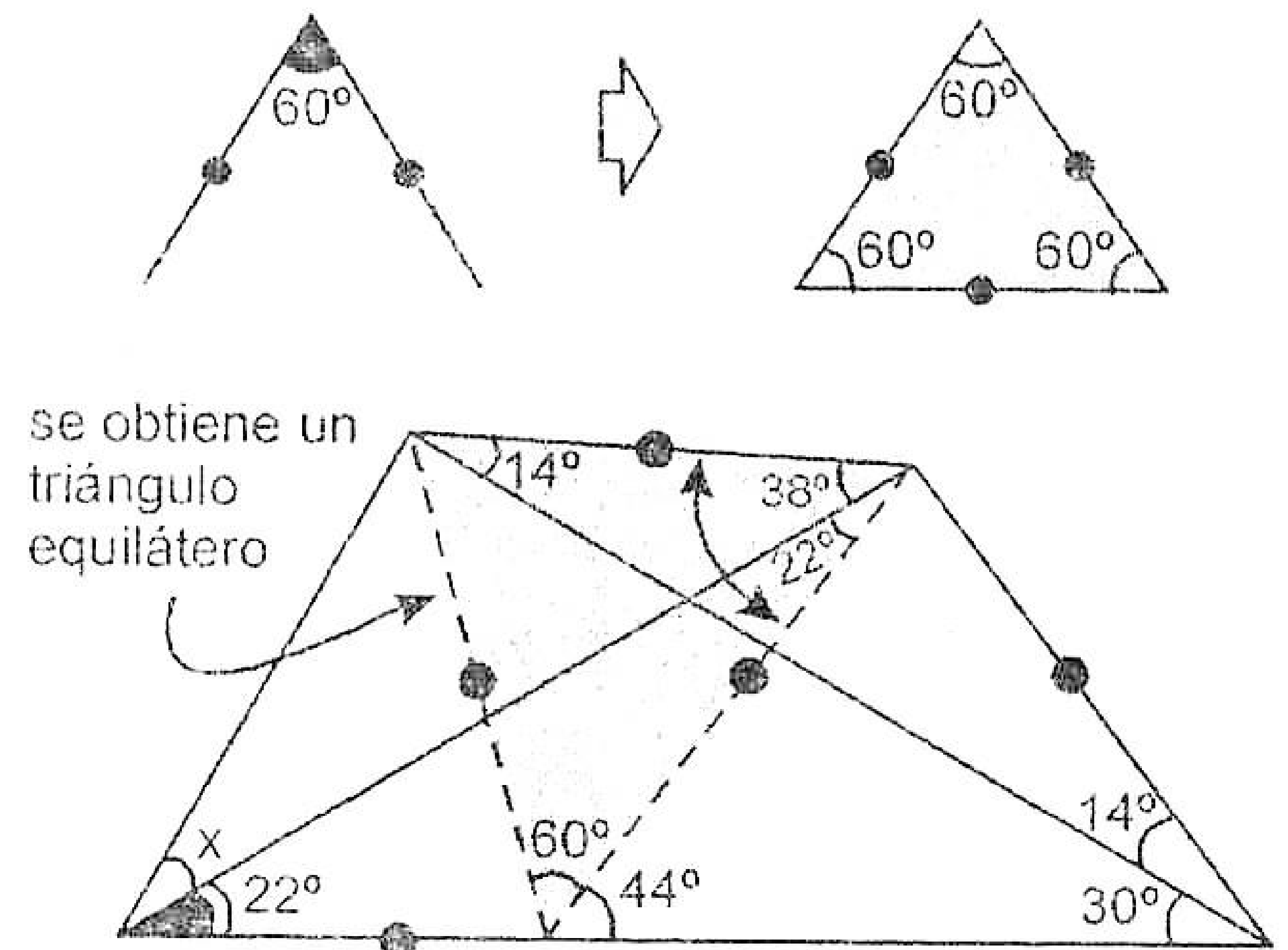
Paso Nº 3: Se observa un triángulo que tiene ángulos internos en la relación de 1 a 2 (22° y 44°)



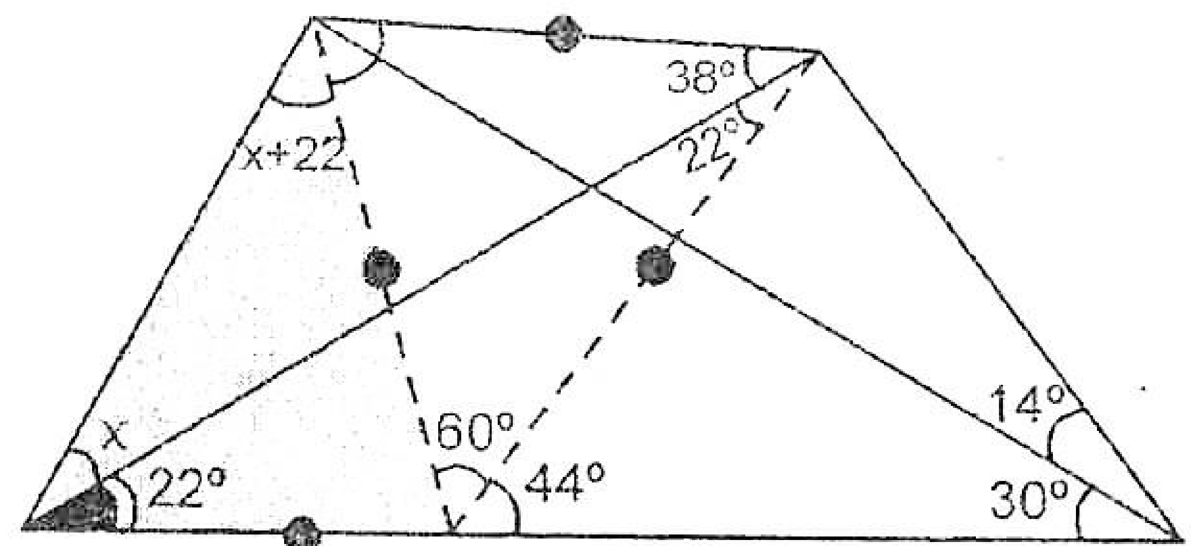
Paso Nº 4: Aplicamos el primer criterio; trazamos la ceviana interna.



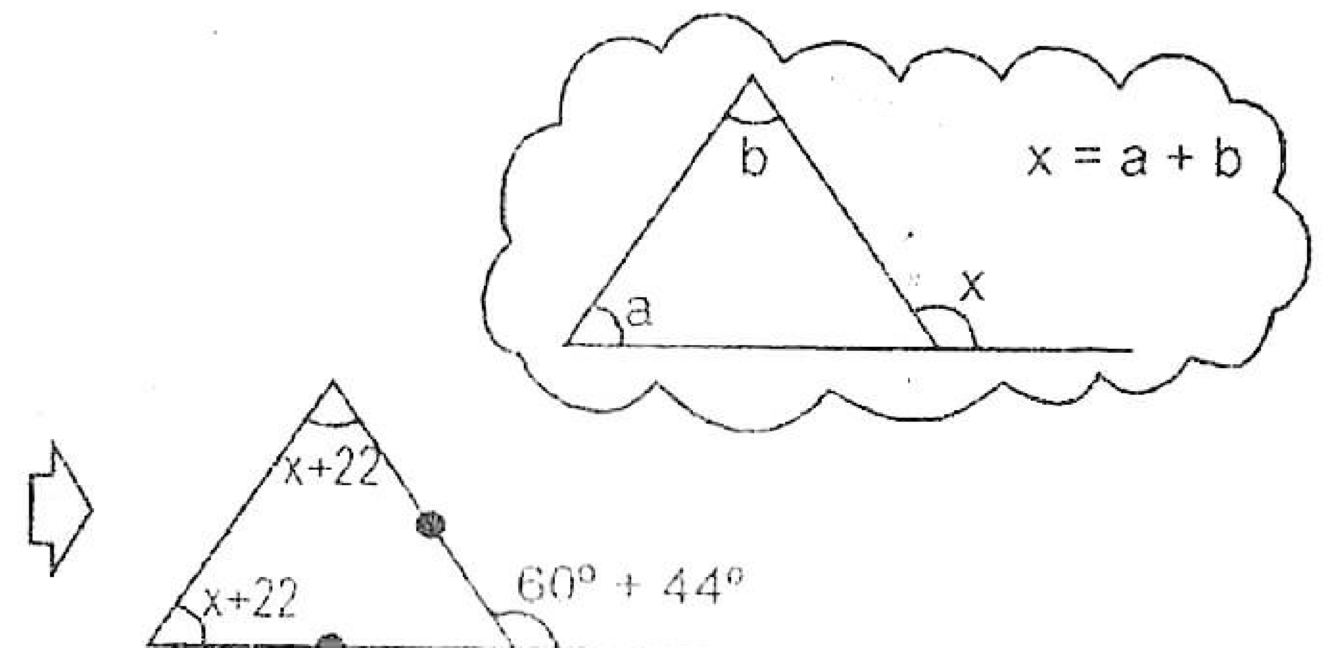
Paso Nº 5: Ahora observamos un ángulo 60° (38°+22°) acompañado de dos lados iguales, entonces hacemos:



Paso Nº 6: Luego se observa un nuevo triángulo isósceles.



Paso Nº 7: Ahora en este triángulo isósceles se puede aplicar.



$$x + 22° + x + 22° = 60° + 44°$$

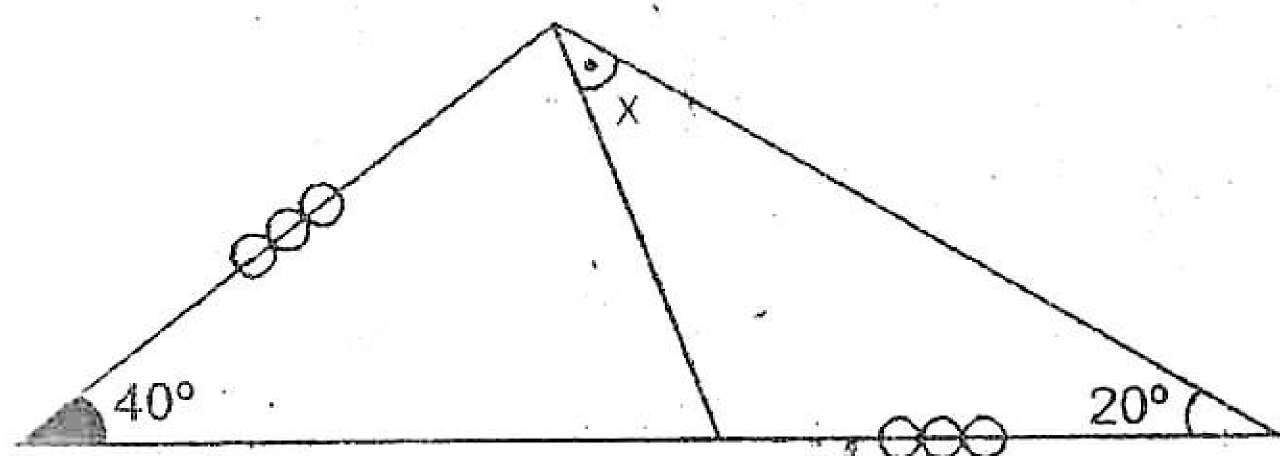
$$2x + 44° = 60° + 44°$$

$$x = 30°$$

12

EJEMPLO Nº 3

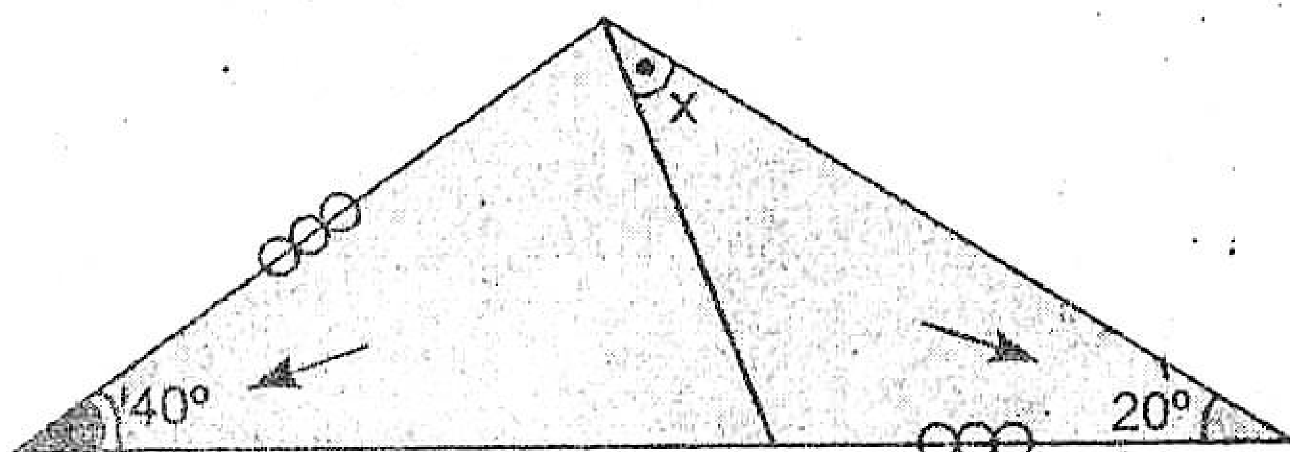
De la figura calcular "x"



SOLUCIÓN:

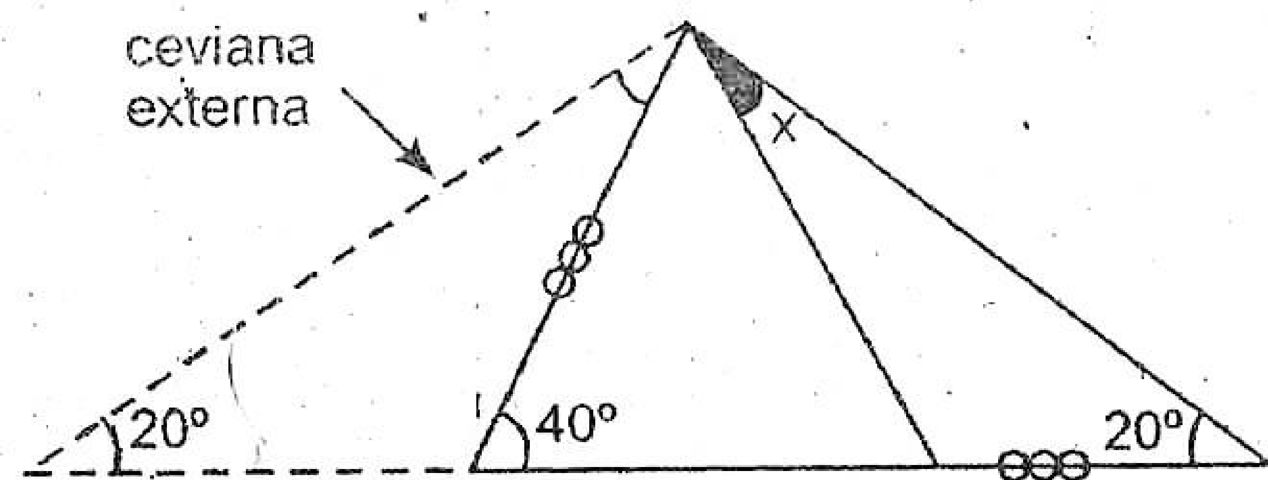
Paso Nº 1:

Se observa en el triángulo ángulos internos en la relación de 1 a 2 (20° y 40°)



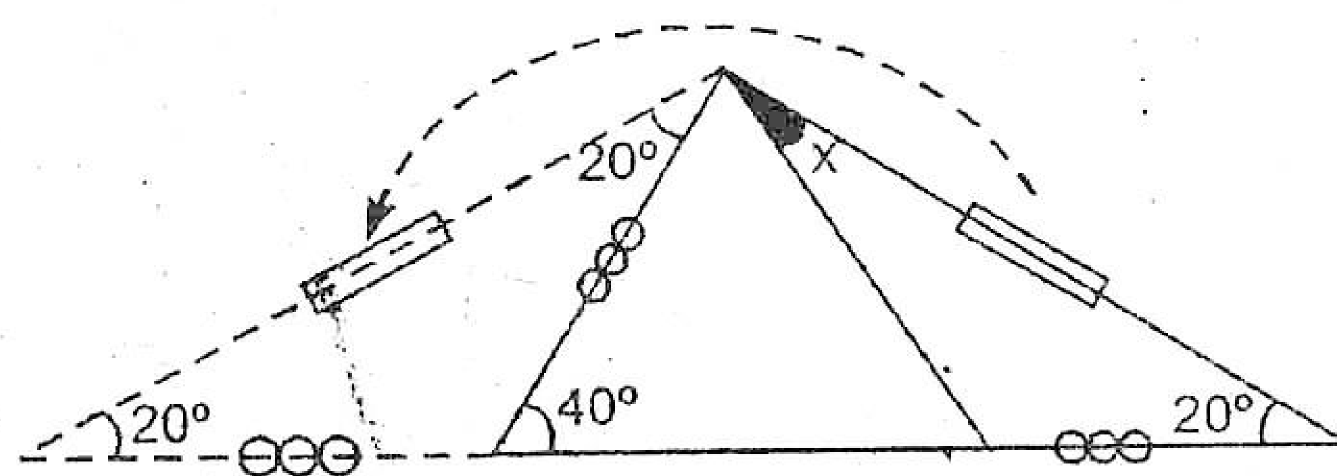
Paso Nº 2:

Aplicamos el primer criterio: pero ahora trazamos una ceviana externa de la siguiente manera.



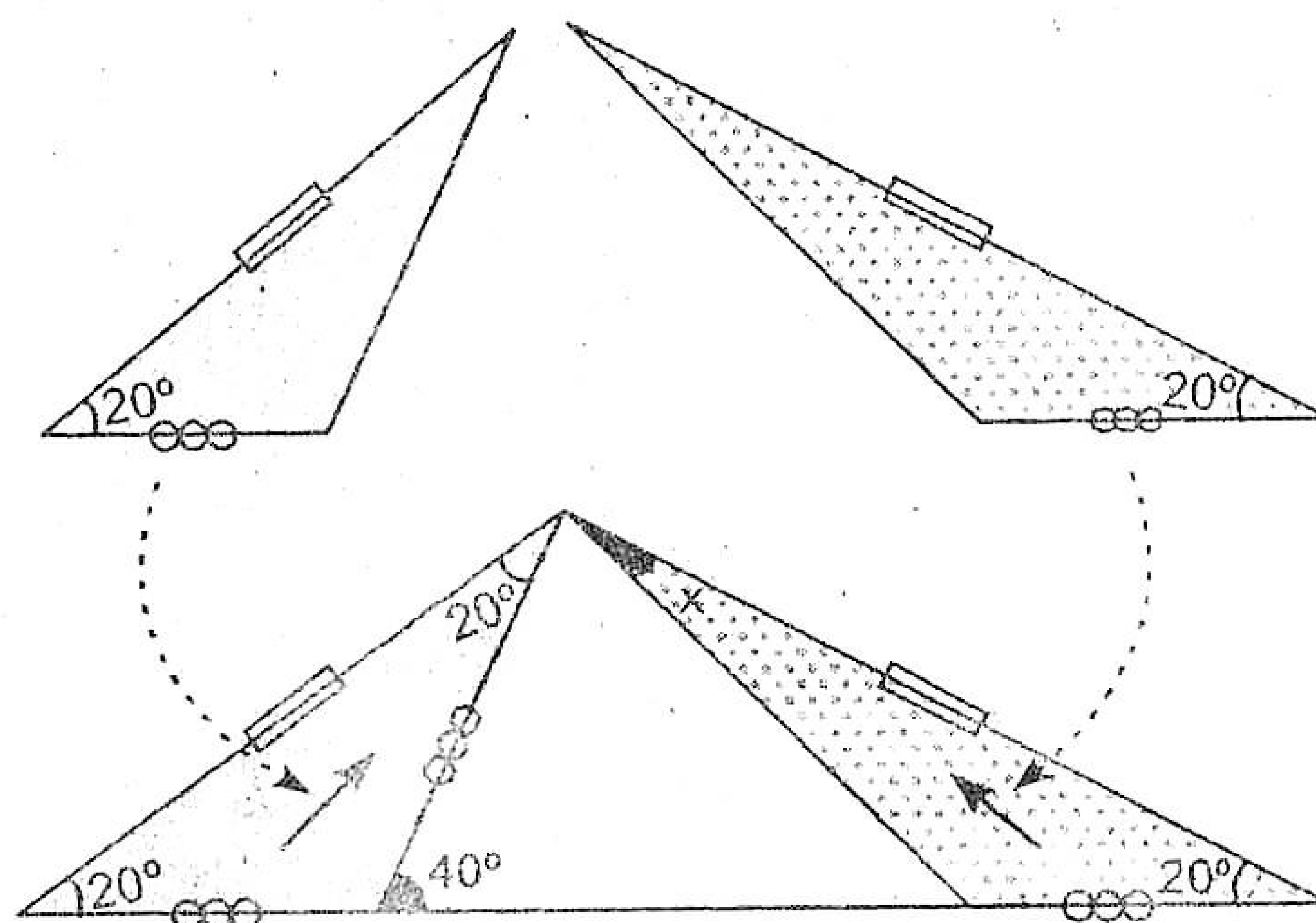
Paso Nº 3:

Completamos ángulos y se obtiene triángulos isosceles.



Paso Nº 4:

Ahora se observa en la figura, triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



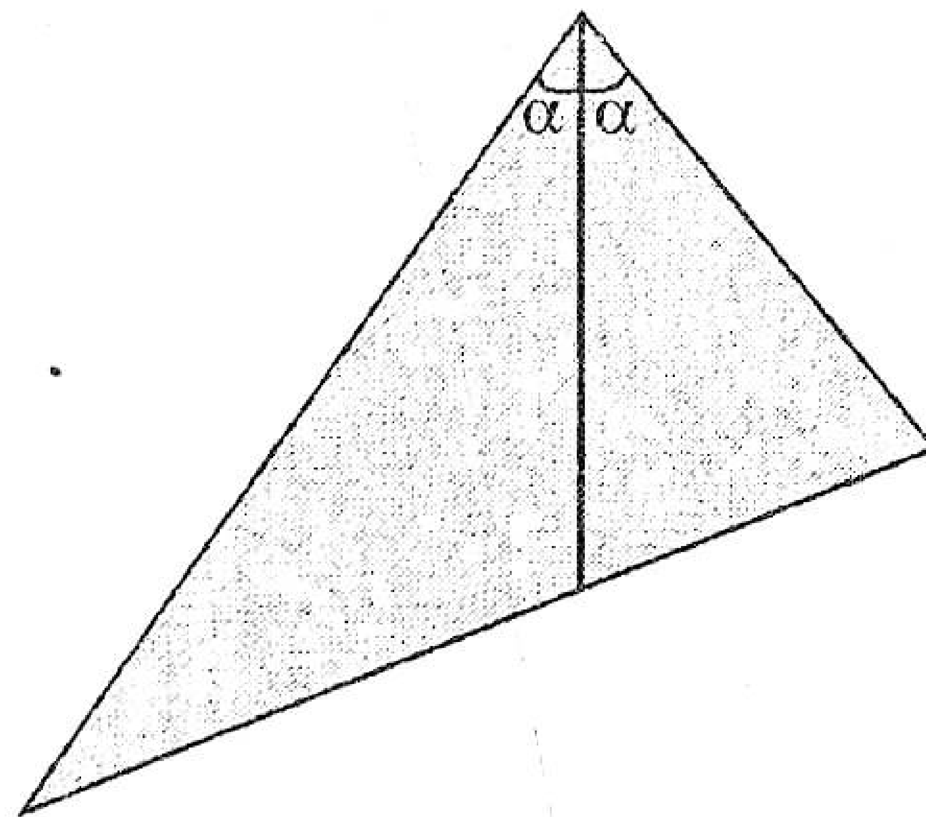
∴ Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"

$\Rightarrow$ **x = 20°**

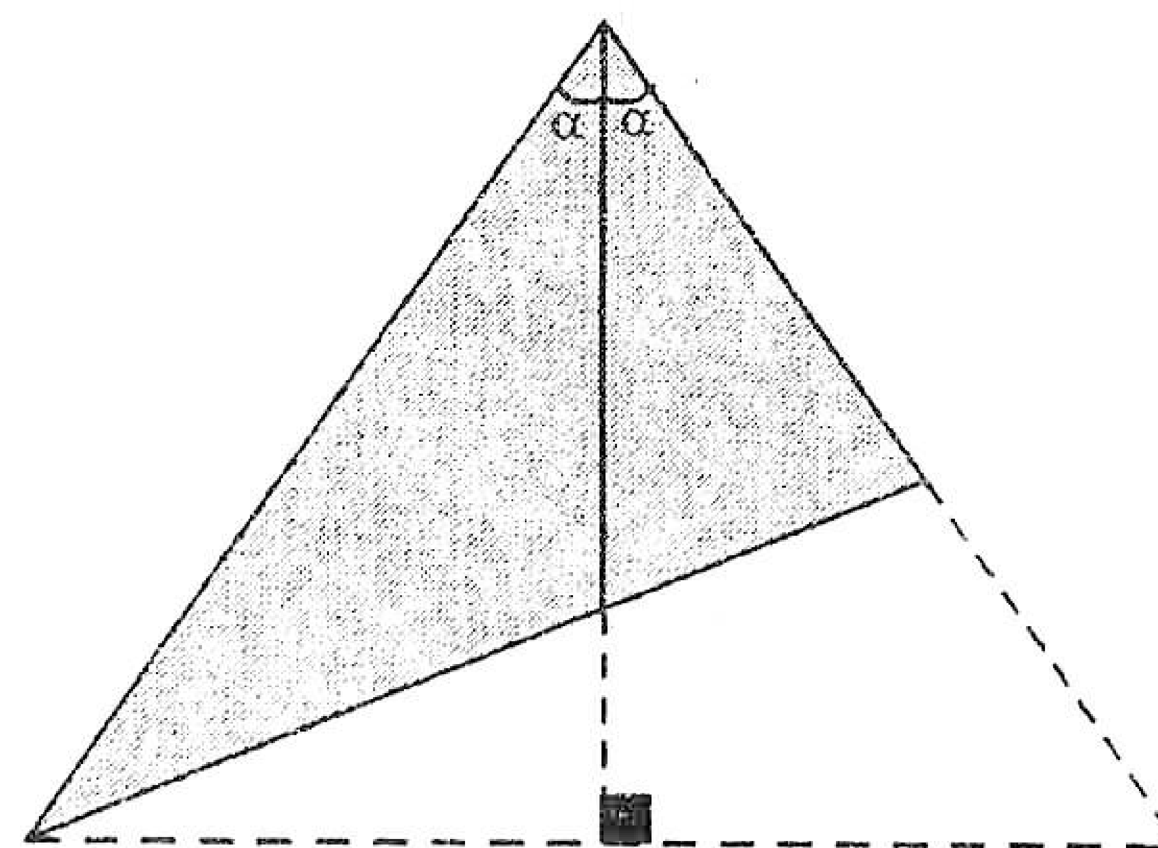
2do Criterio

"COMPLETANDO A UN TRIÁNGULO ISÓSCELES"

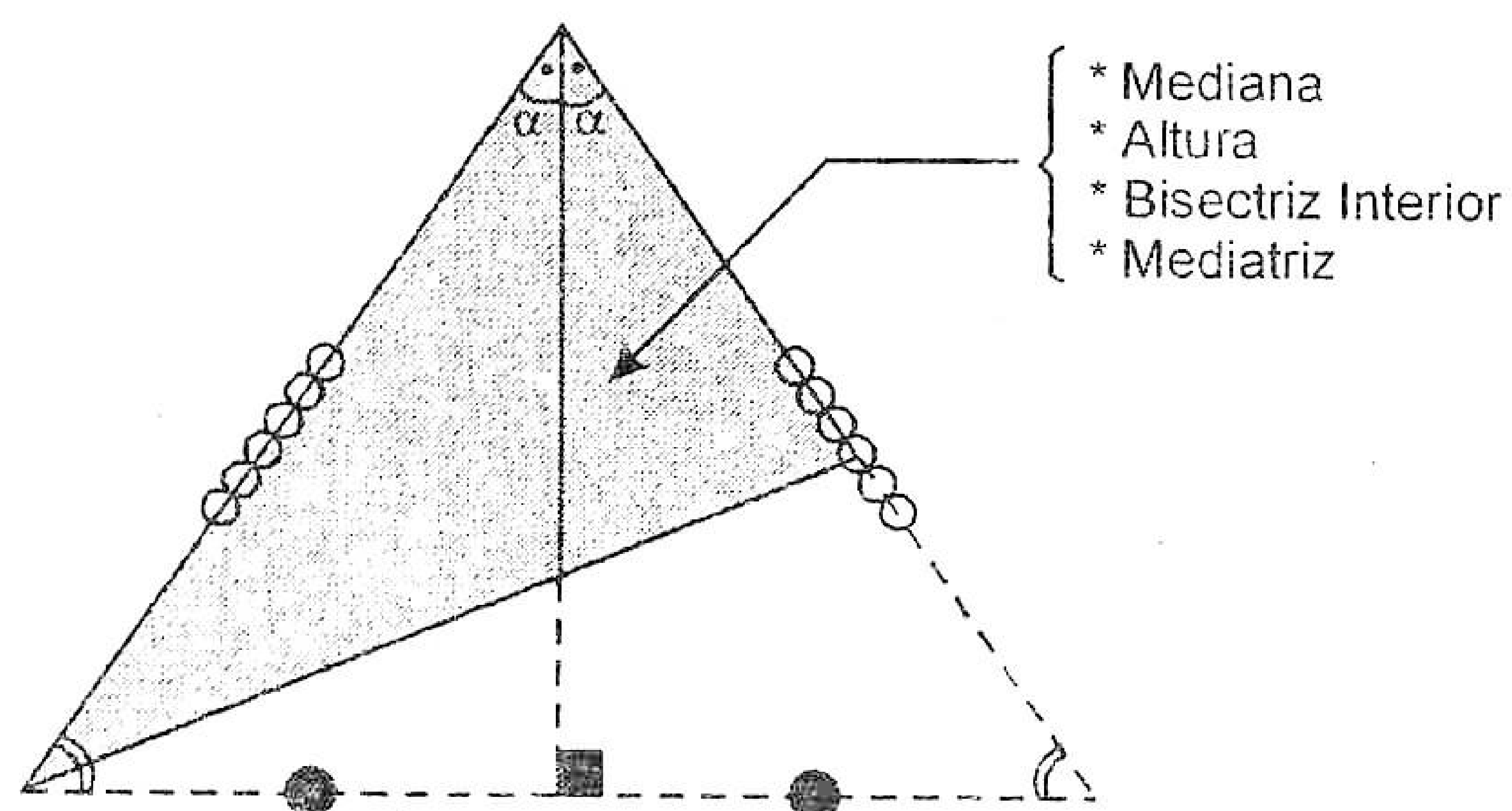
Cuando se observe en un triángulo una bisectriz interior, se buscará completarlo a un triángulo isósceles de la siguiente manera:



Se hará

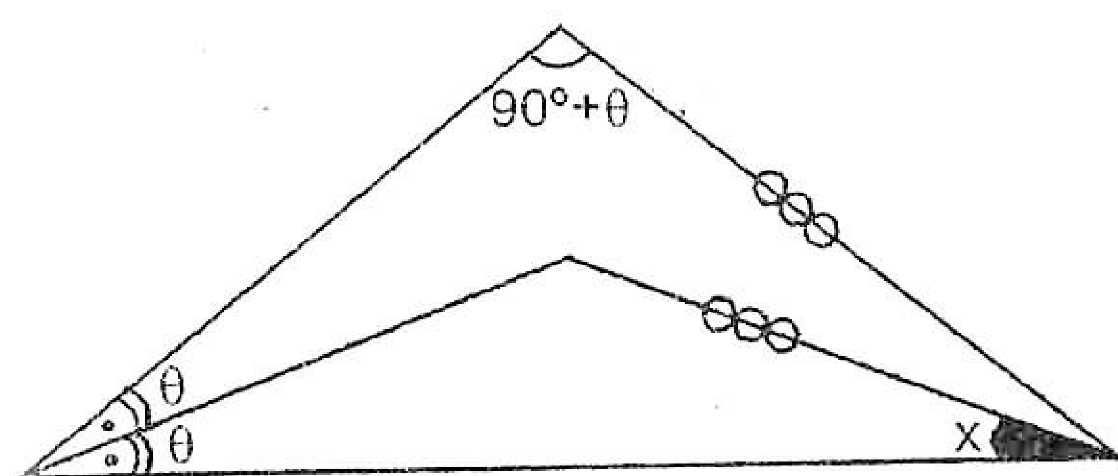


Se obtiene



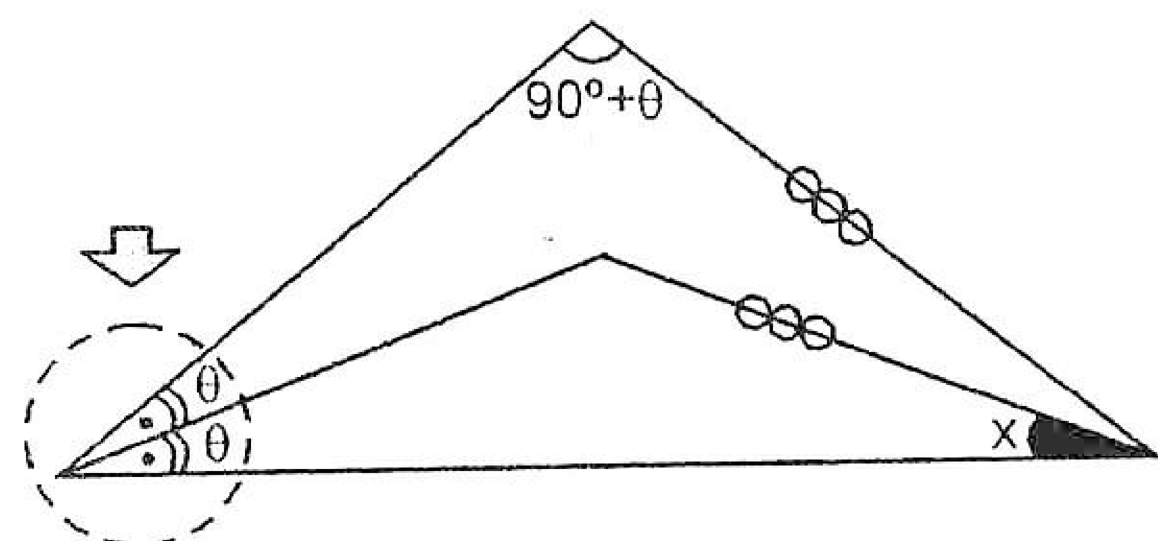
EJEMPLO Nº 1

Calcular "x"

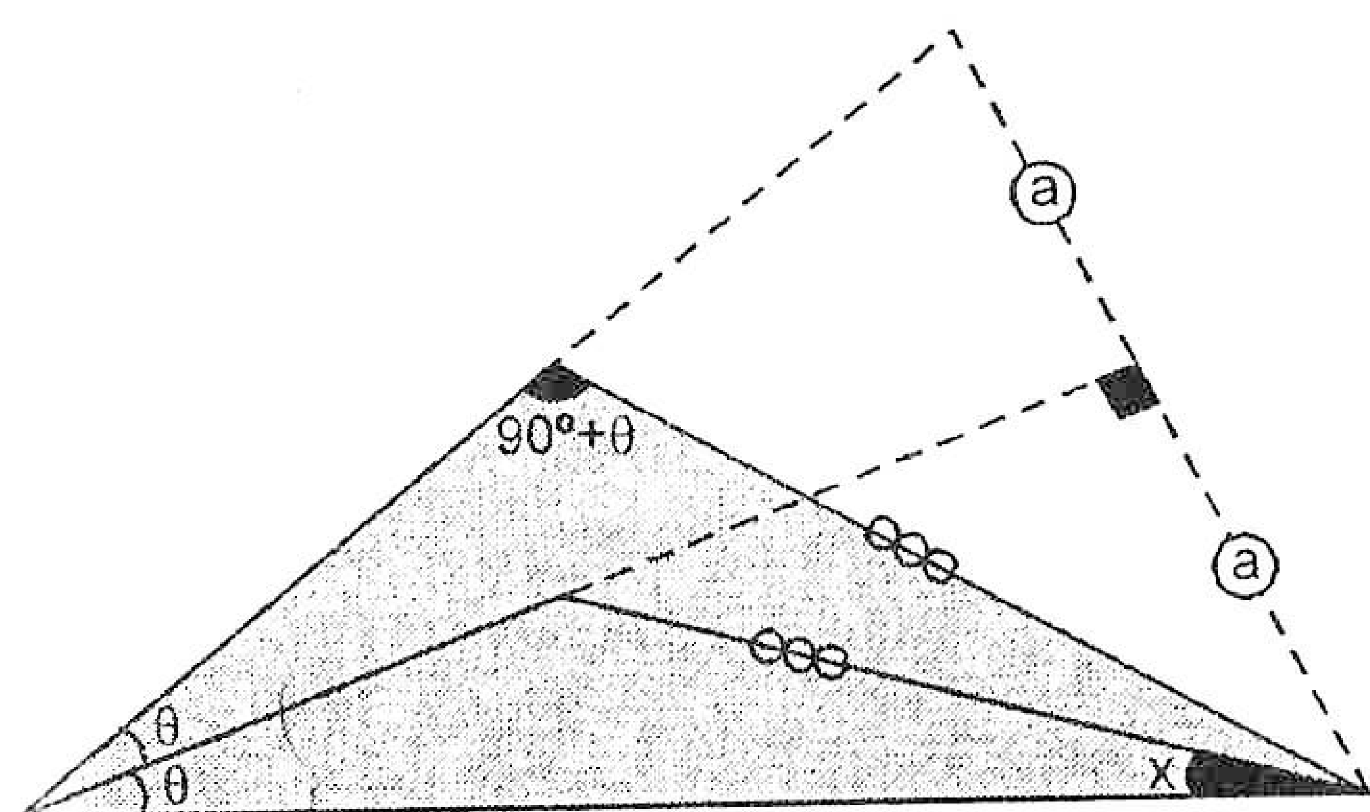


SOLUCIÓN:

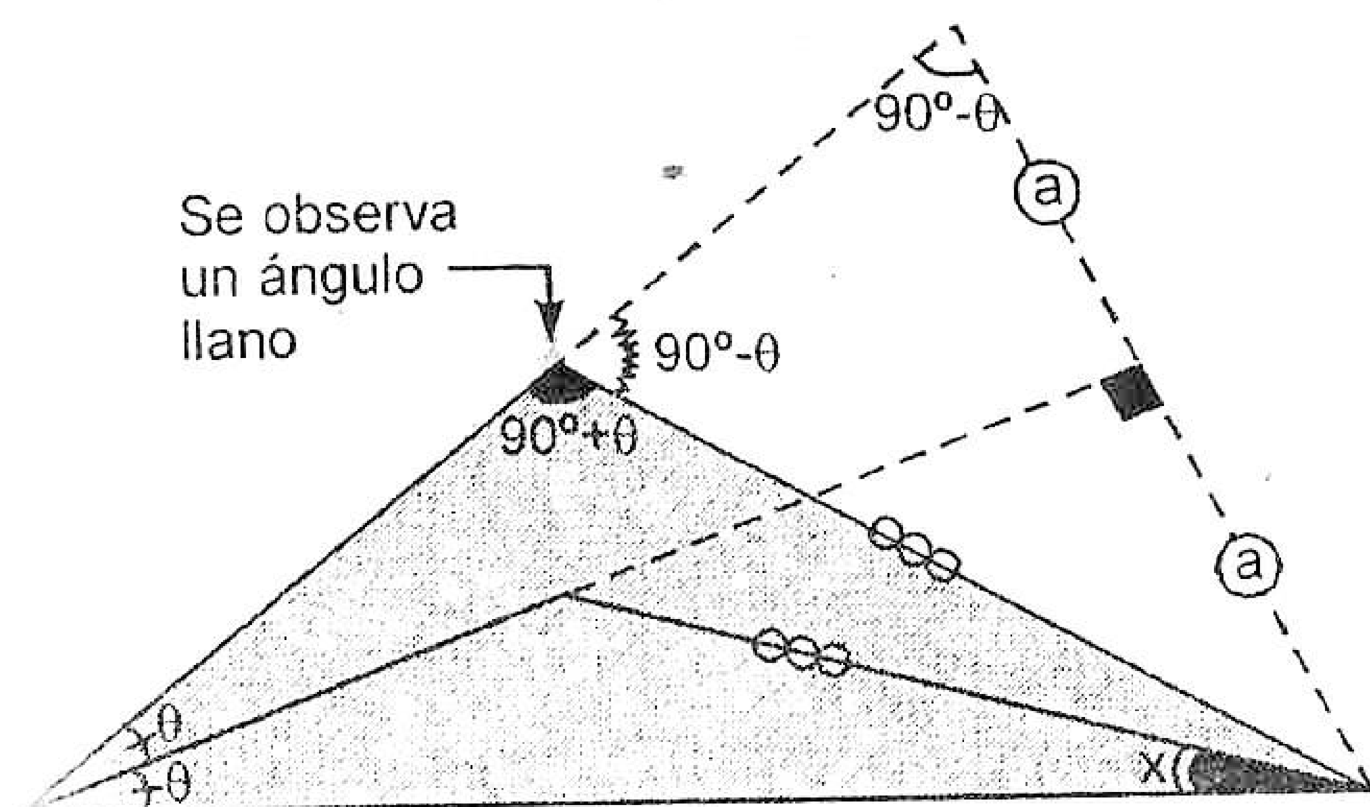
Se observa en la figura, un ángulo donde hay bisectriz interior.



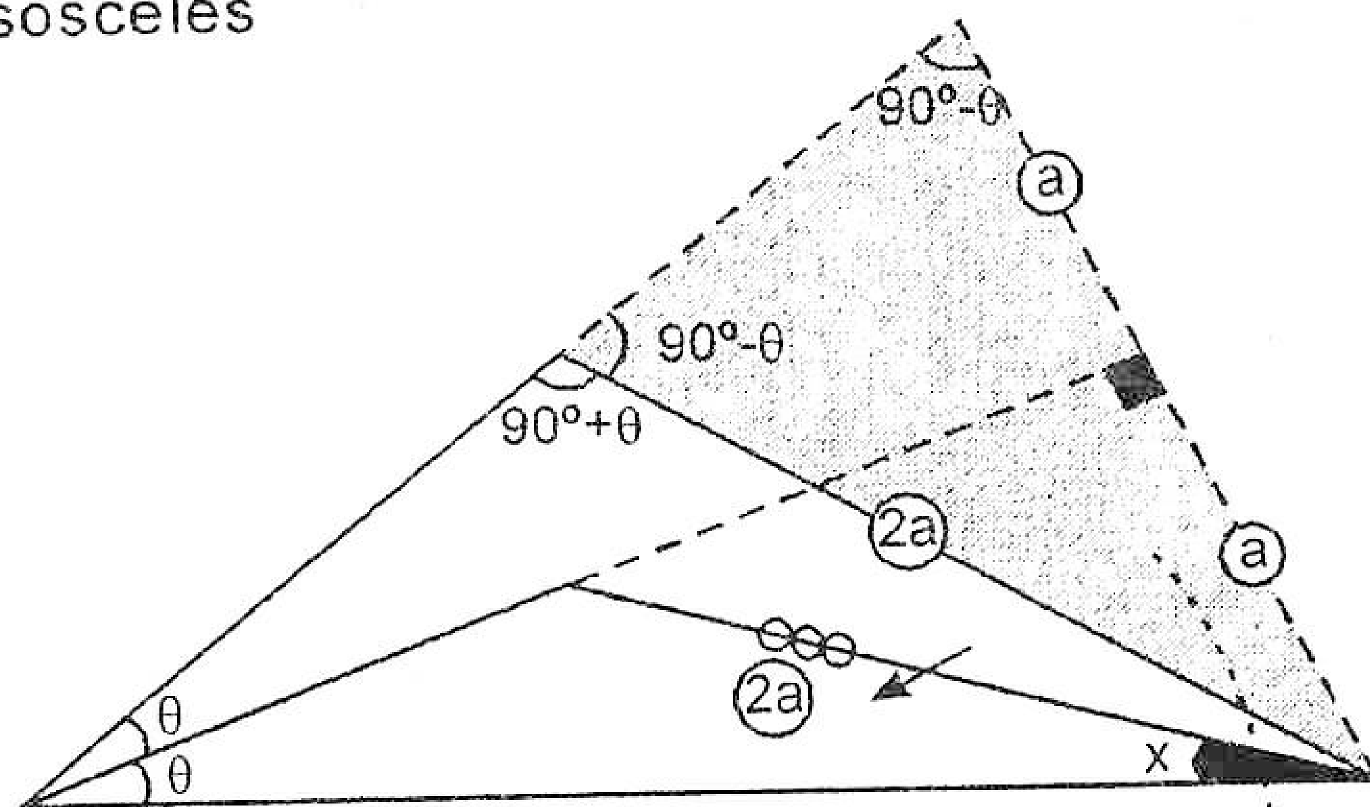
Paso Nº 1: Según el criterio #2, lo completamos para obtener un triángulo isósceles de la siguiente manera.

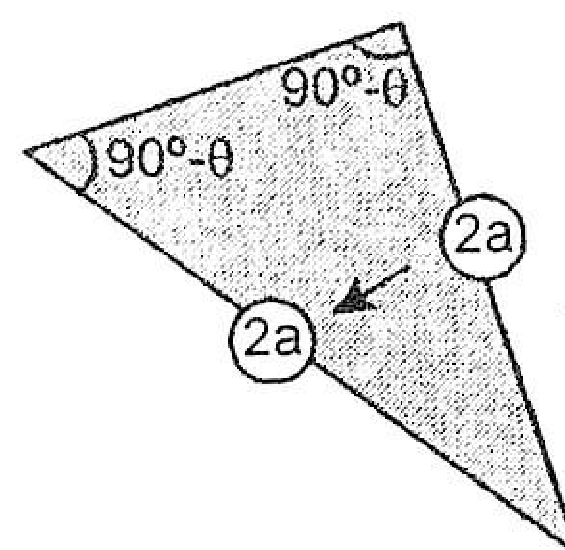


Paso Nº 2: Completamos ángulos internos en la figura.

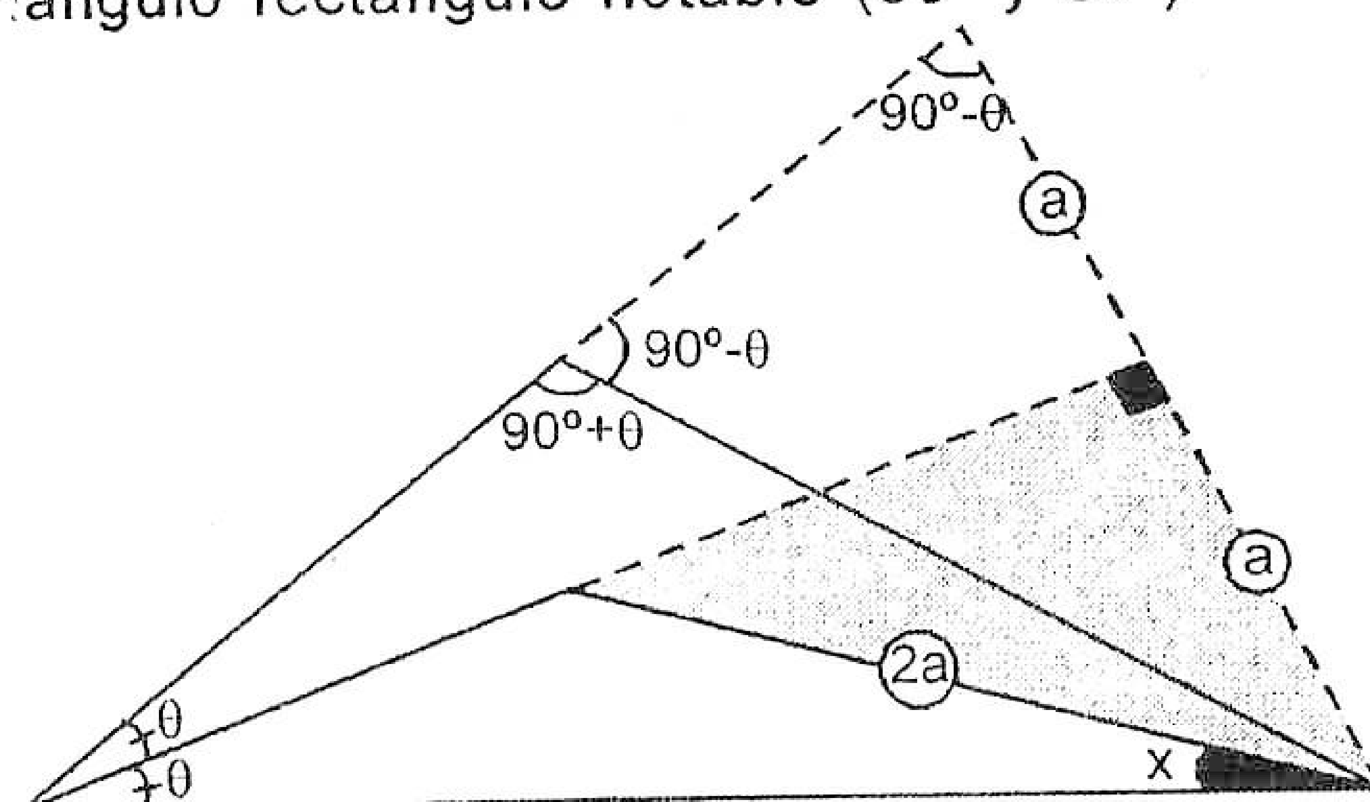


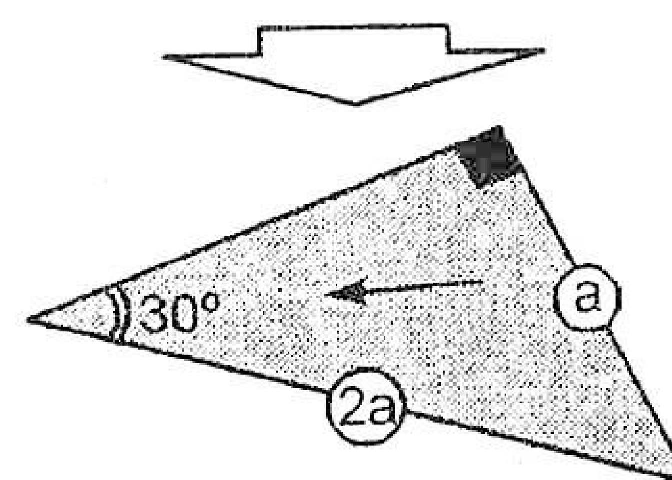
Paso Nº 3: En la figura se observa un triángulo isósceles



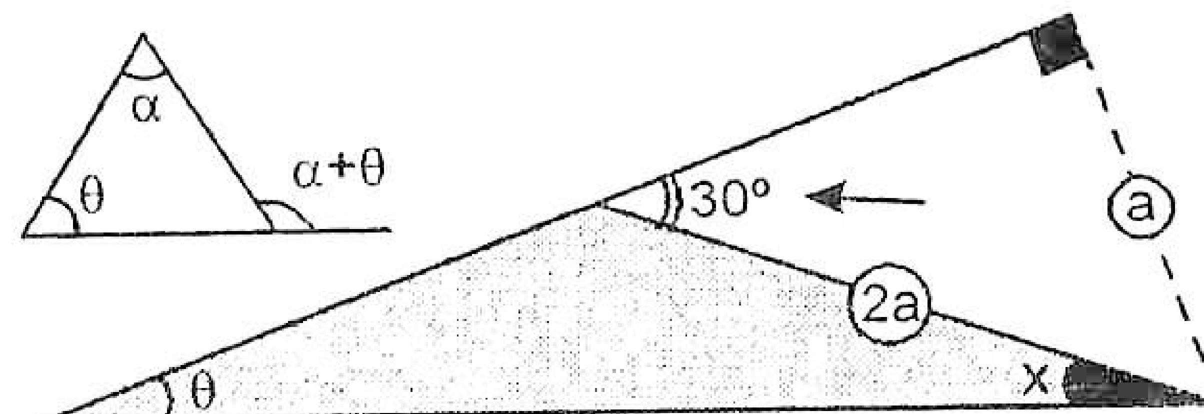


Paso Nº 4: Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable (30° y 60°)





Paso Nº 5: Finalmente se tiene en la figura, un triángulo que se presenta como:

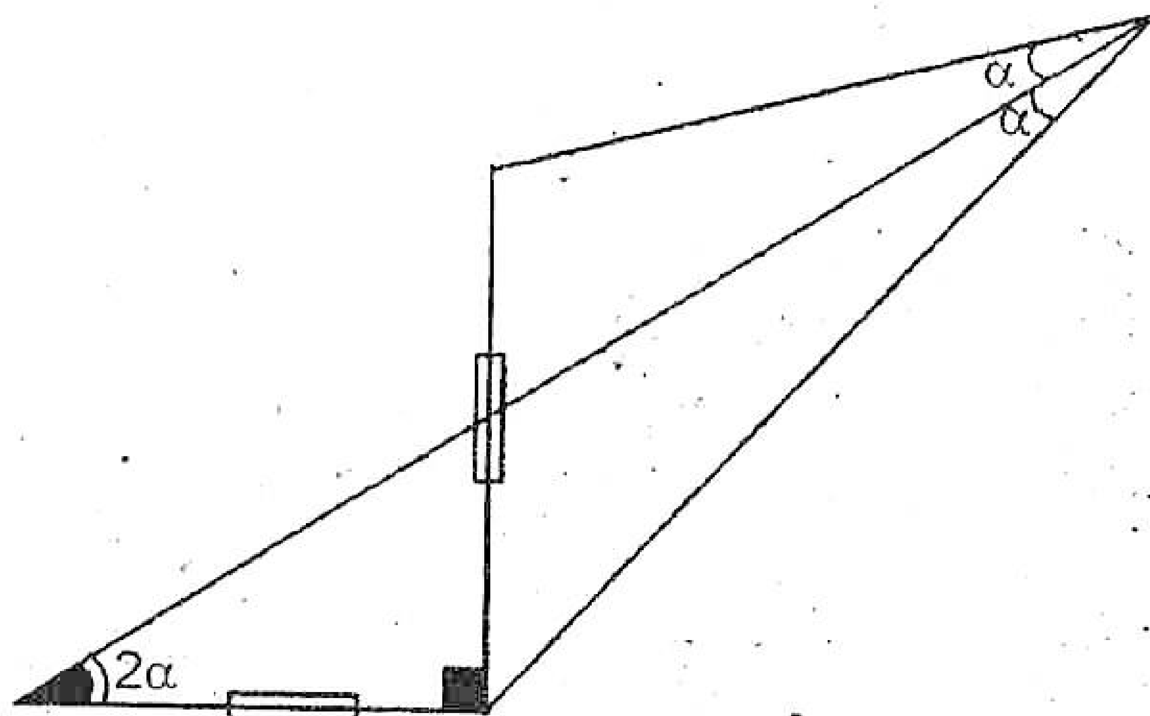


$$\Rightarrow \quad \theta + x = 30°$$

$$x = 30° - \theta$$

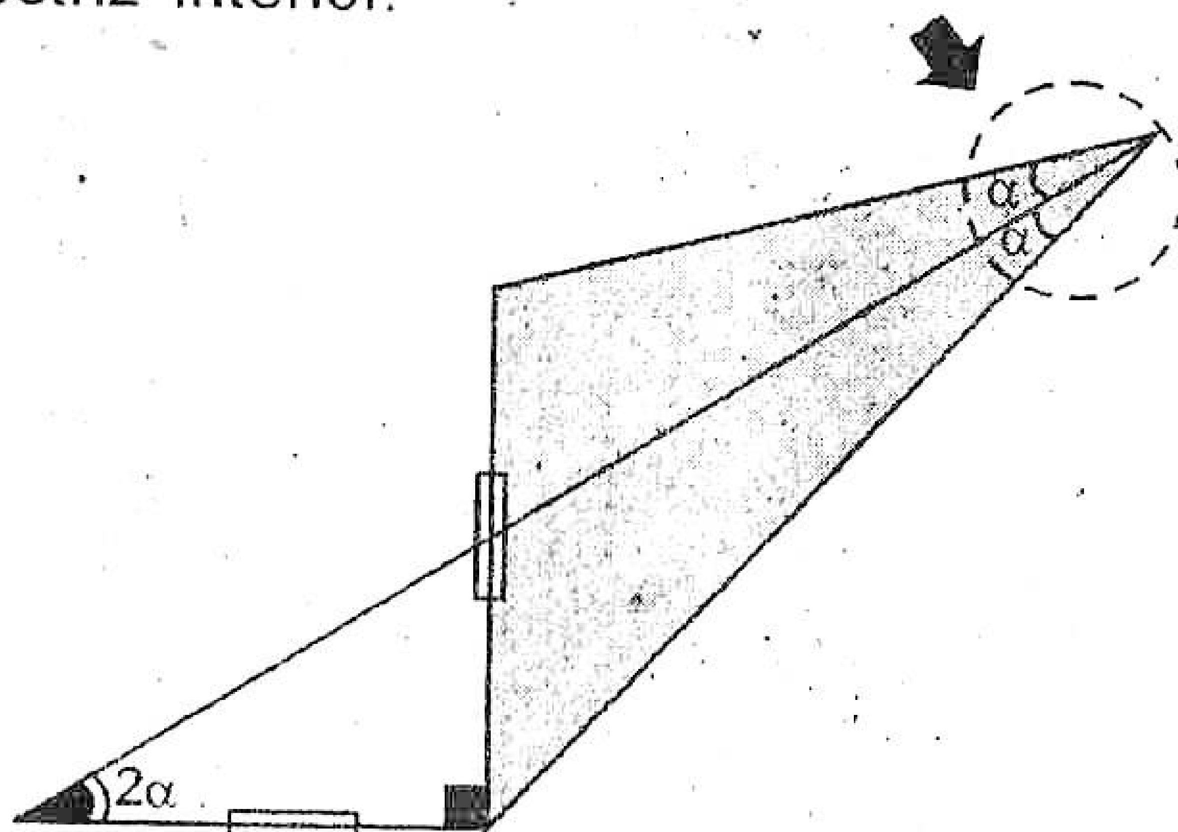
EJEMPLO Nº 2

Calcular "α"

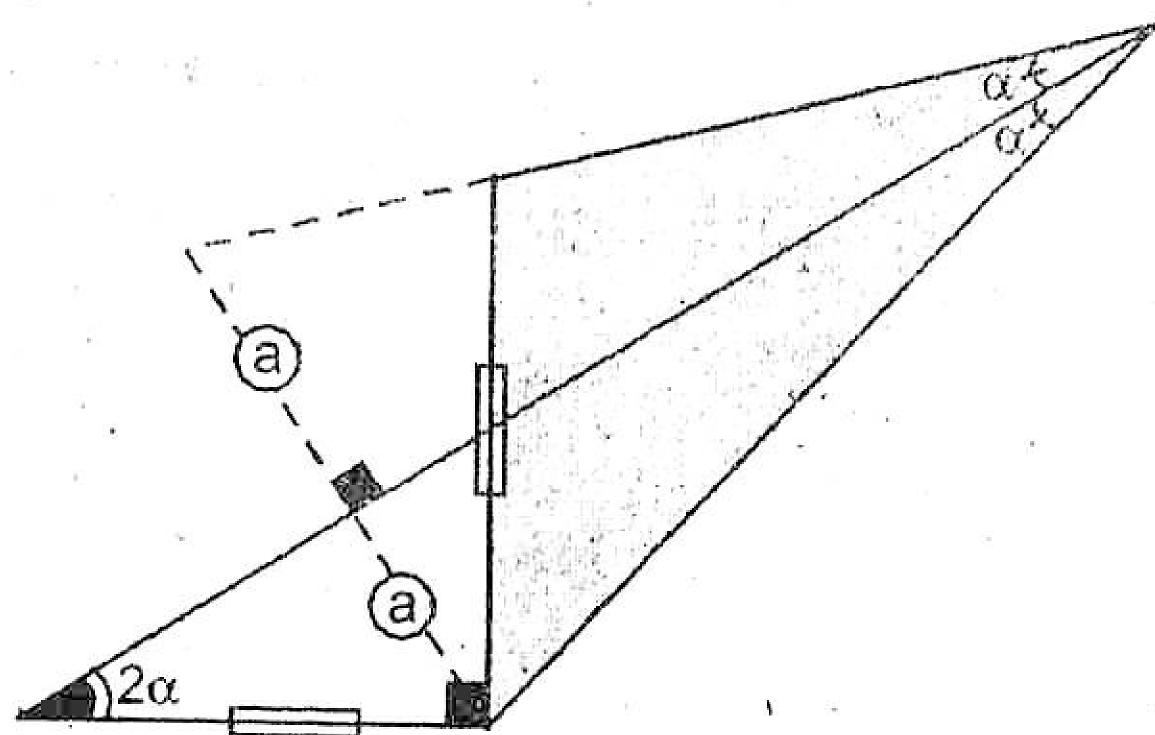


SOLUCIÓN:

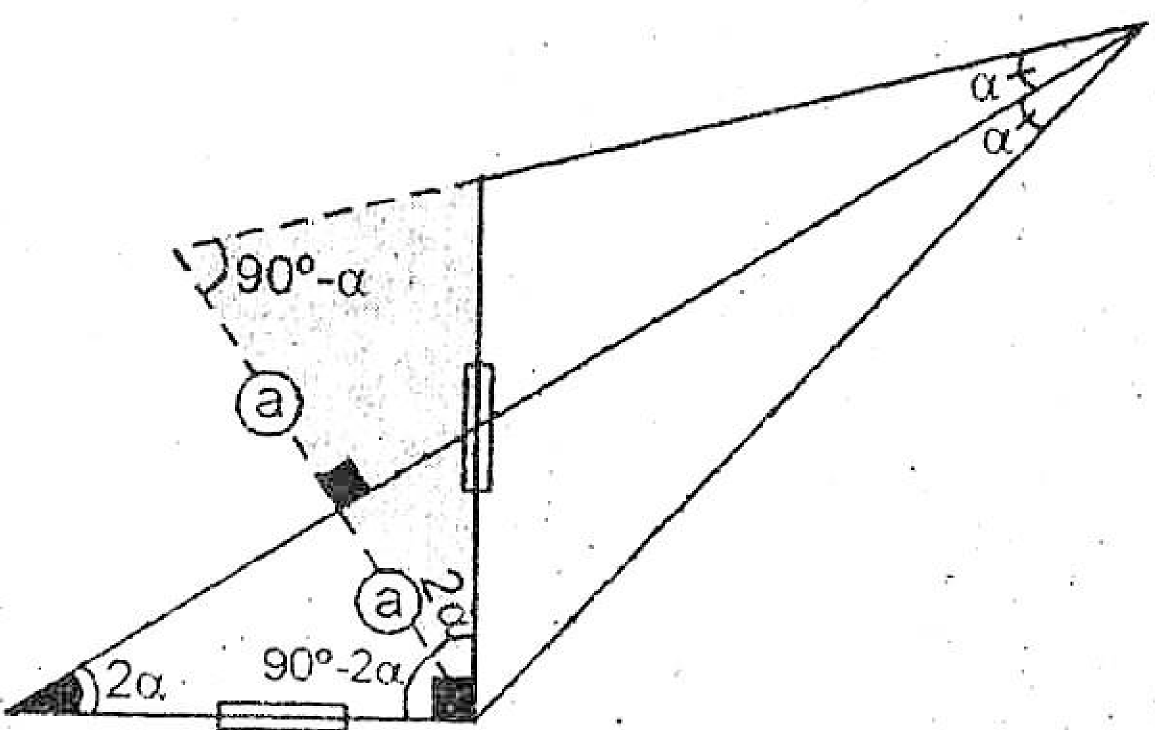
Se observa en la figura, un ángulo donde hay bisectriz interior.



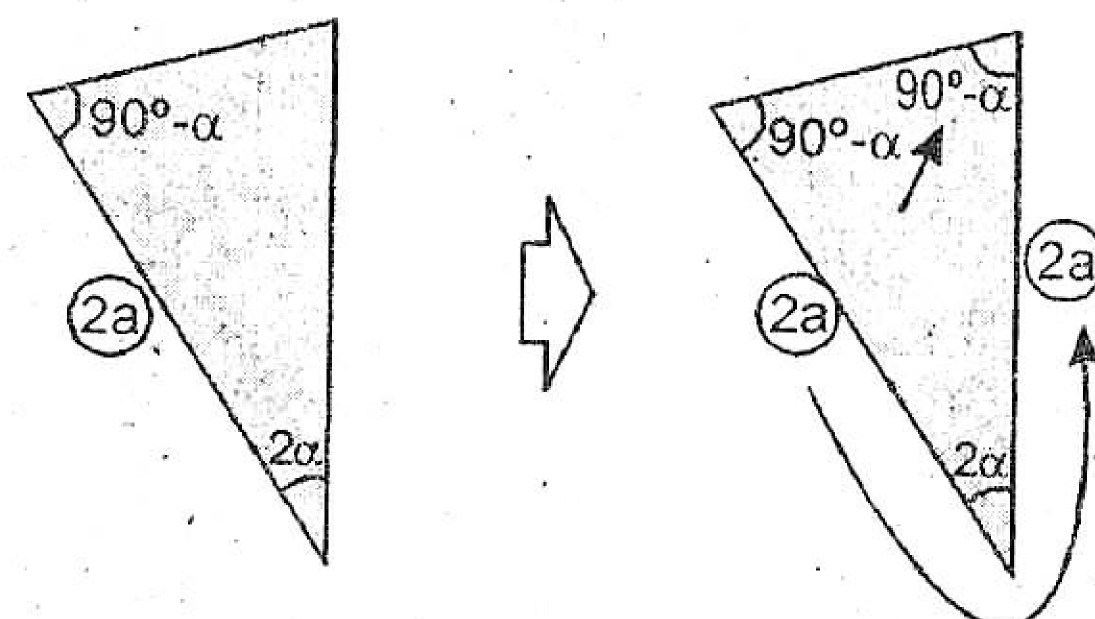
Paso Nº 1: Completamos para obtener un triángulo isósceles.

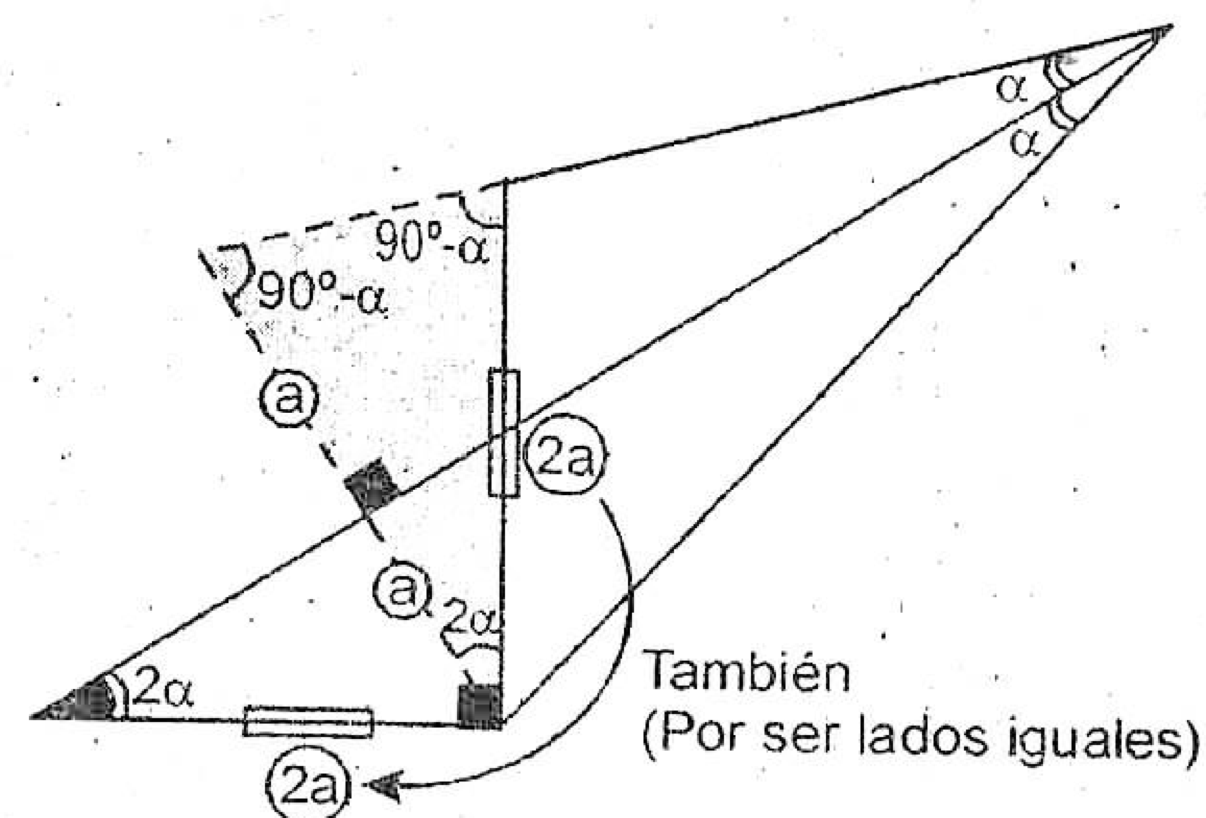


Paso Nº 2: Ahora completamos los ángulos internos del triángulo.

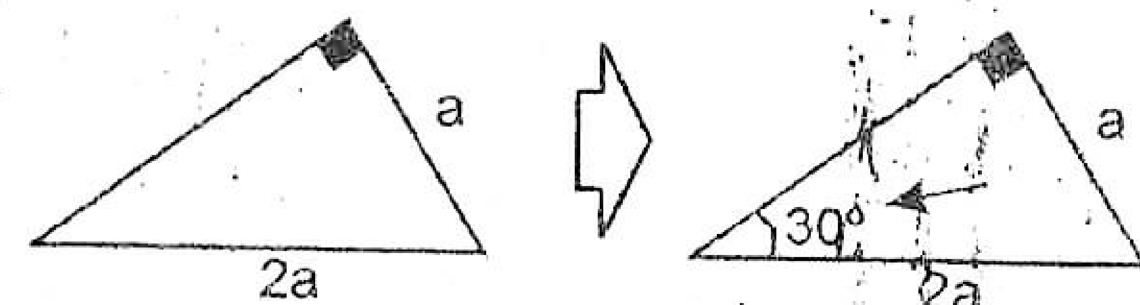


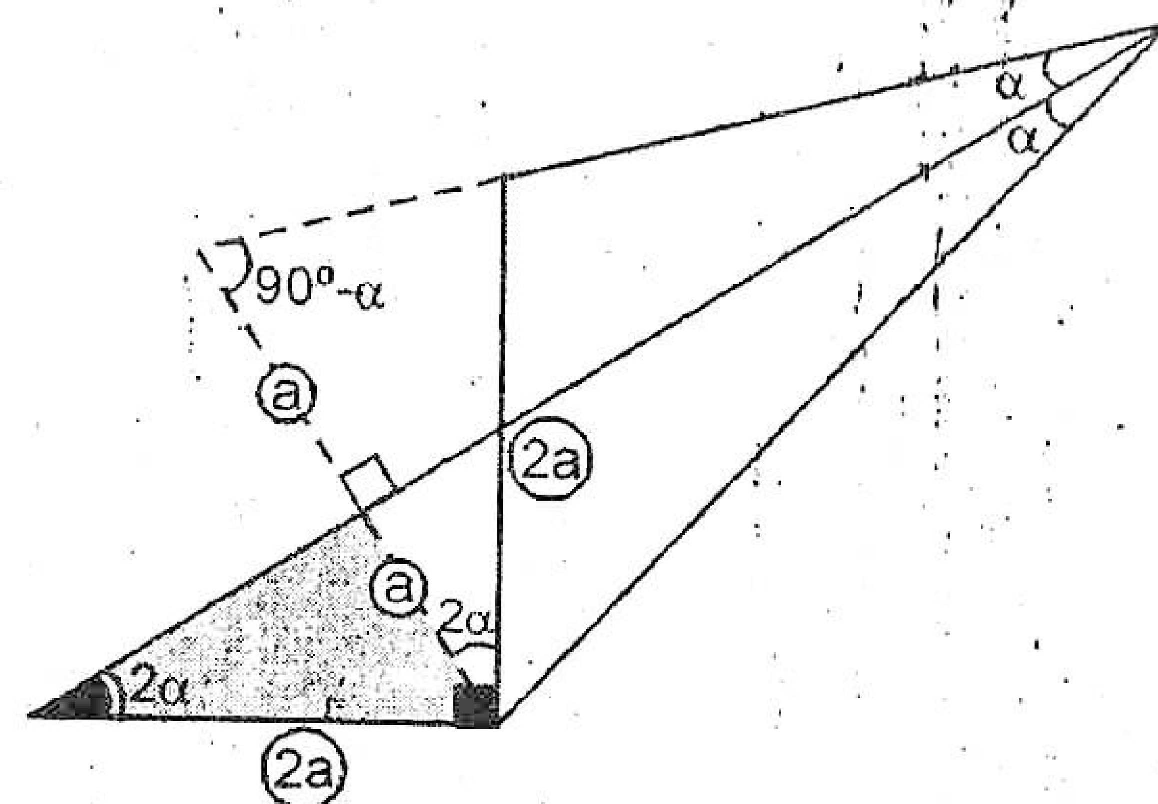
Paso Nº 3: En la nueva figura, se observa un triángulo isósceles de la siguiente forma.

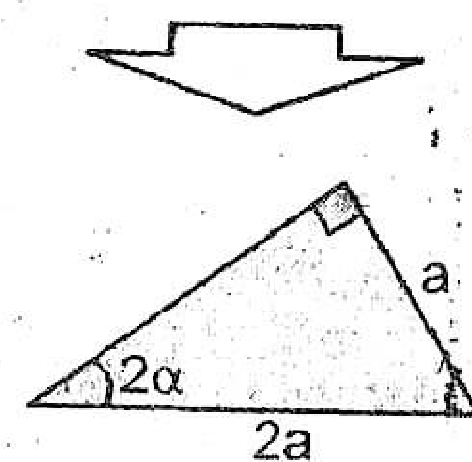




Paso Nº 4: Luego se obtiene un triángulo rectángulo notable: (30° y 60°)





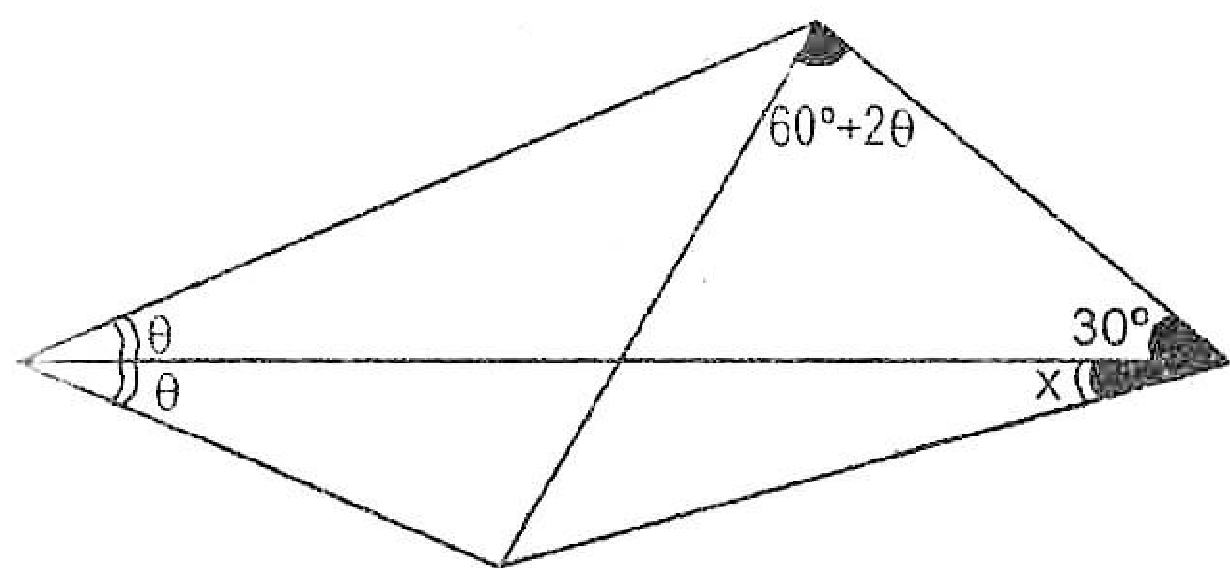


$$\Rightarrow \quad 2\alpha = 30^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ$$

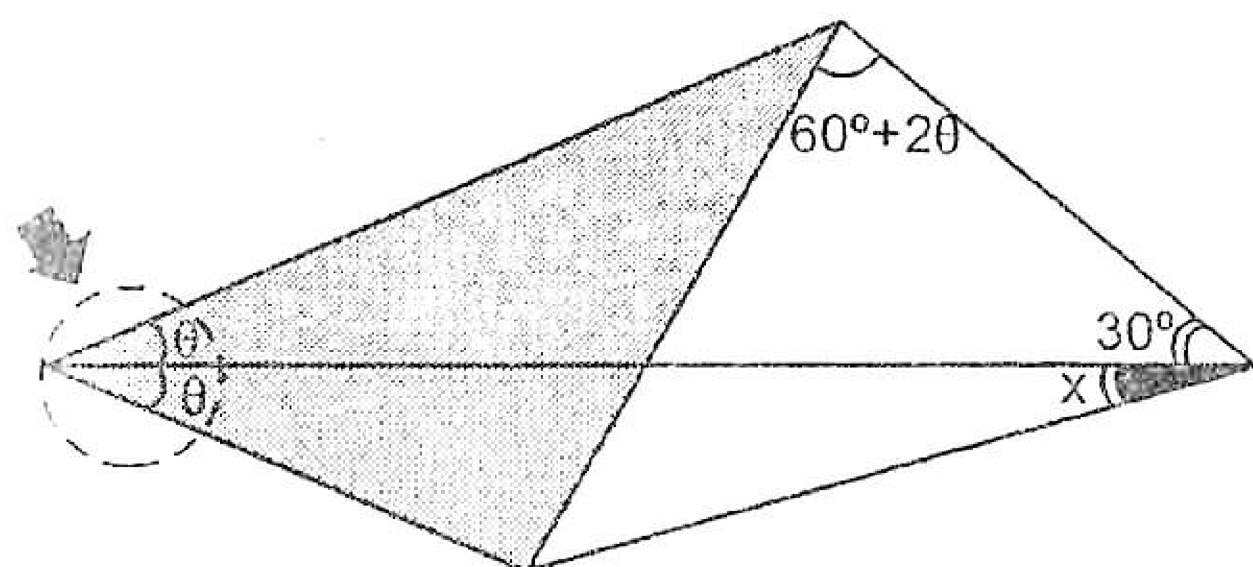
EJEMPLO Nº 3

Calcular "x"

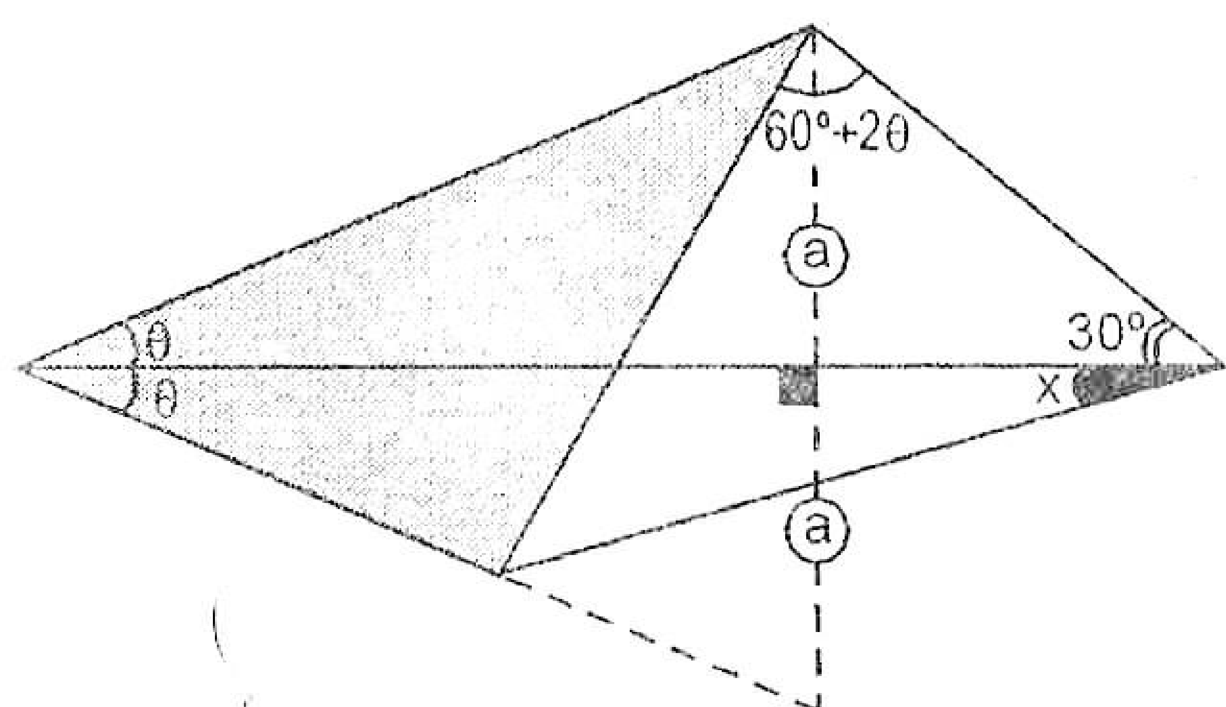


SOLUCIÓN:

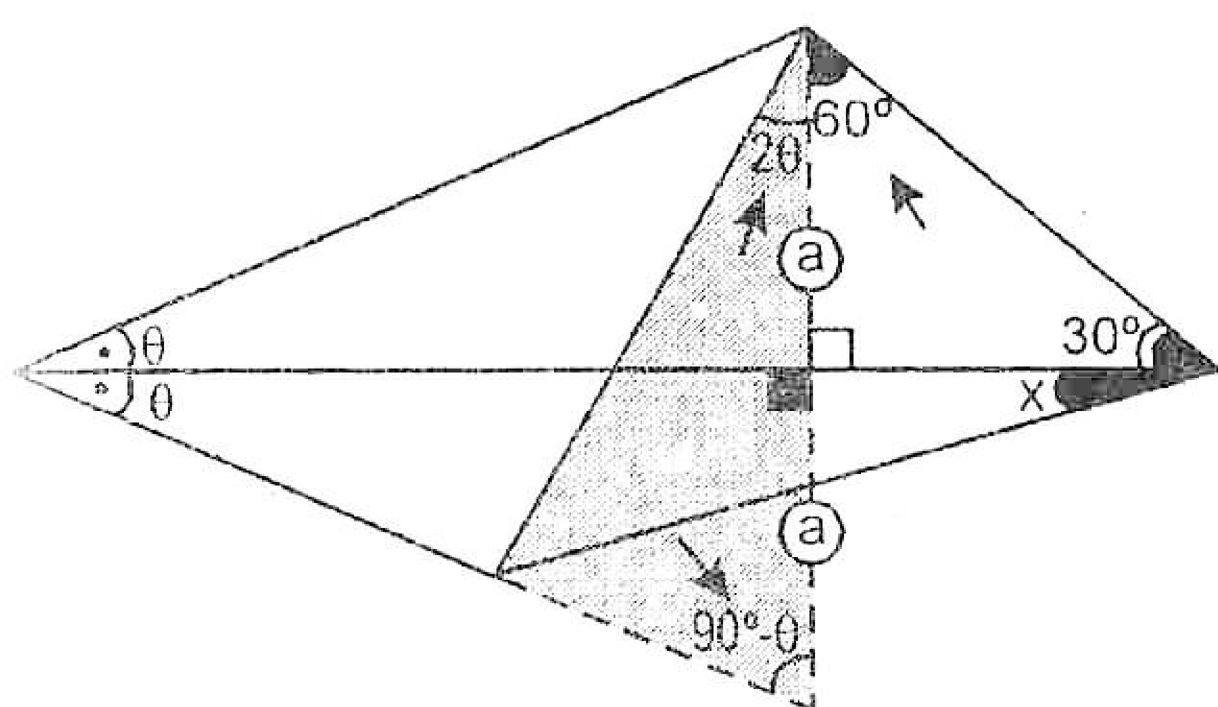
Se observa, una bisectriz interior en la figura.



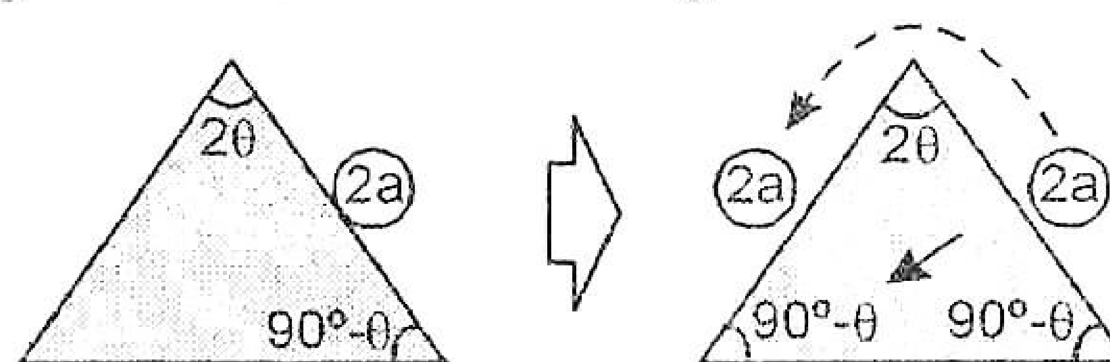
Paso Nº 1: Lo completamos para obtener un triángulo isósceles.

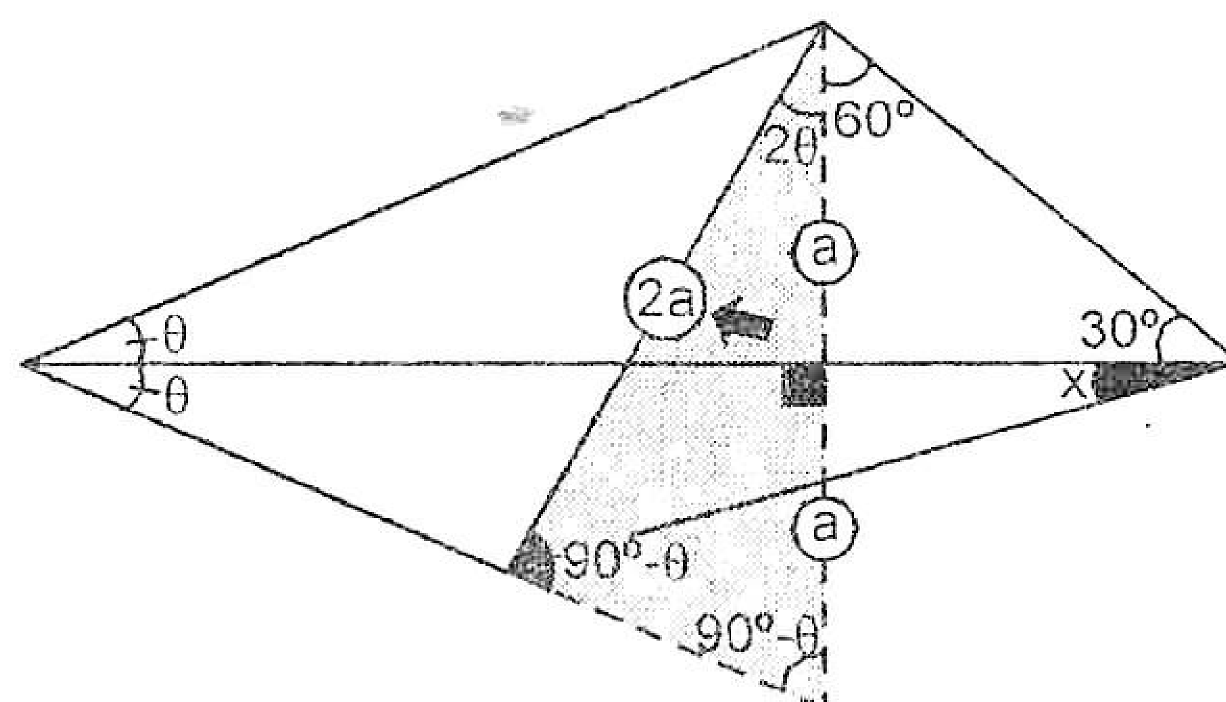


Paso Nº 2: Completamos ángulos internos en la figura.



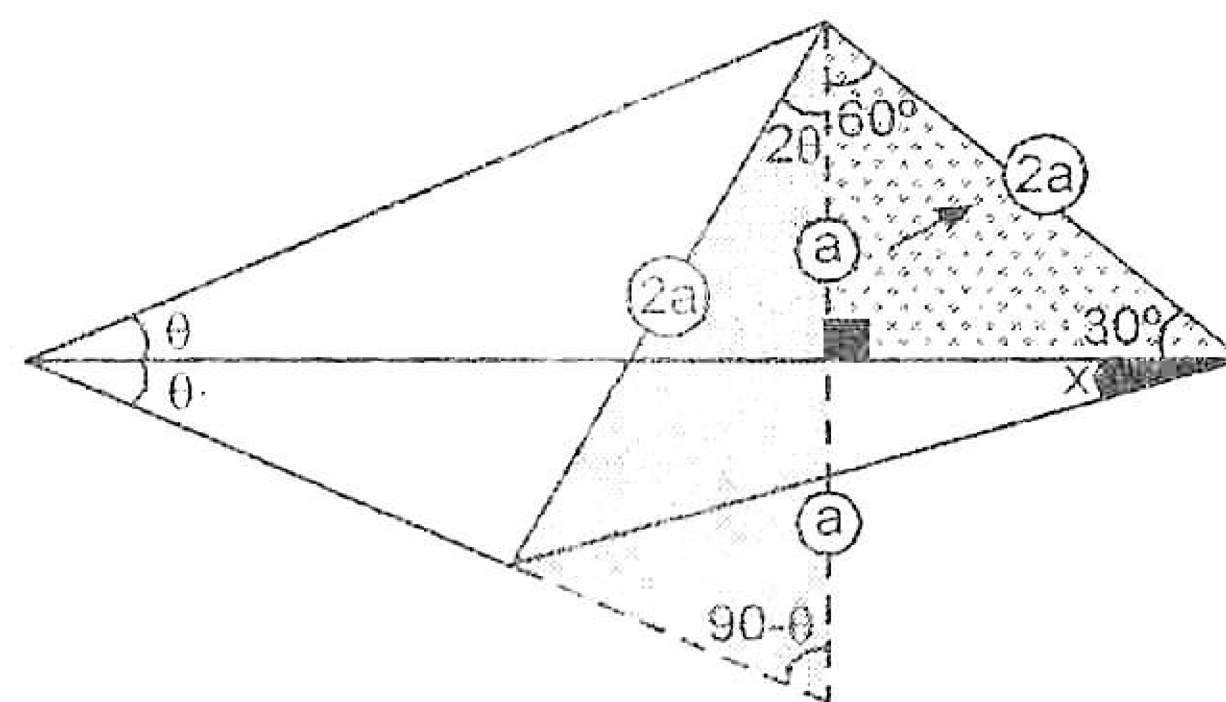
Paso Nº 3: En la nueva figura se observa, un triángulo isósceles de la siguiente forma:



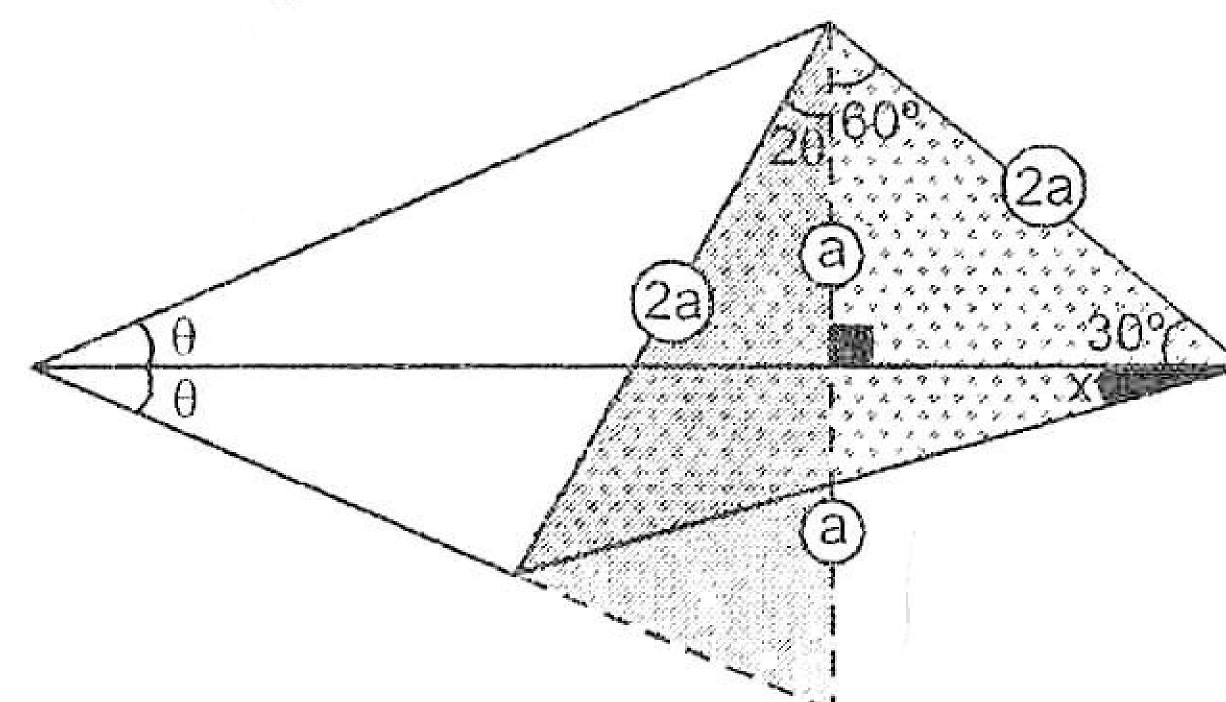


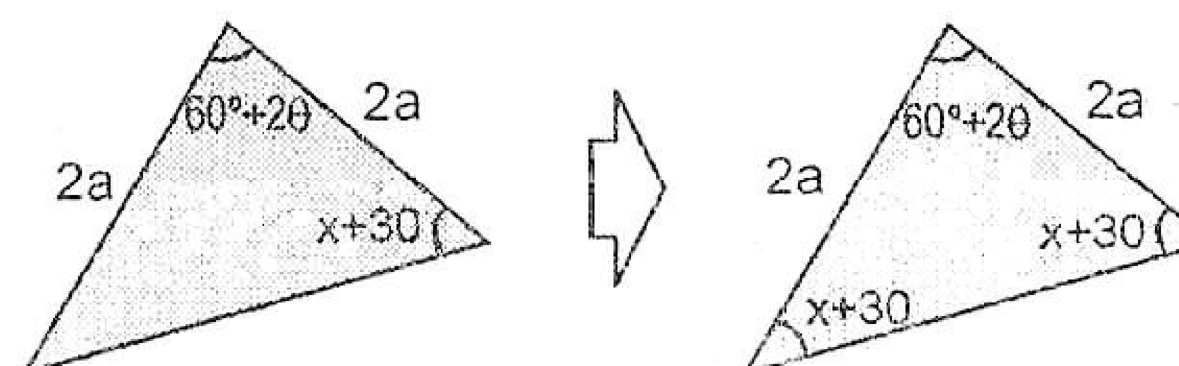
Paso Nº 4: Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable (30° y 60°)





Paso Nº 5: También se observa en la figura, un nuevo triángulo isósceles.





$\therefore\ 60^\circ + 2\theta + x + 30^\circ + x + 30^\circ = 180^\circ$

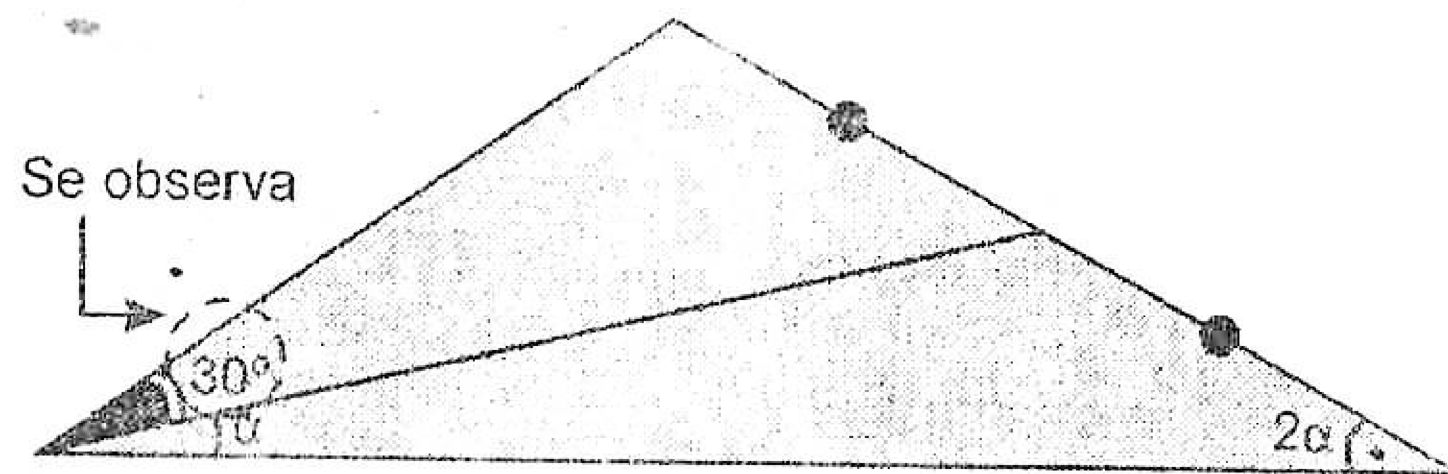
$2\theta + 2x = 60^\circ$

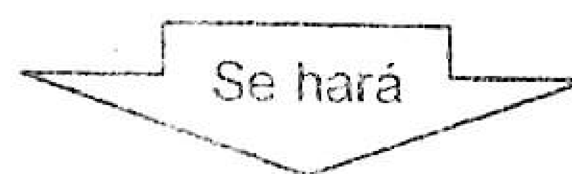
$x = 30^\circ - \theta$

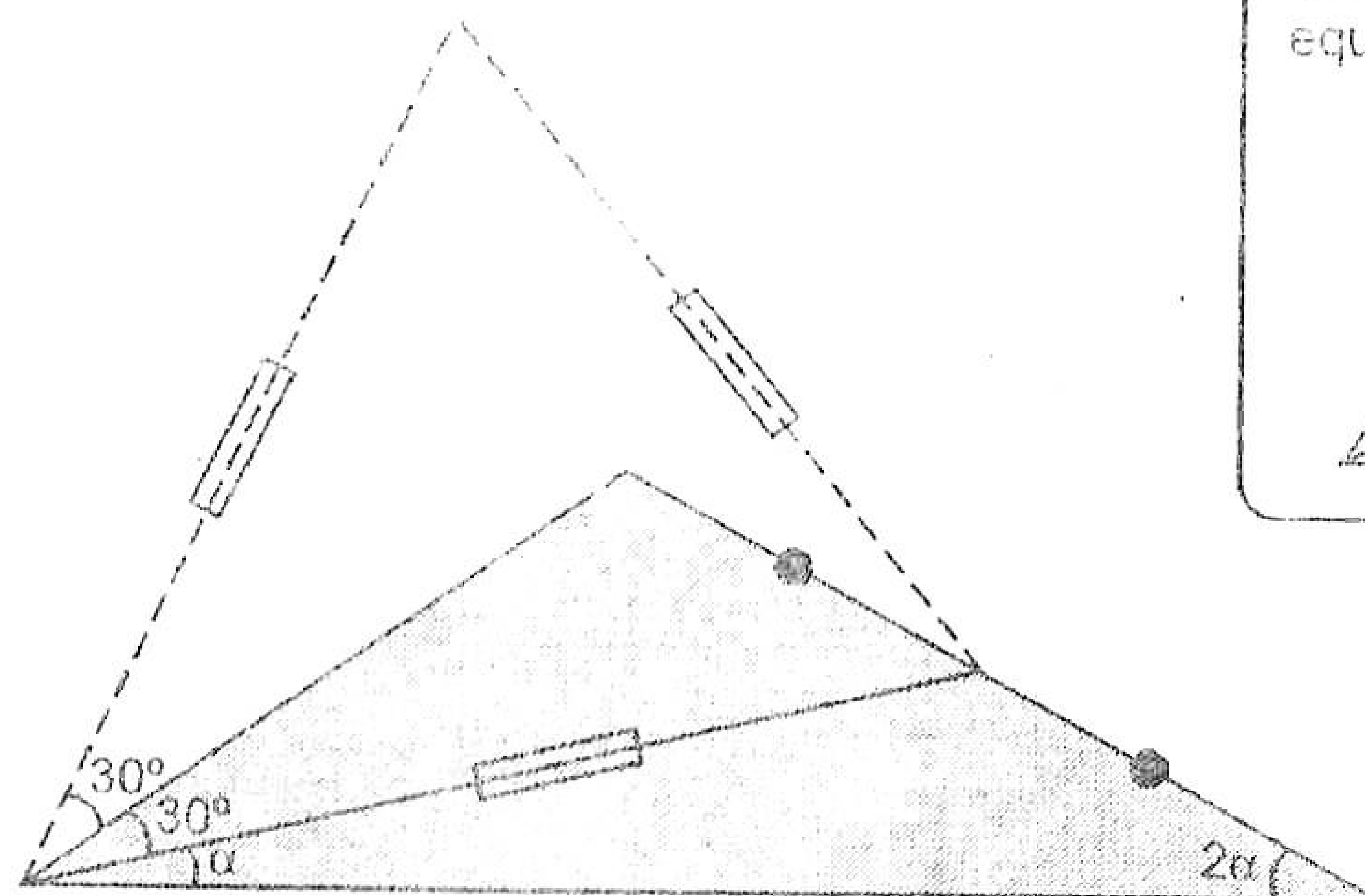
3er Criterio

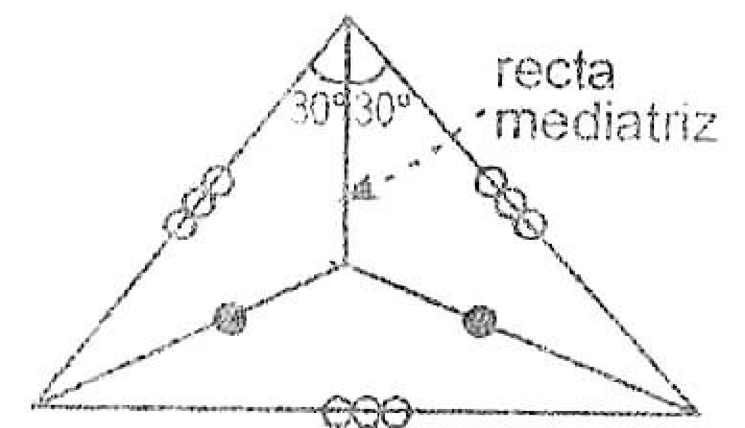
"COMPLETANDO UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO"

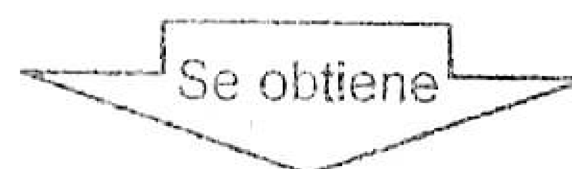
Cuando se observa en un triángulo un ángulo de 30° y como éste valor es la mitad de 60°, se buscará formar externamente un triángulo equilátero, de la siguiente manera.

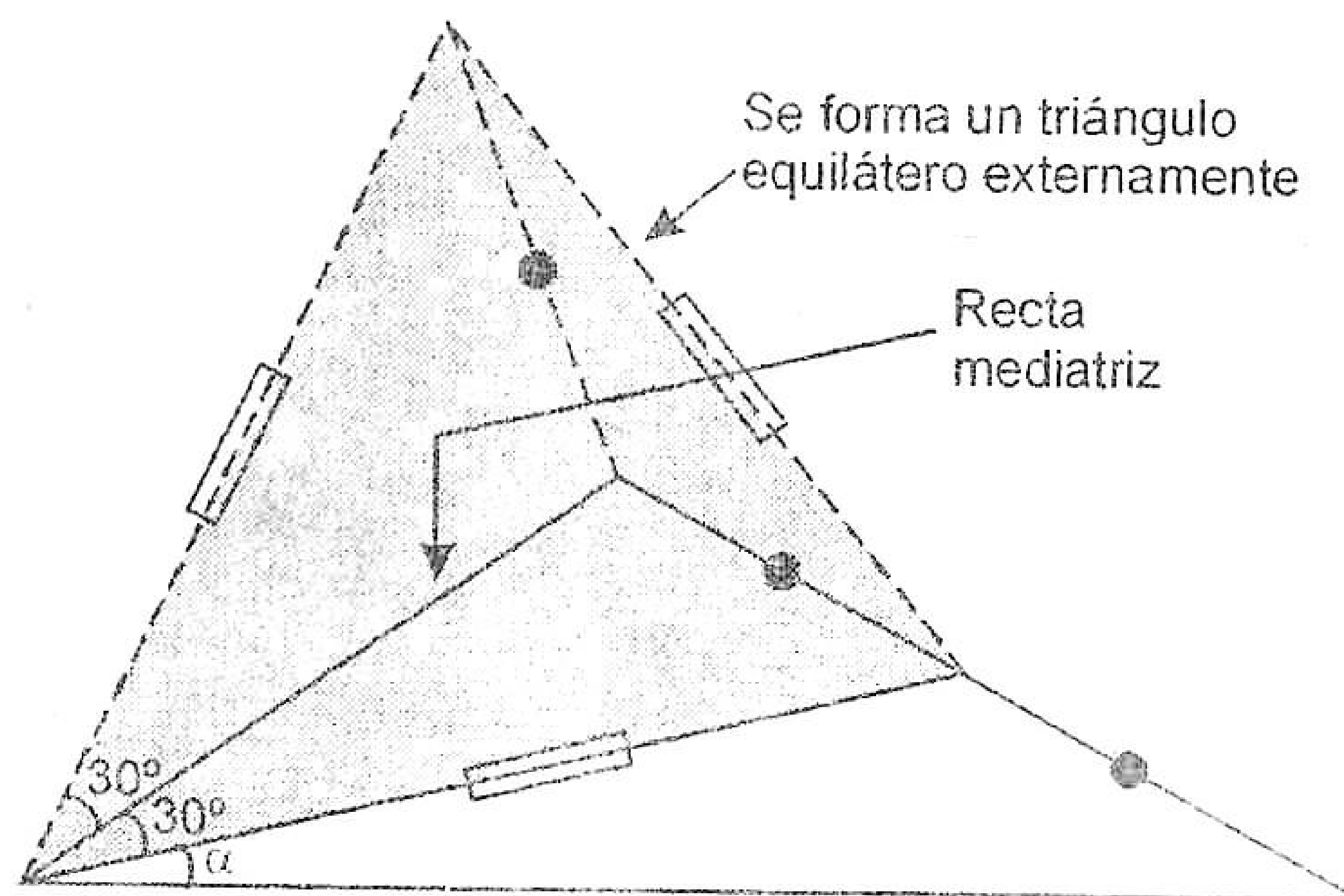






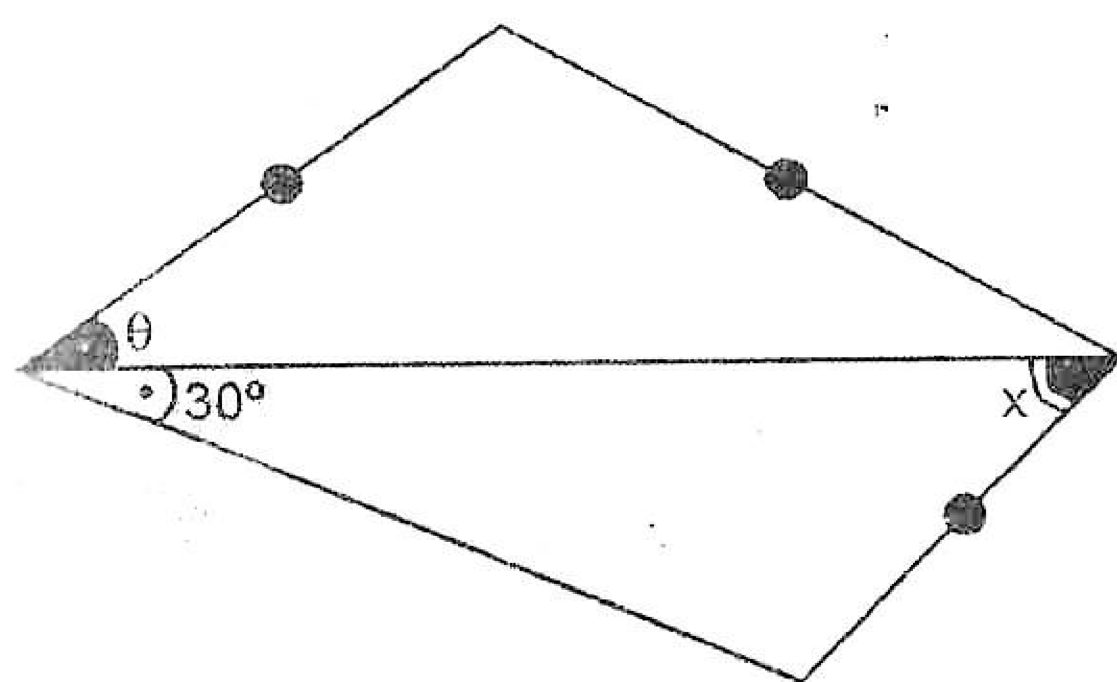






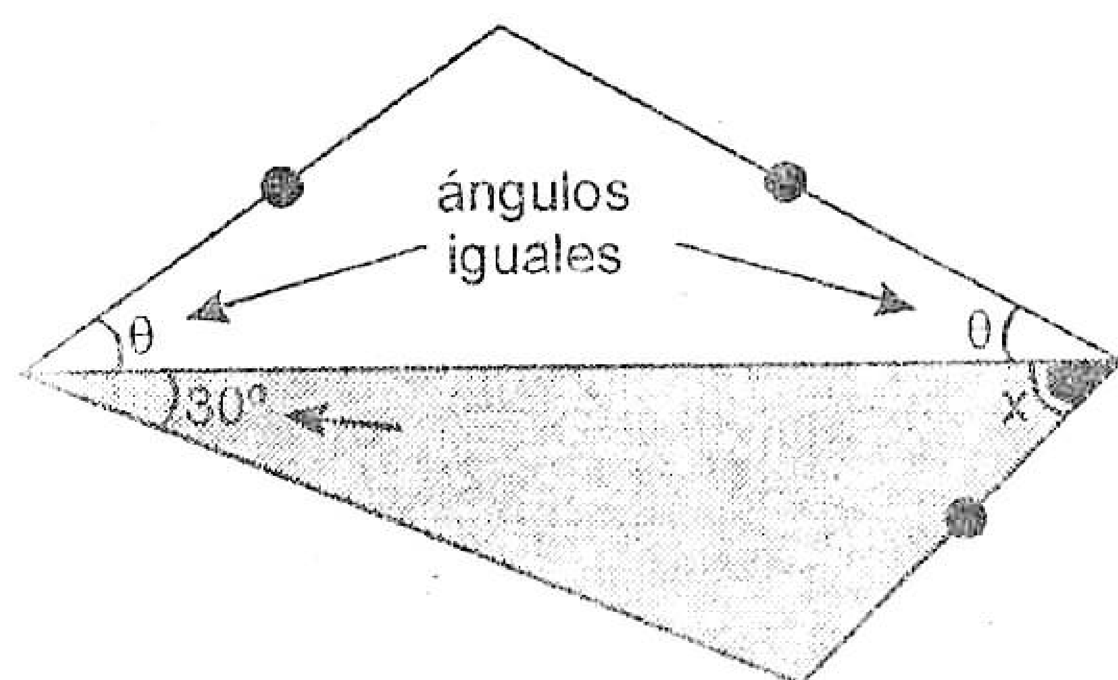
EJEMPLO Nº 1

Calcular "x"

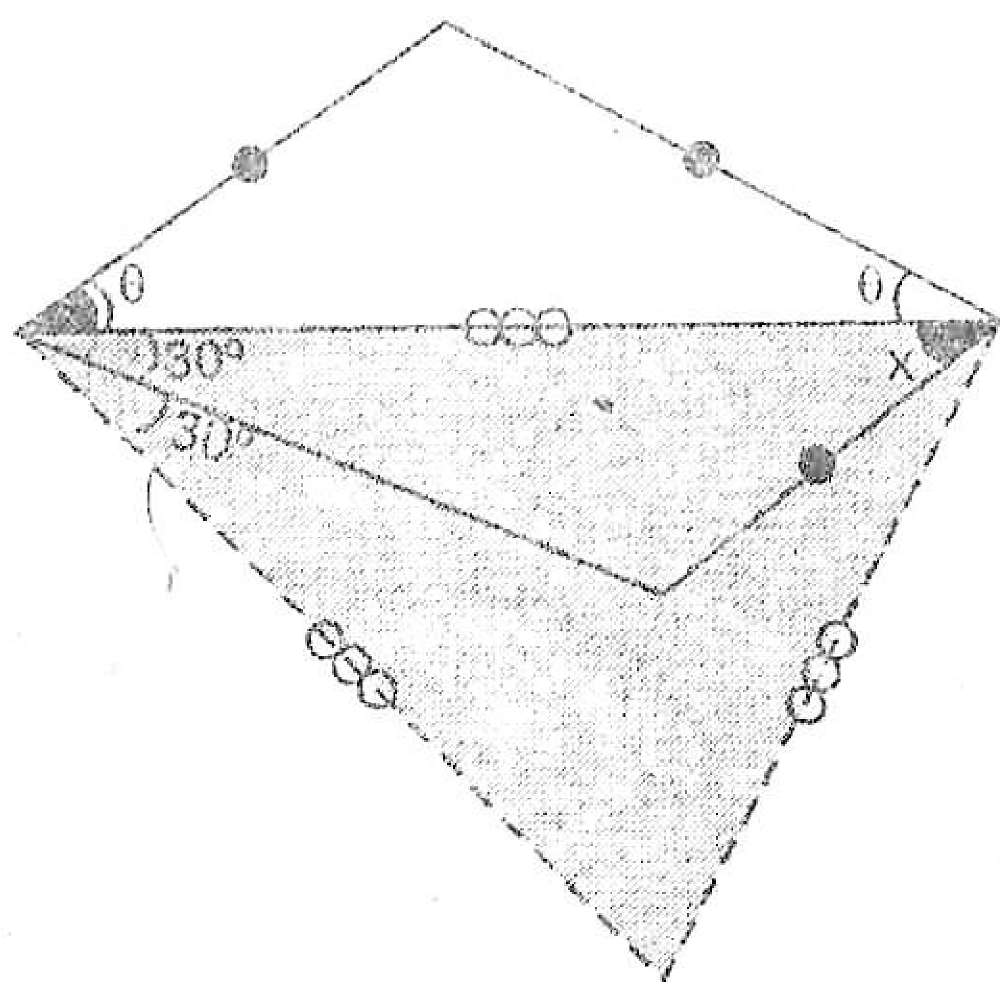


SOLUCIÓN:

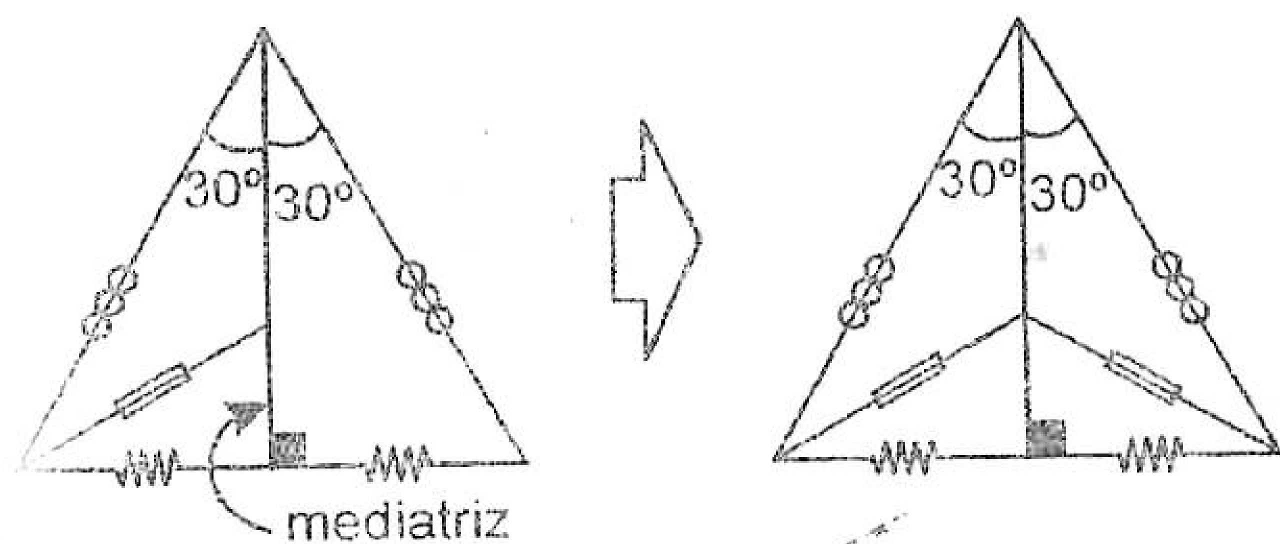
Se observa en la figura, un ángulo de 30°

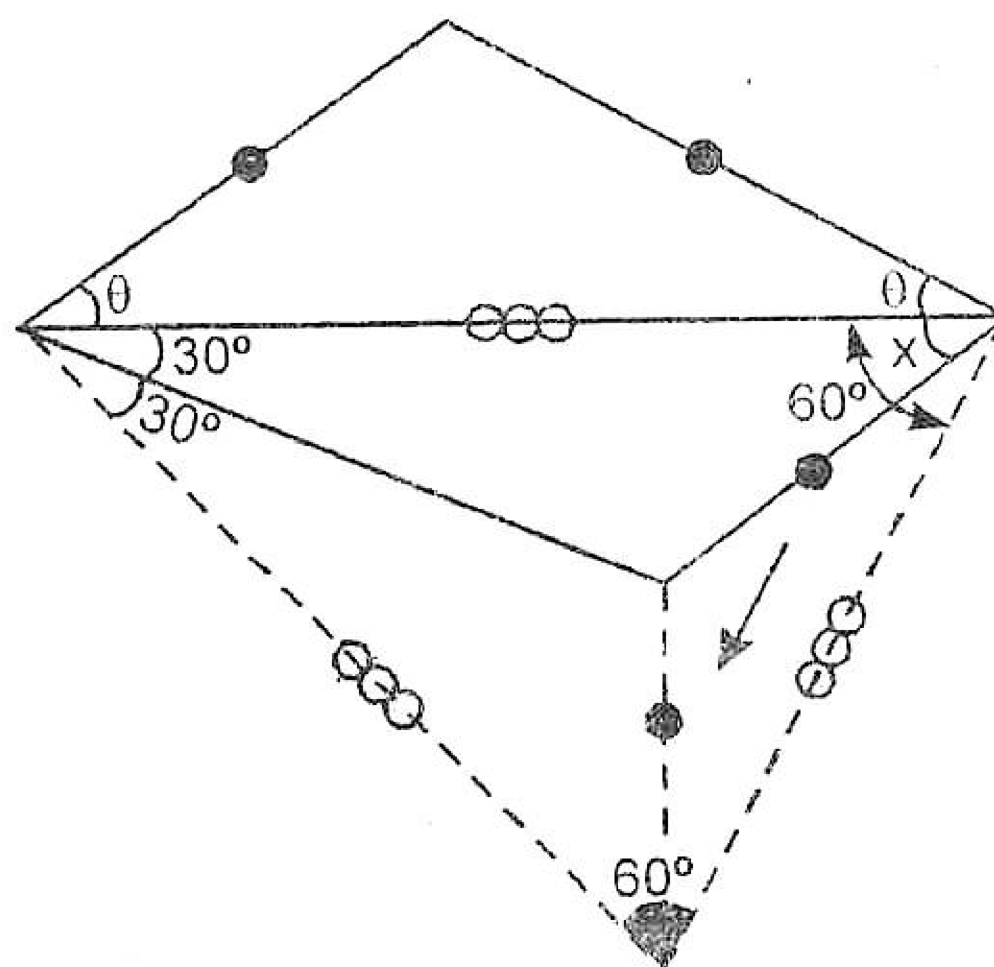


Paso Nº 1: Según el criterio Nº 3: formamos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera.

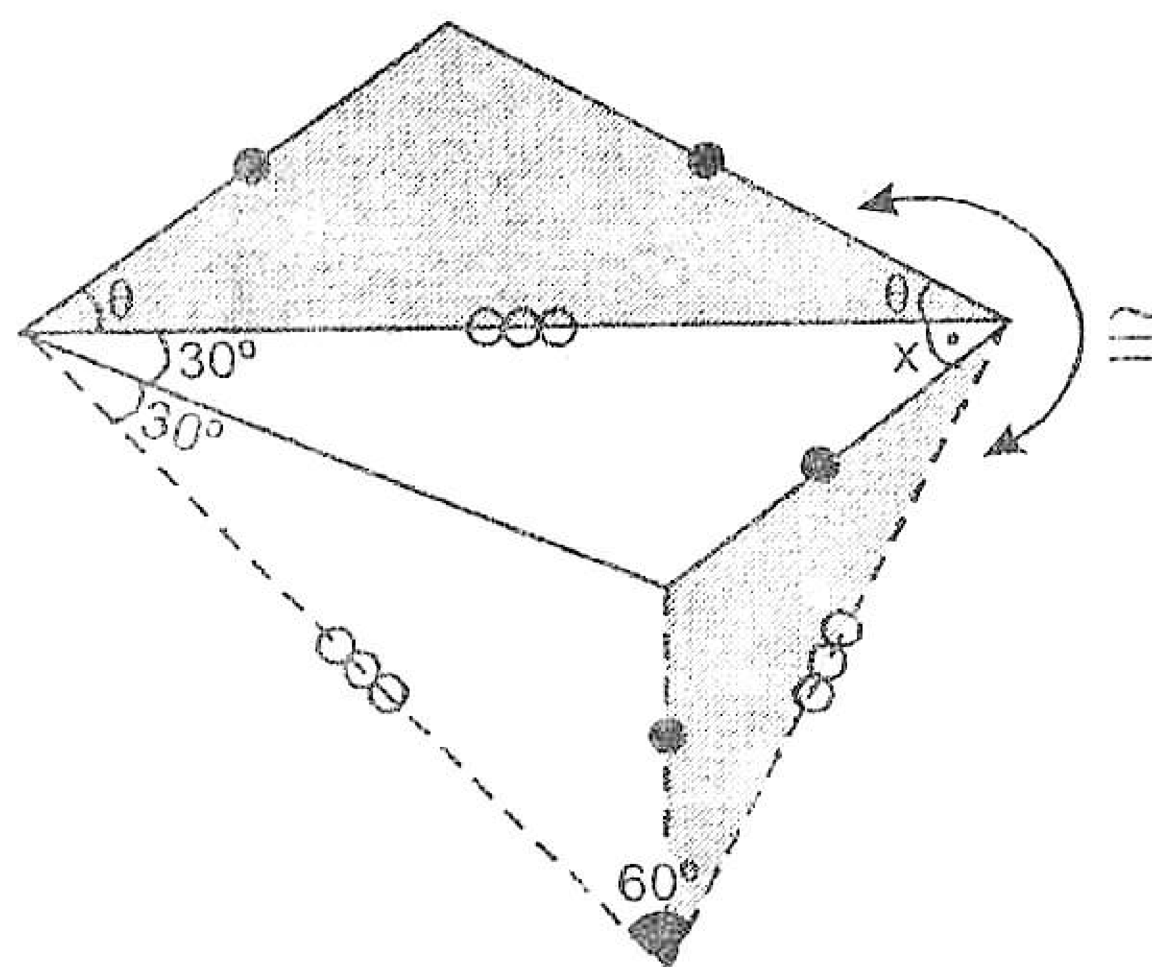


Paso Nº 2: Sabemos que en todo triángulo equilátero, se cumple:

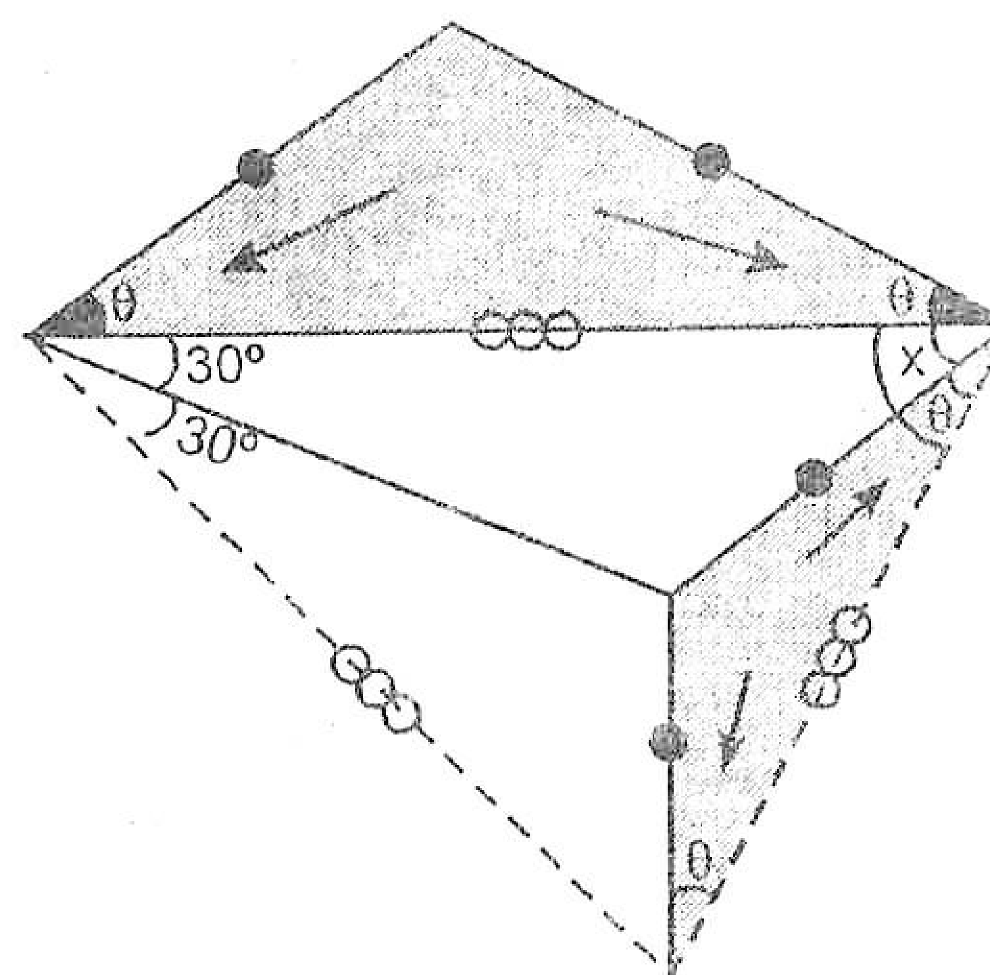




Paso Nº 3: Se observa que se obtiene dos triángulos congruentes, caso (lado-lado-lado)



Entonces se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



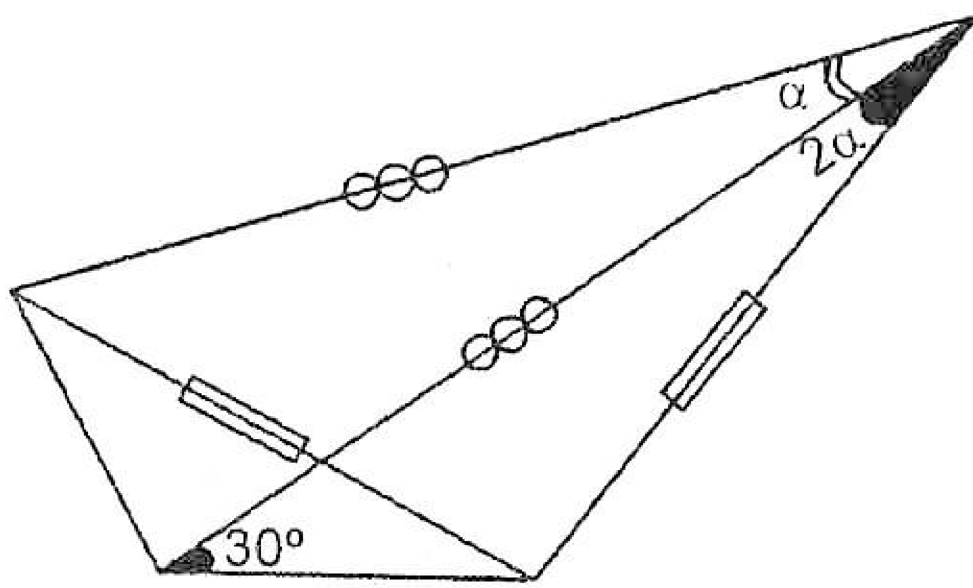
De la figura se tiene que:

$$\therefore\ x + \theta = 60°$$

$$\Rightarrow\ x = 60° - \theta$$

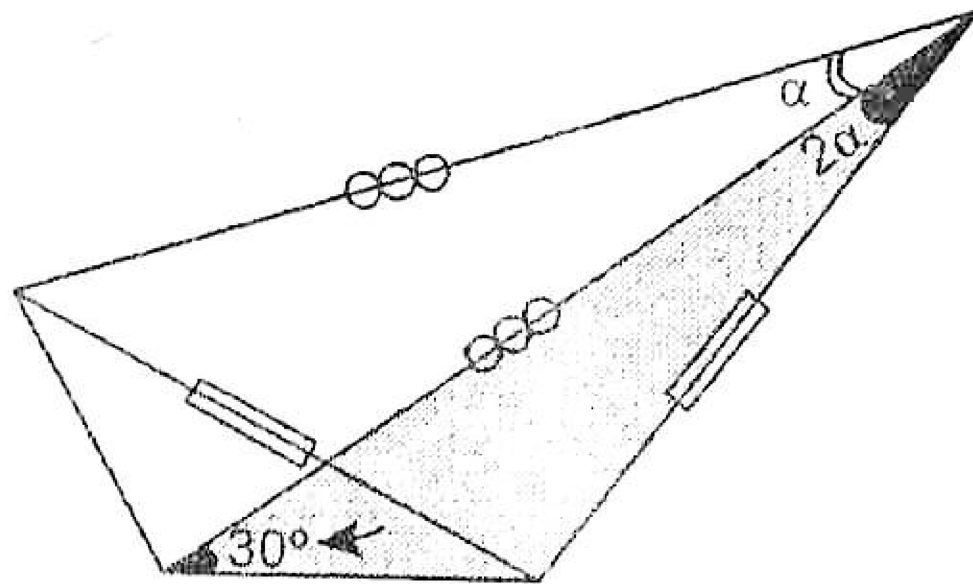
EJEMPLO Nº 2

Calcular " α "

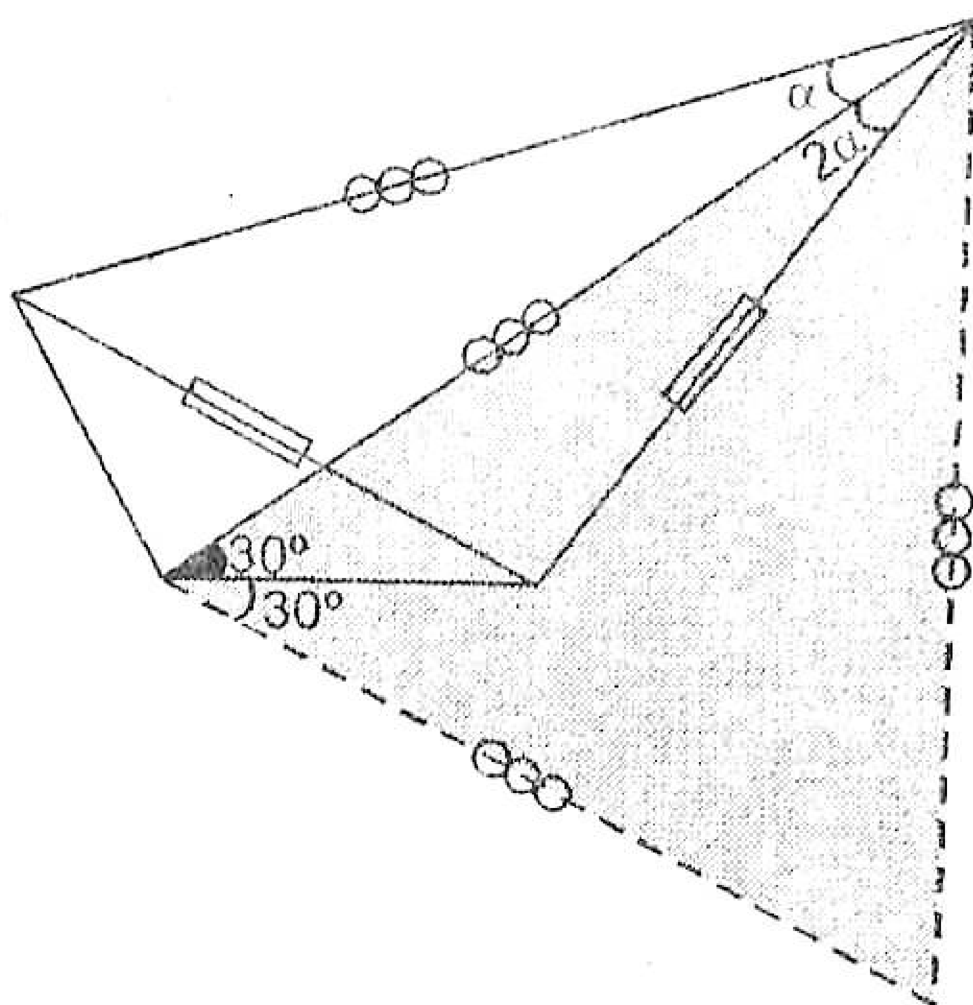


SOLUCIÓN:

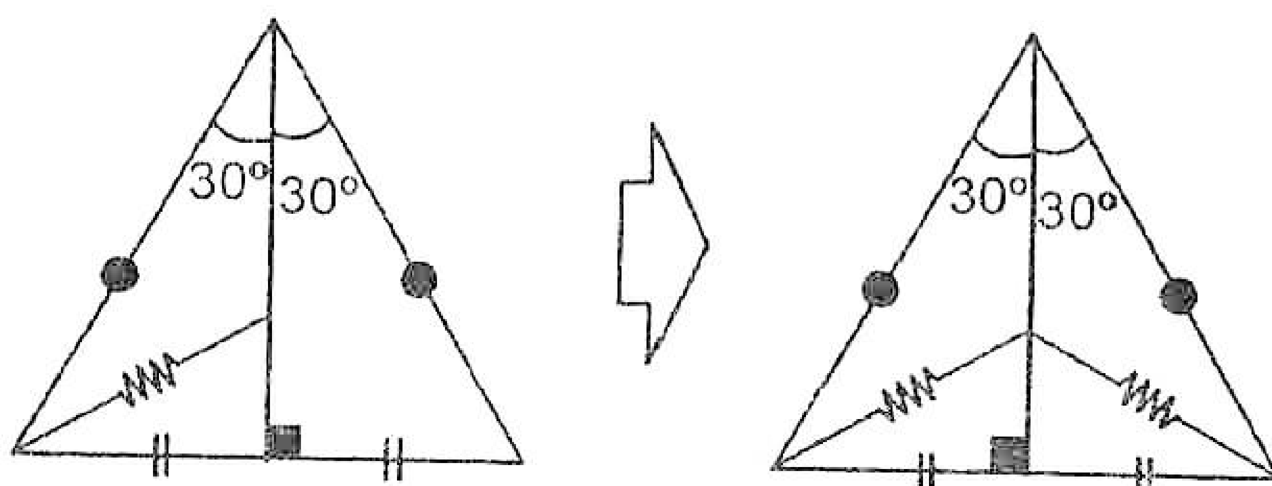
Se tiene en la figura, un ángulo de 30º

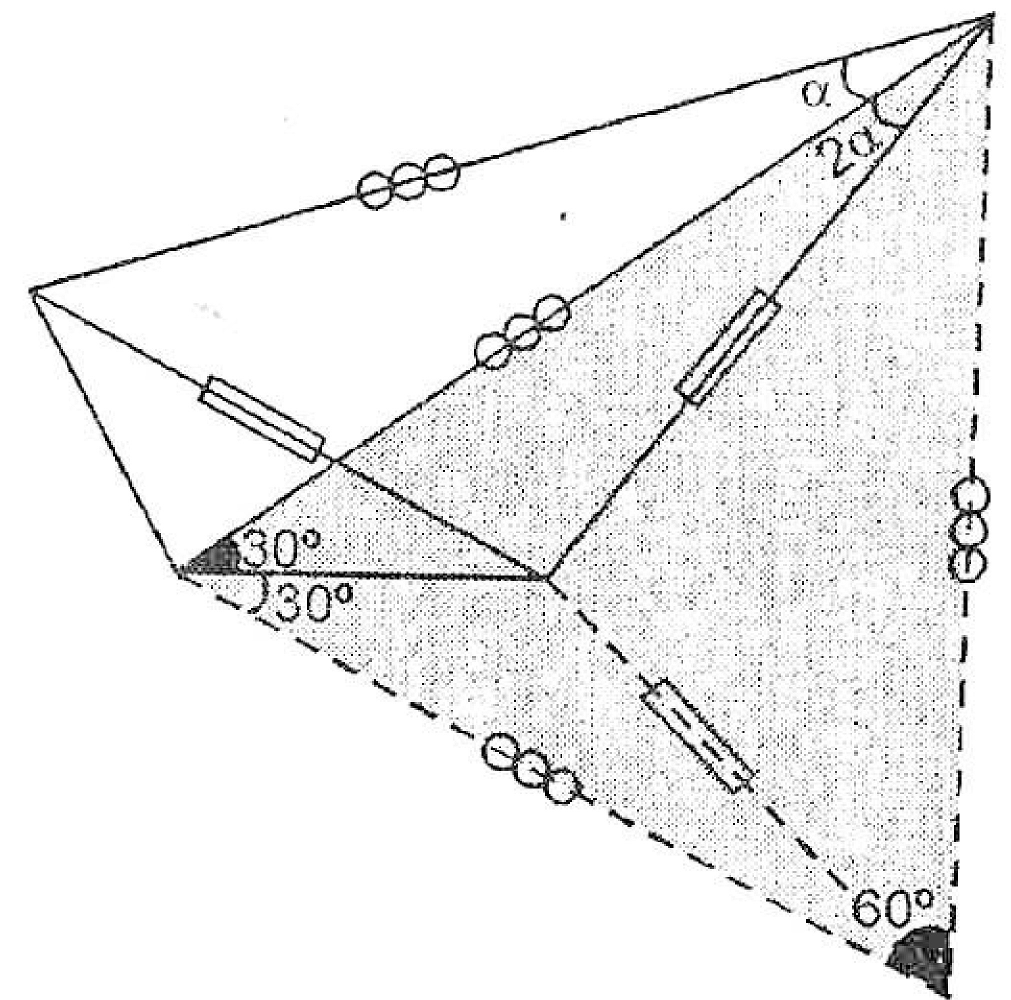


Paso Nº 1: Entonces formamos un triángulo equilátero exteriormente de la siguiente manera.

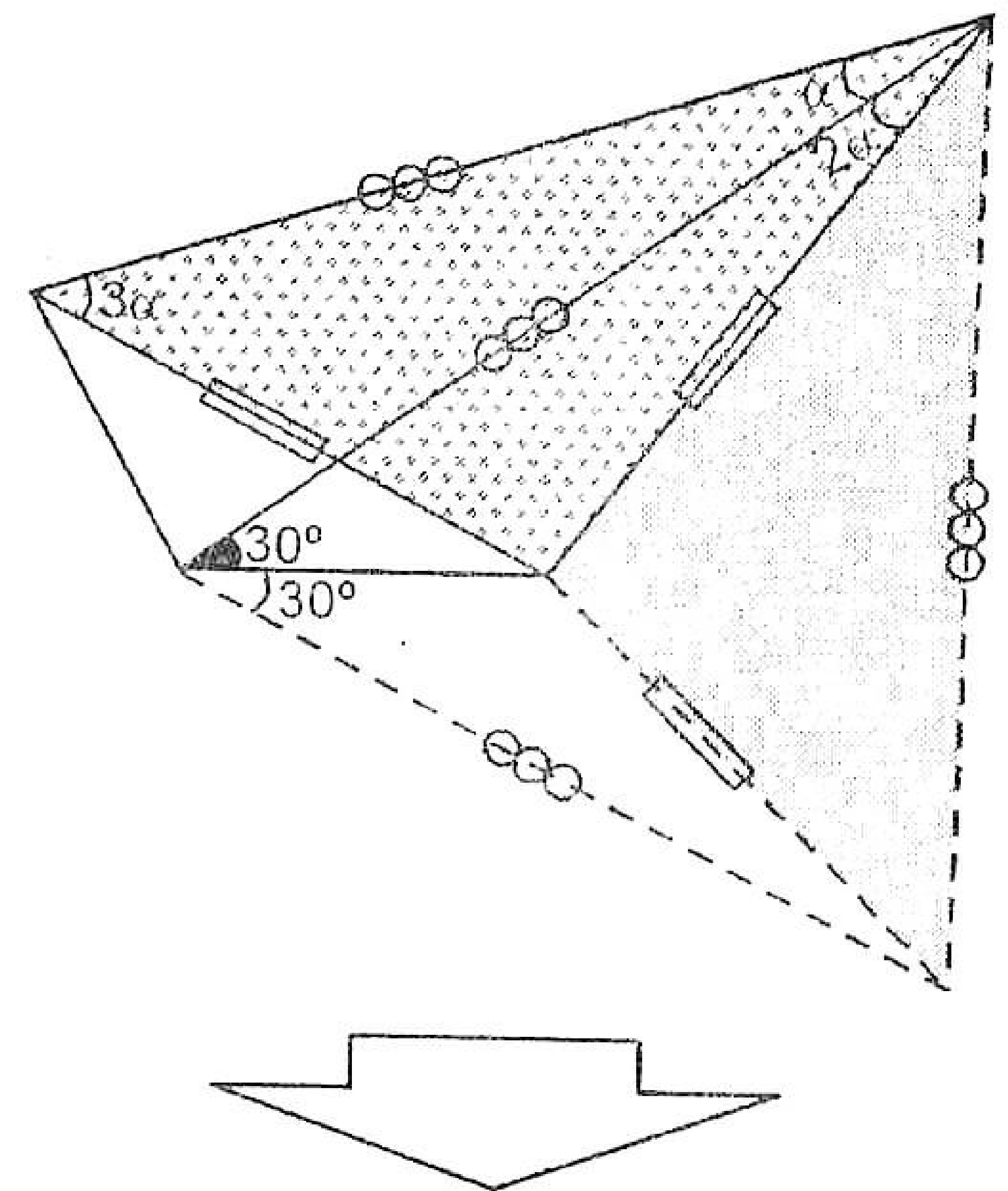


Paso Nº 2: Se sabe que en todo triángulo equilátero se cumple.



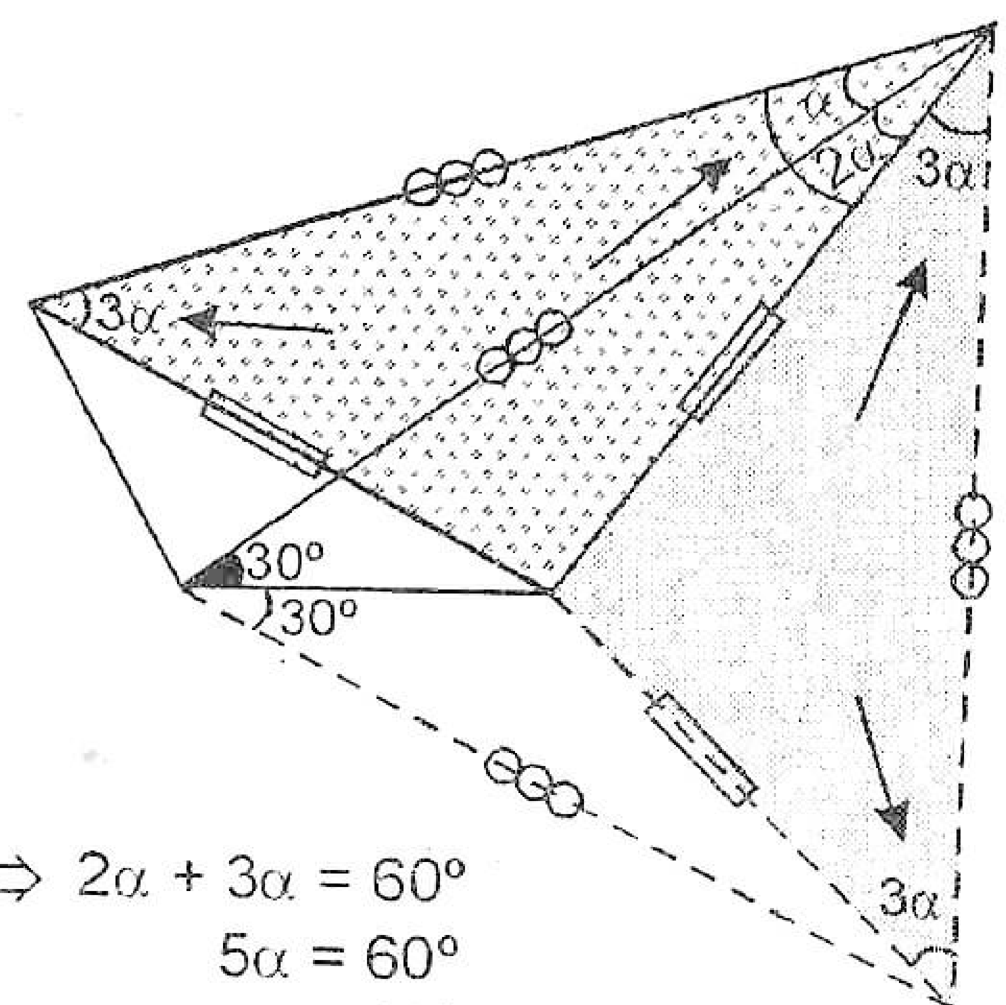


Paso Nº 3: Se observa en la figura que se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.L.L)



Aqui se cumple:

"A lados iguales se oponen angulos iguales"

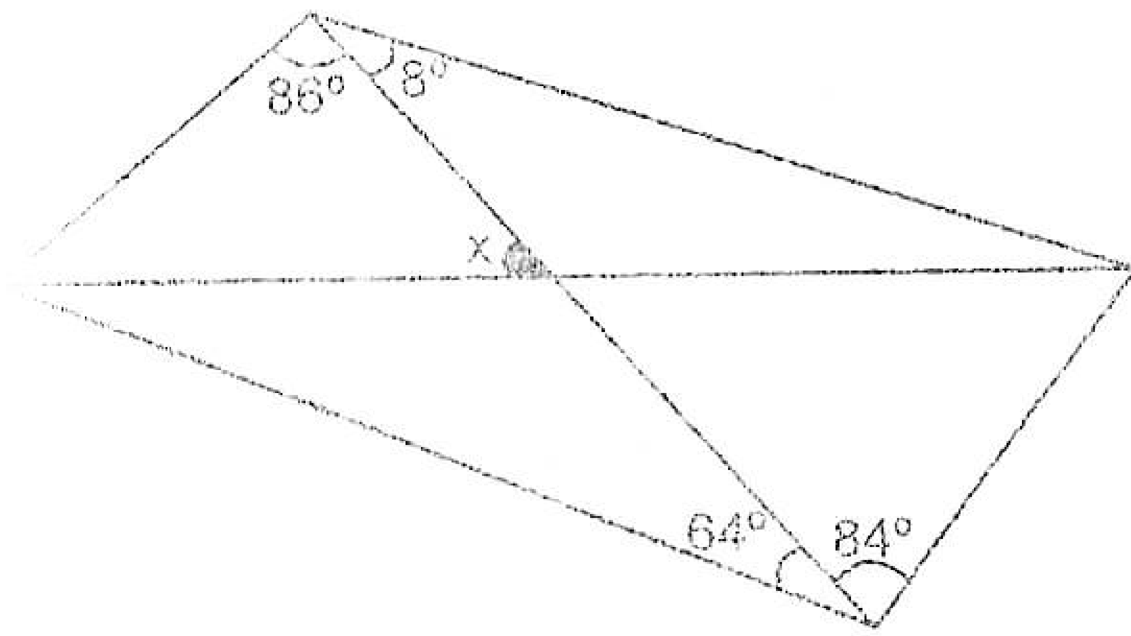


$\Rightarrow 2\alpha + 3\alpha = 60^\circ$

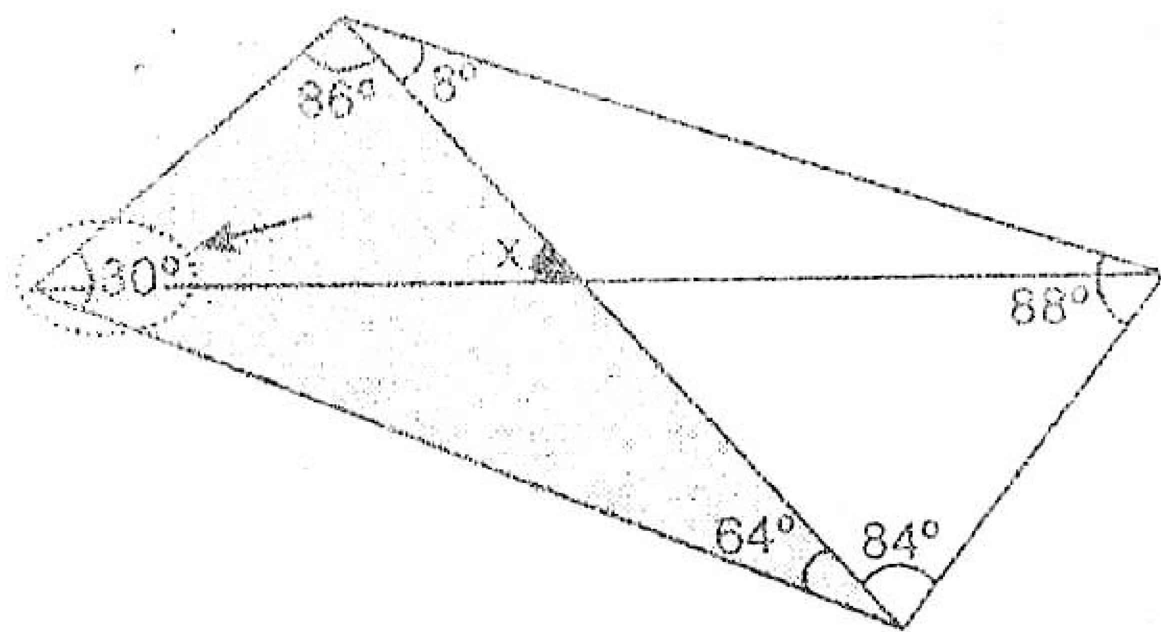
$5\alpha = 60^\circ$

$\alpha = \mathbf{12^\circ}$

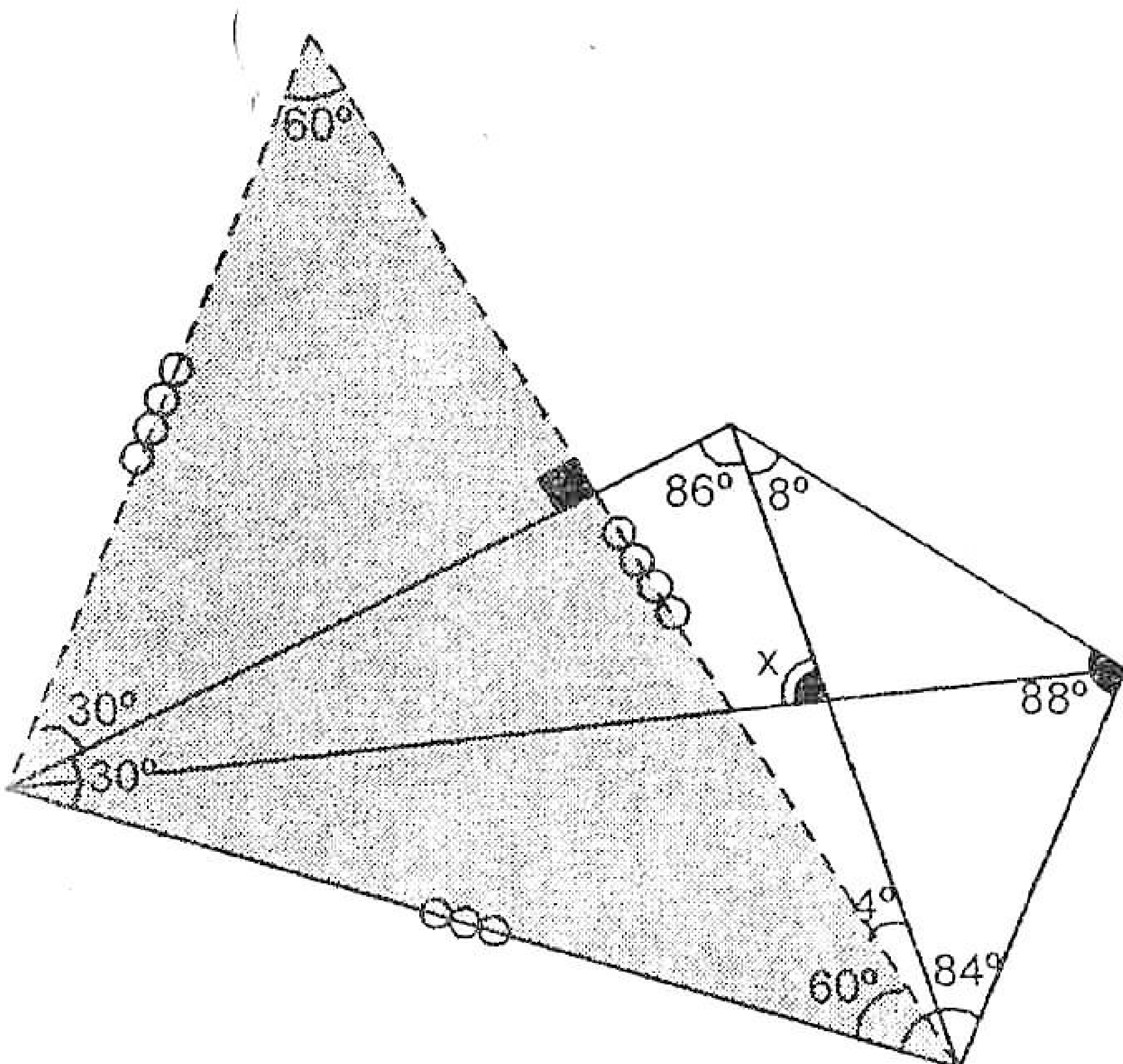
...BLO Nº 3



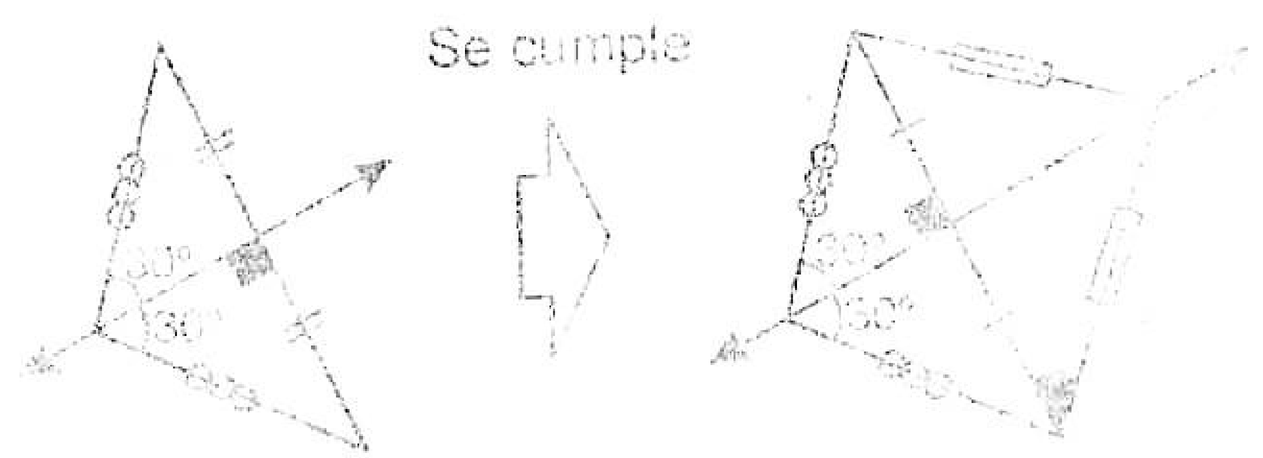
...UCIÓN:
...ero completamos los ángulos de la figura y ...observa un ángulo de 30º

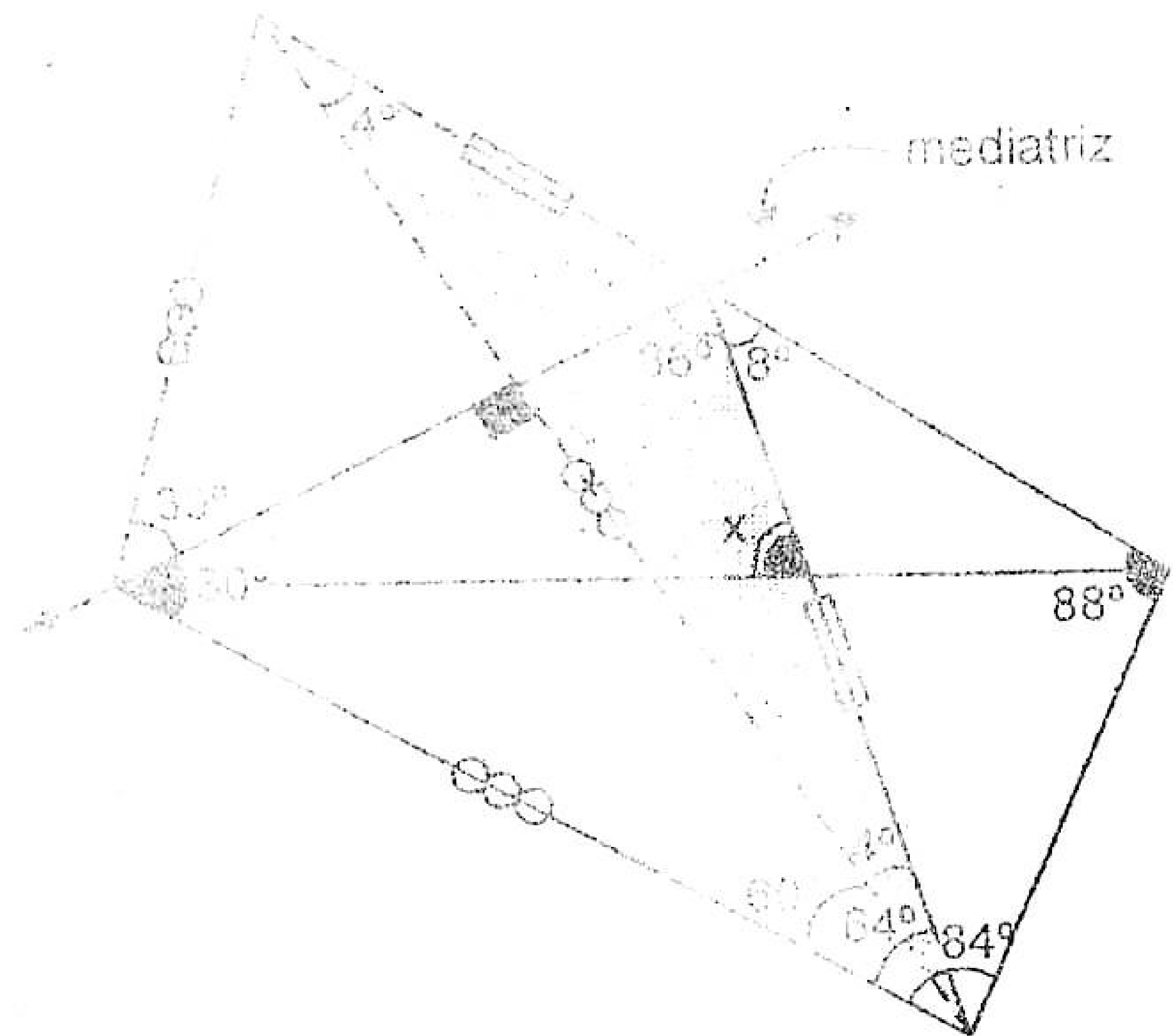


...aso Nº 1: Como observamos un ángulo de 30º, ...onstruimos un triángulo equilátero exterior...mente de la siguiente manera.

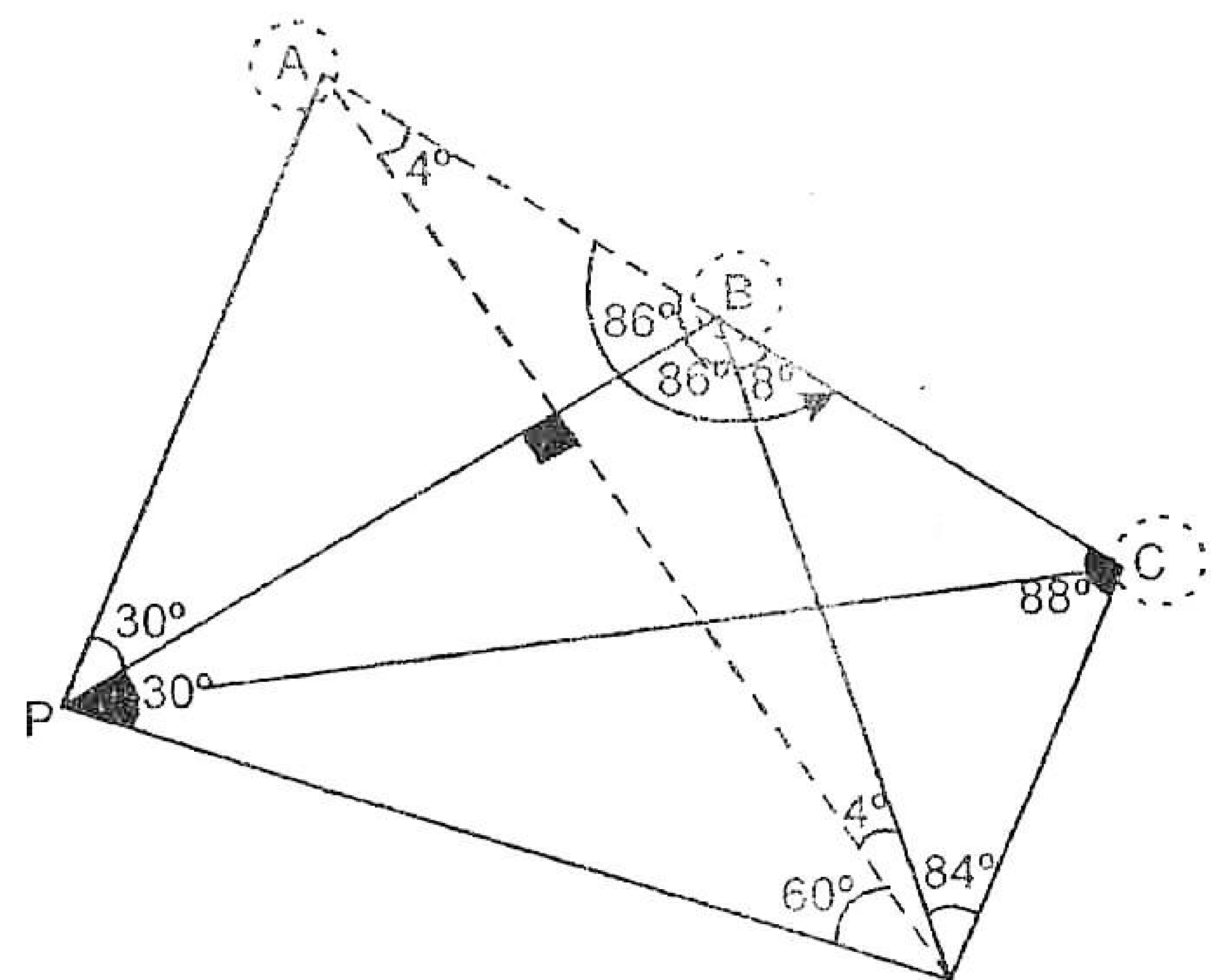


Paso Nº 2: Se observa en la figu... mediatriz.

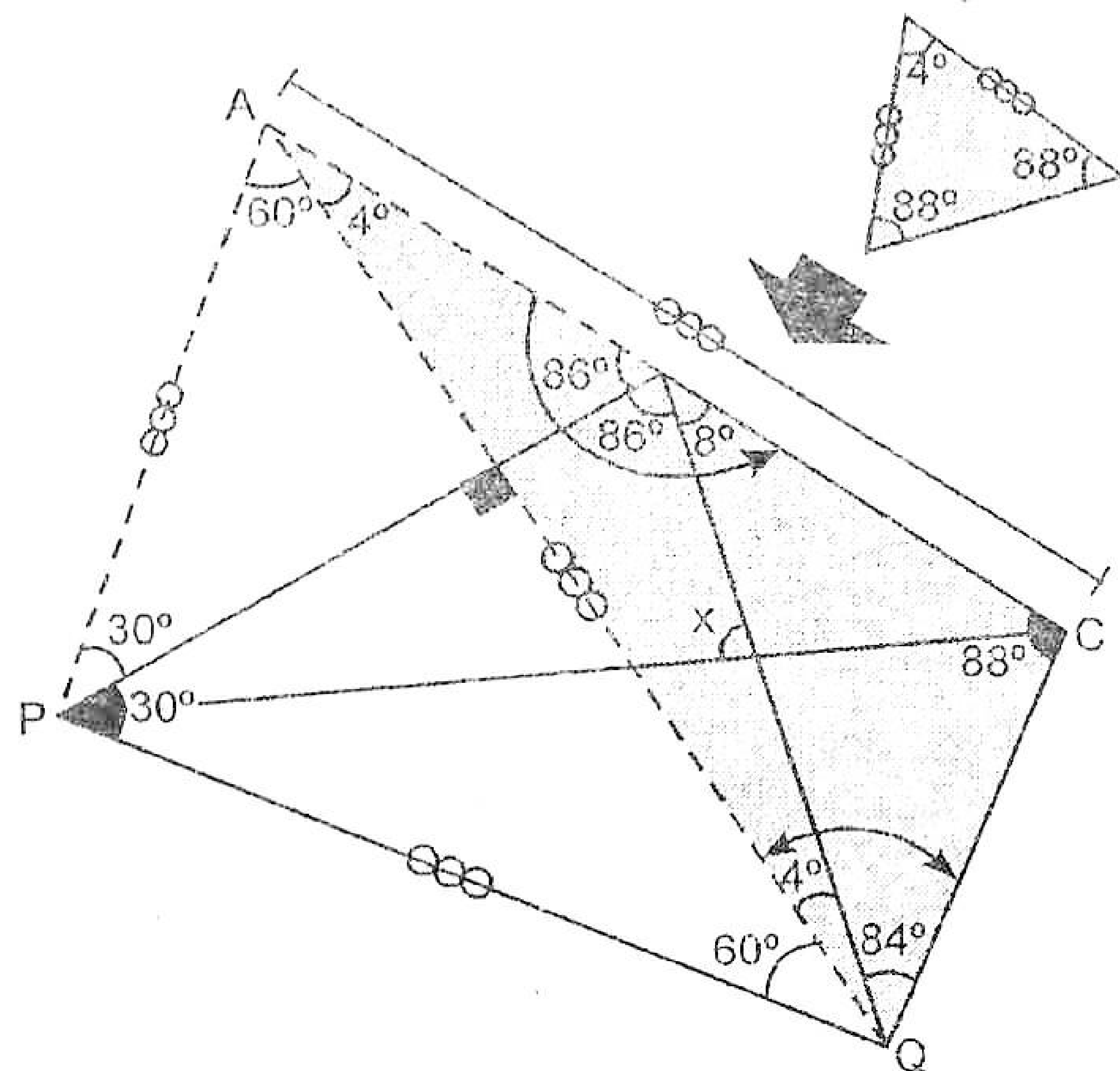




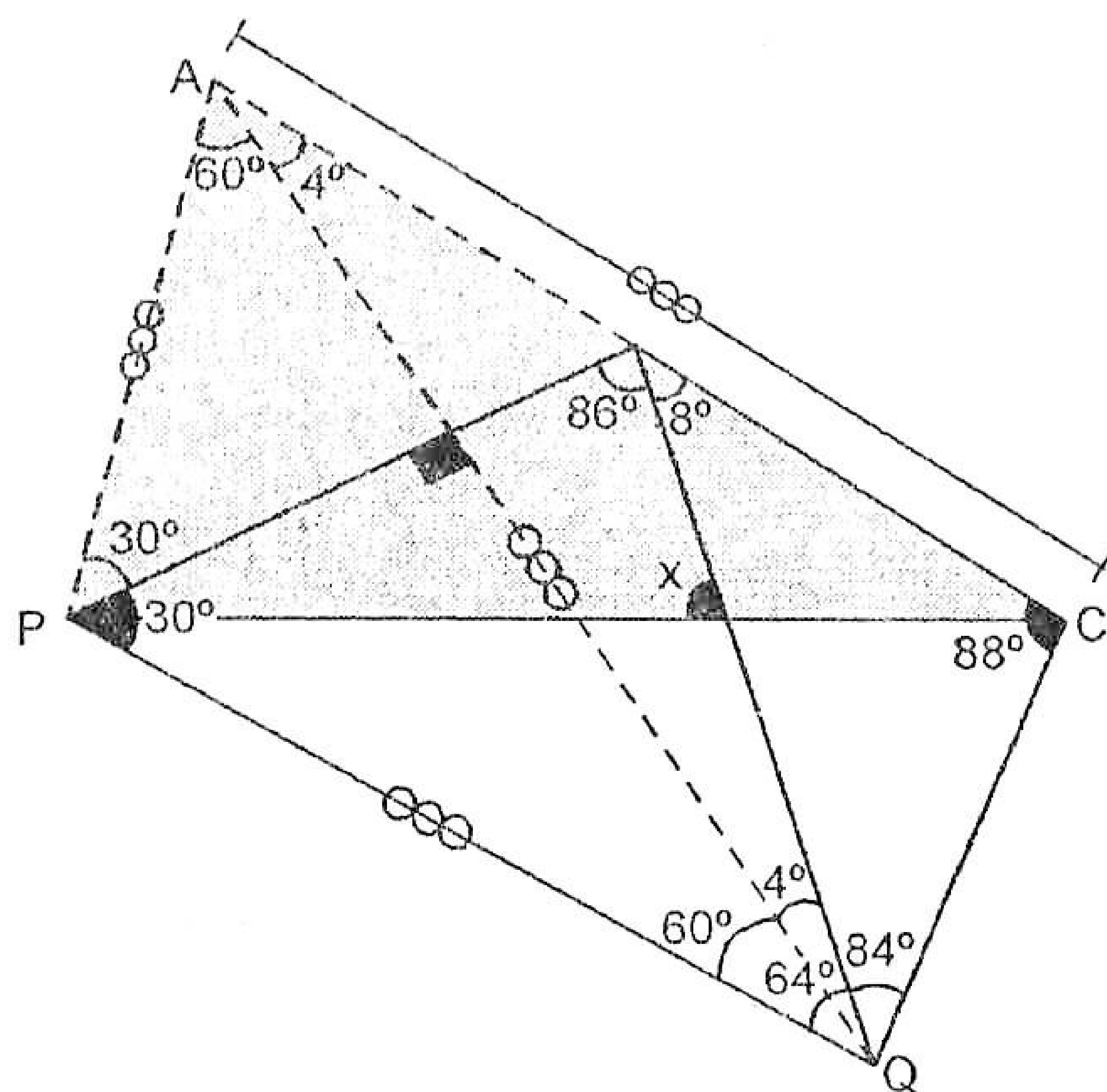
Paso Nº 3: Luego se observa un ángulo llano en "B" (86º + 86º + 8º = 180º) lo cual nos indica que los vertices A, B y C son colineales.



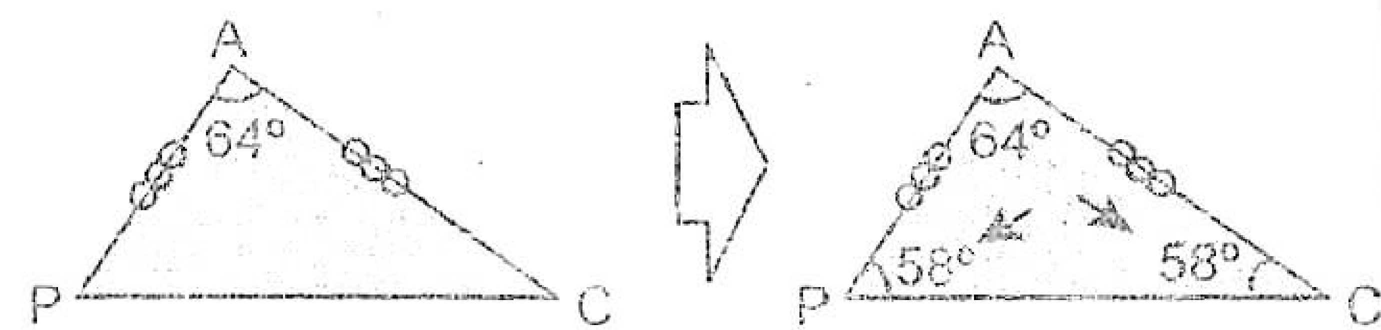
Paso N° 4: Luego se observa un triángulo isósceles donde AQ = AC.



Paso N° 5: Se observa ahora un nuevo triángulo isósceles PAC donde (PA = AC)

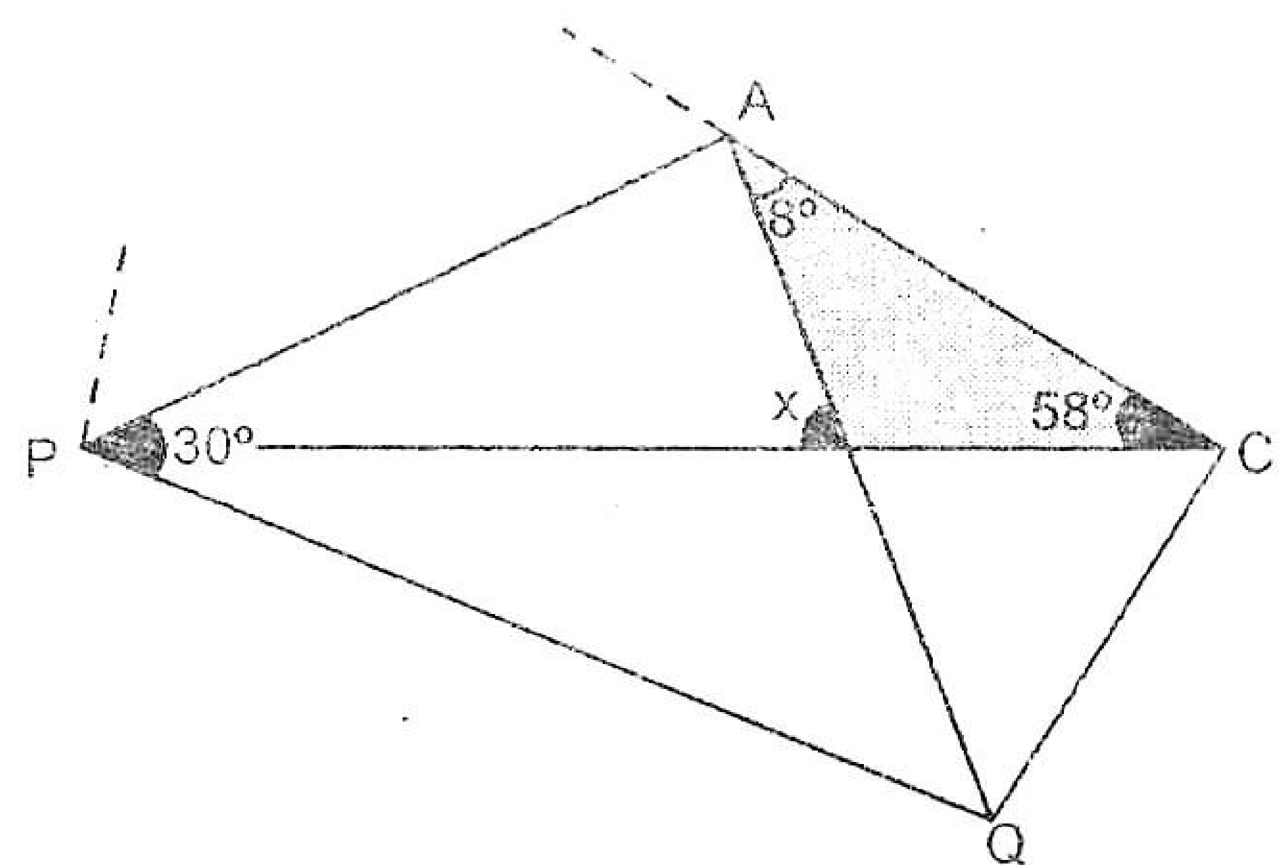


De aqui:



Paso N° 6: Ahora interiormente de la figura se tiene un triángulo donde cumple:

m ∡ ACP = 58°



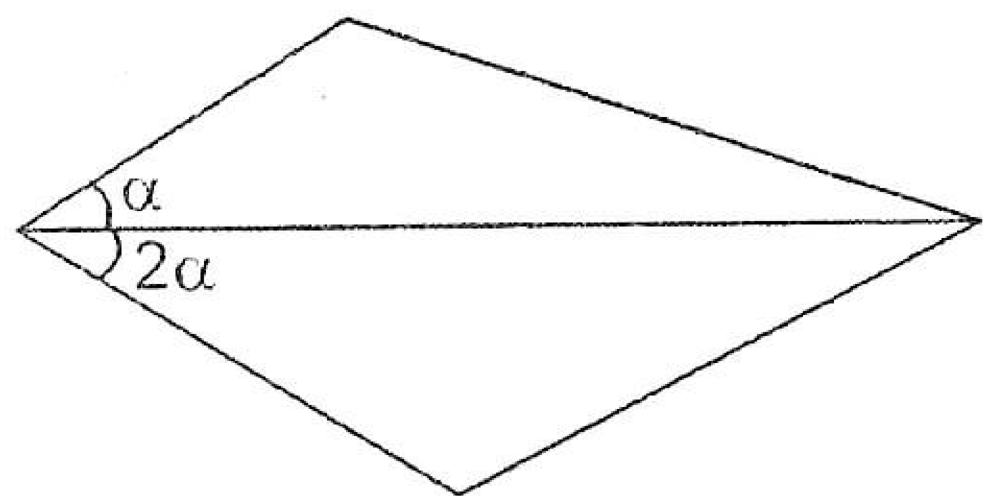
$\Longrightarrow$ x = 58° + 8°

x = 66°

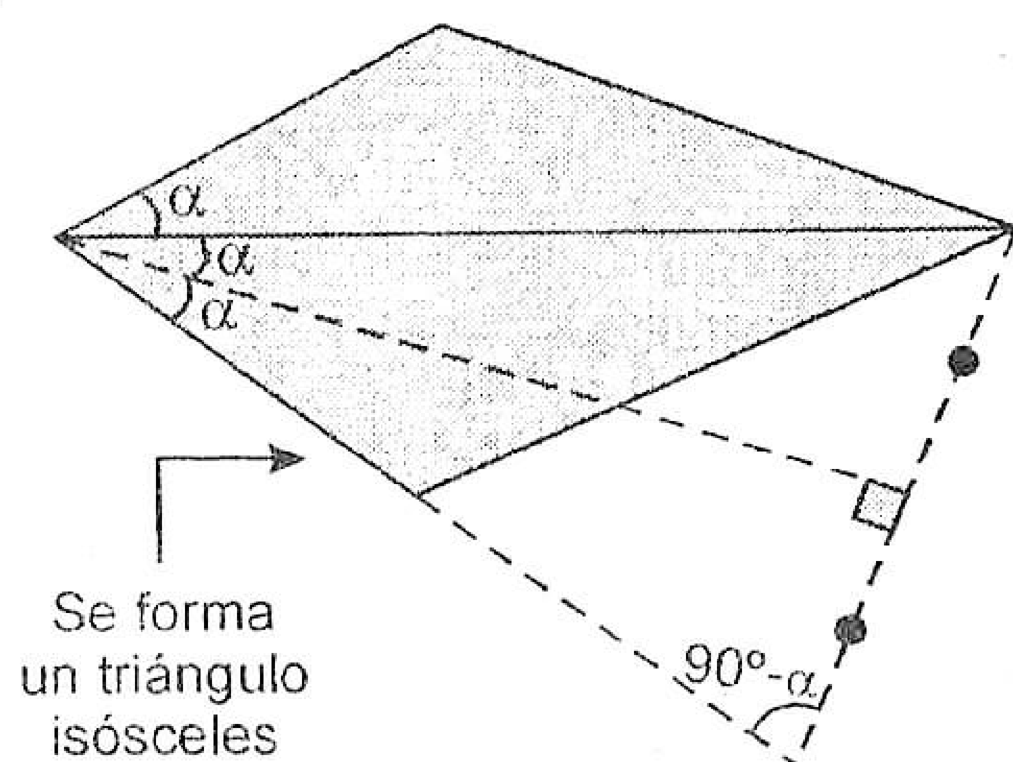
4to Criterio

"PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ"

Cuando se observa en una figura de la siguiente forma se realizará el siguiente trazo:

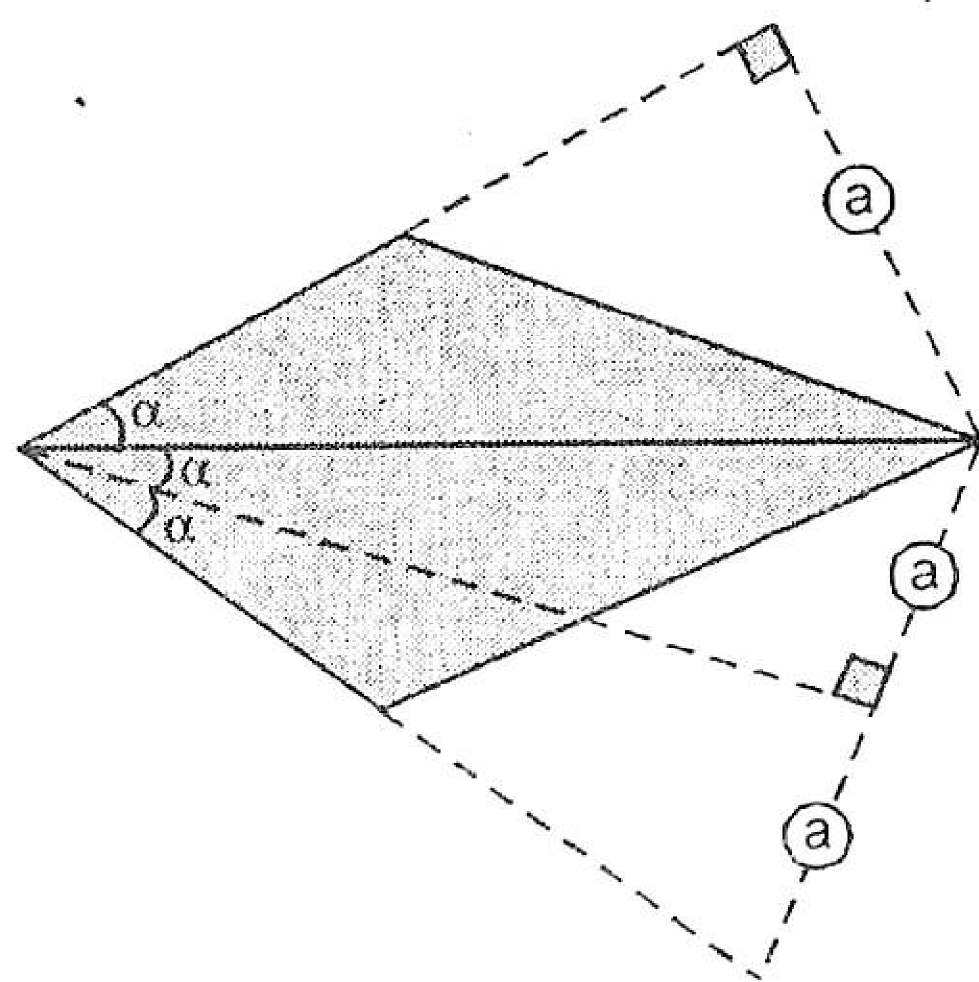




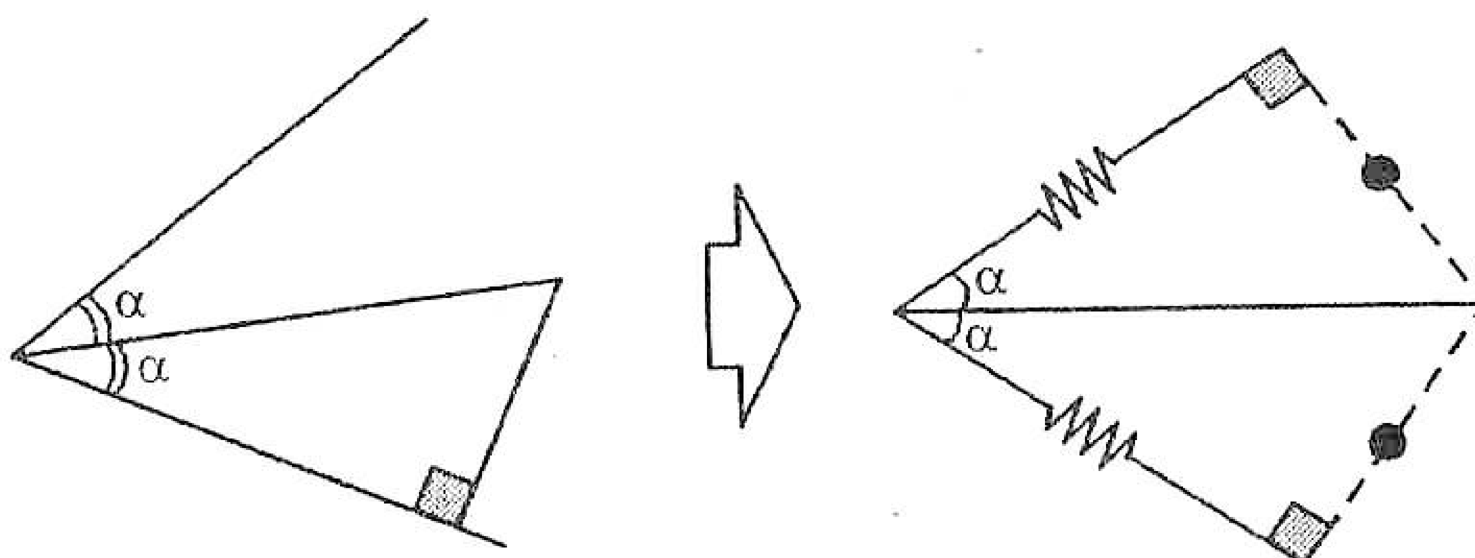


Se realiza el siguiente trazo para obtener la siguiente figura:



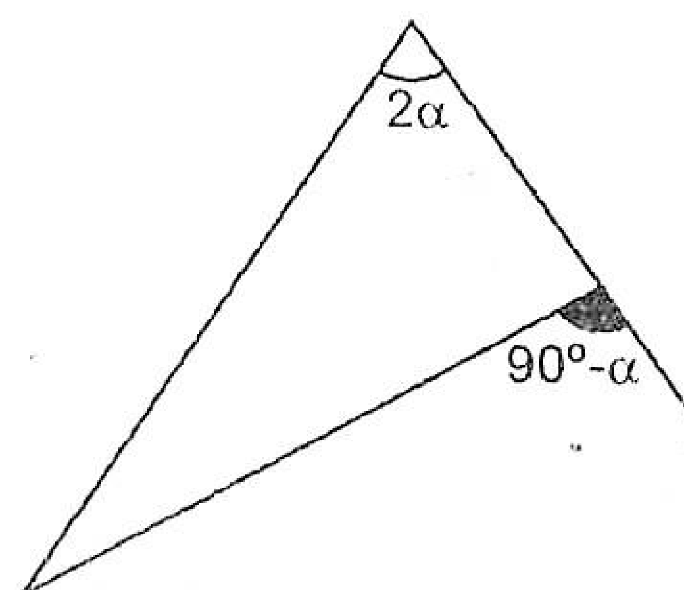


Se sabe: PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ:

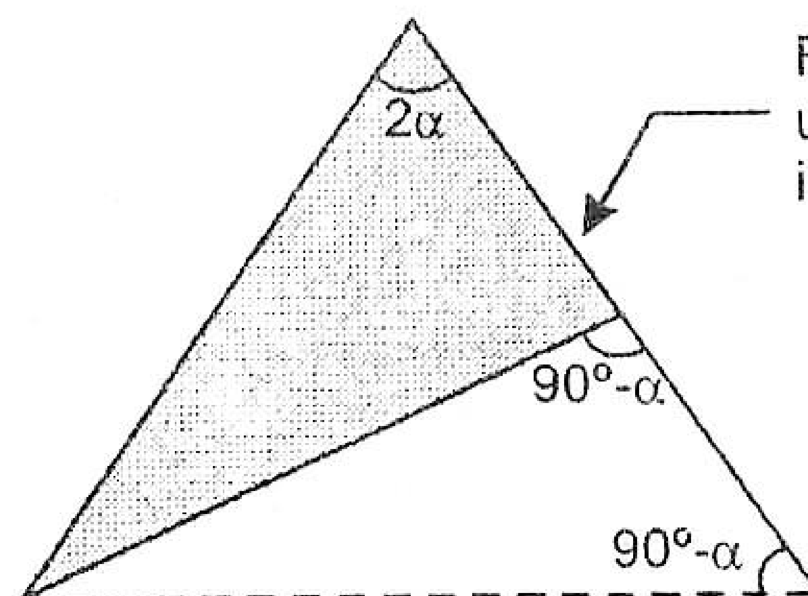


Tener presente:

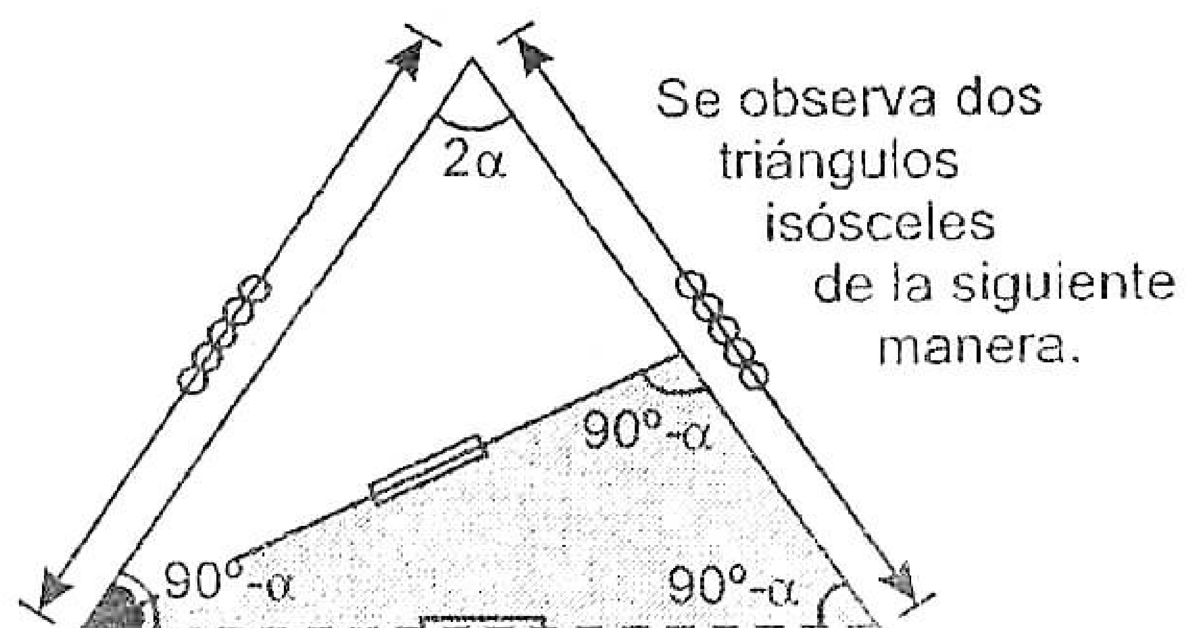
Si se observa la siguiente figura:





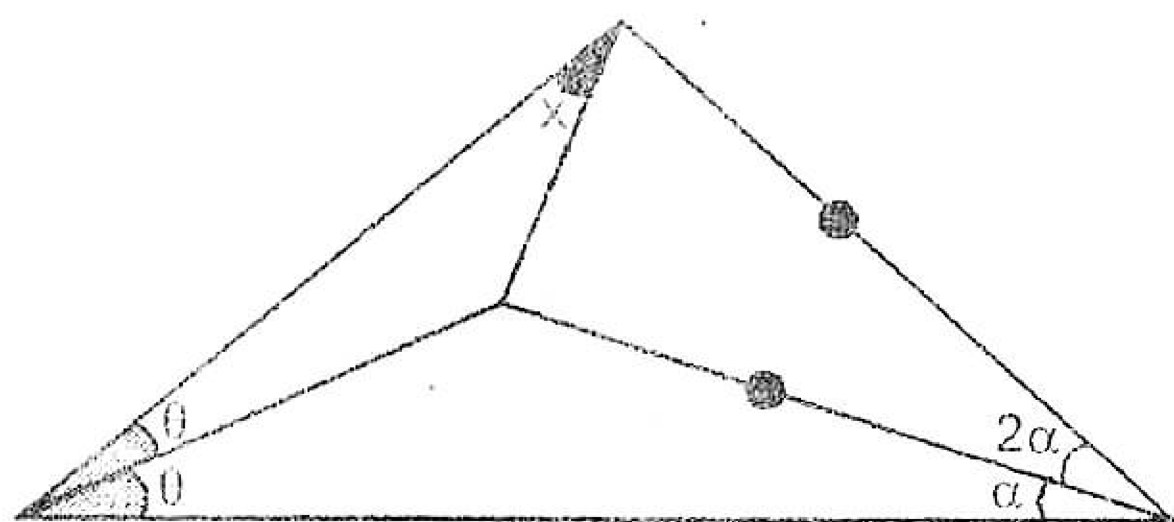






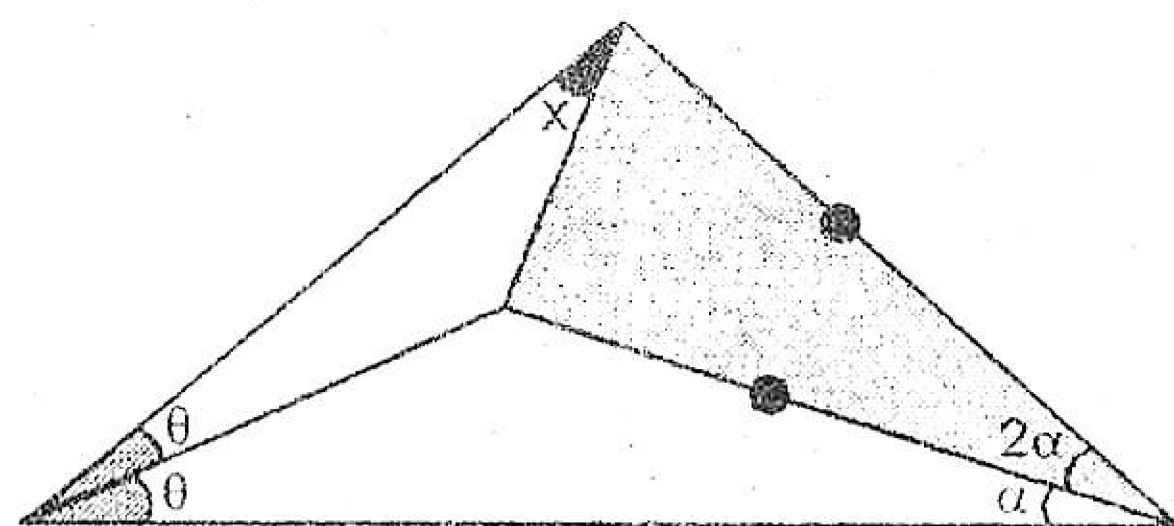
EJEMPLO Nº 1

Calcular "x"

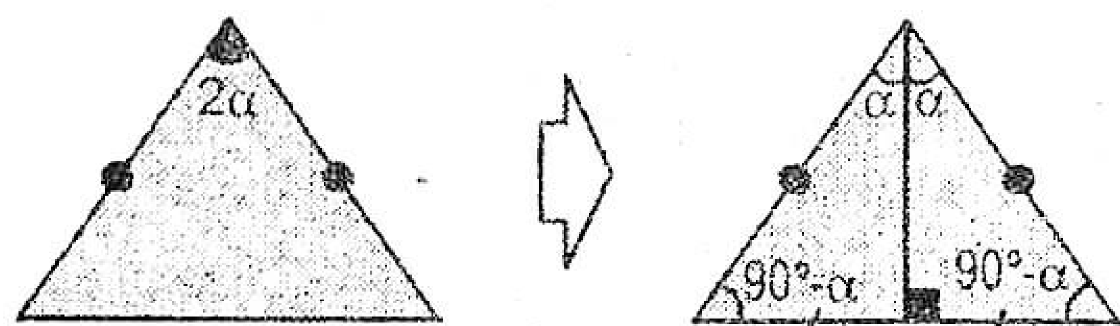


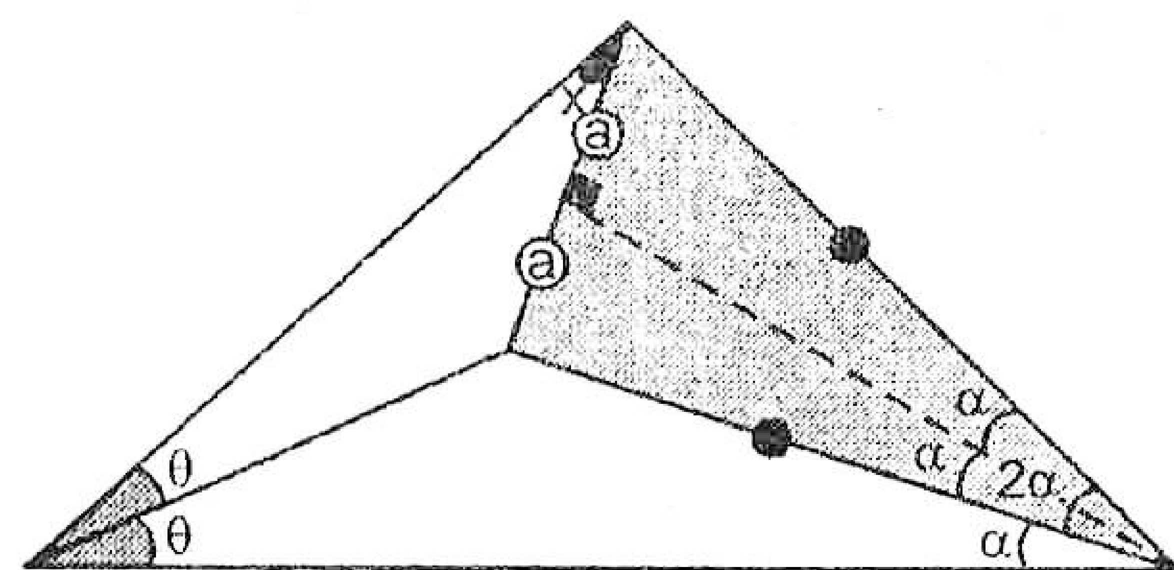
SOLUCIÓN:

Se observa un triángulo isósceles.

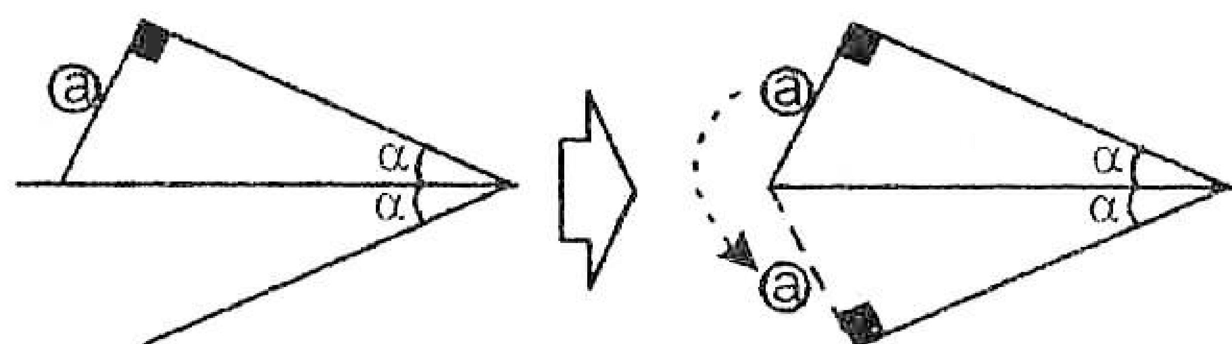


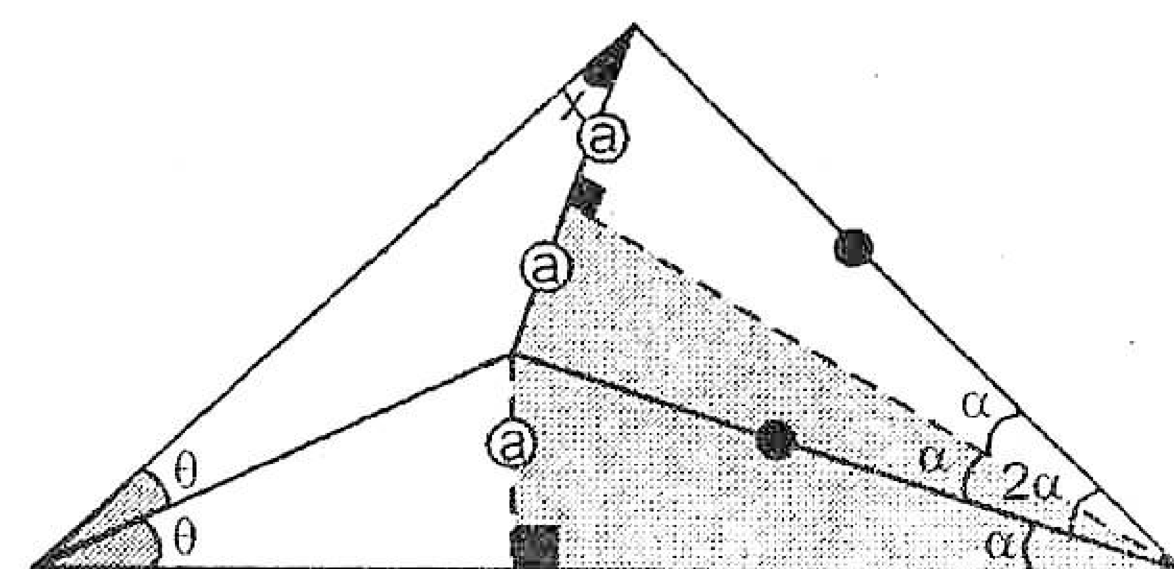
Paso Nº 1: Aqui se realiza el siguiente trazo:



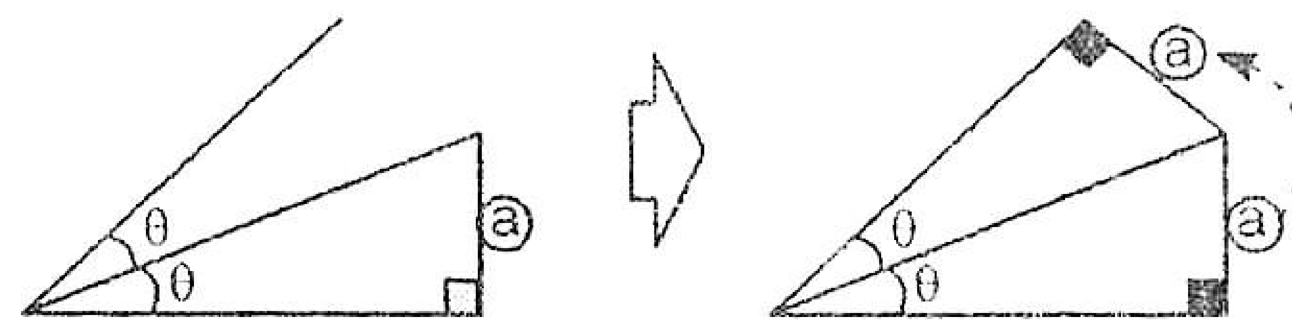


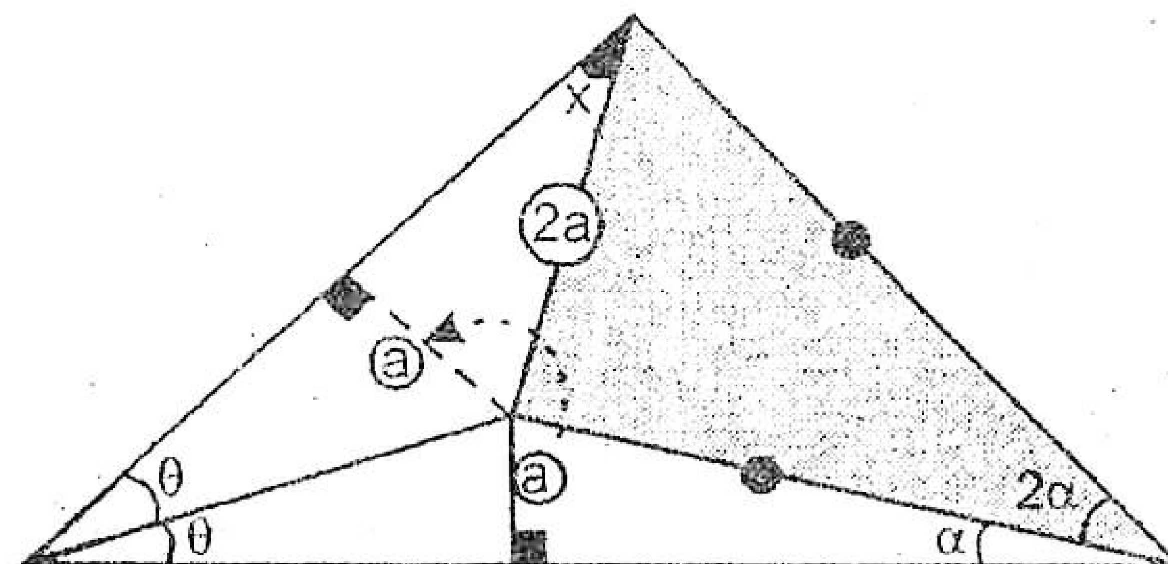
Paso Nº 2: Luego se observa en la figura que se obtiene:



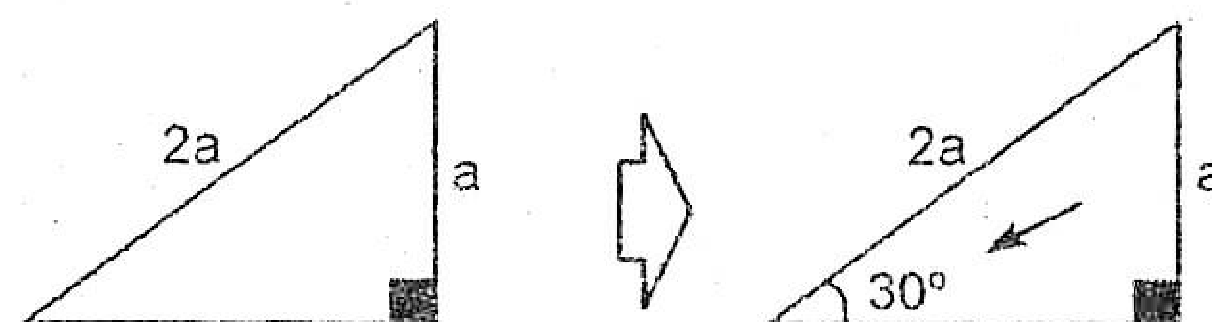


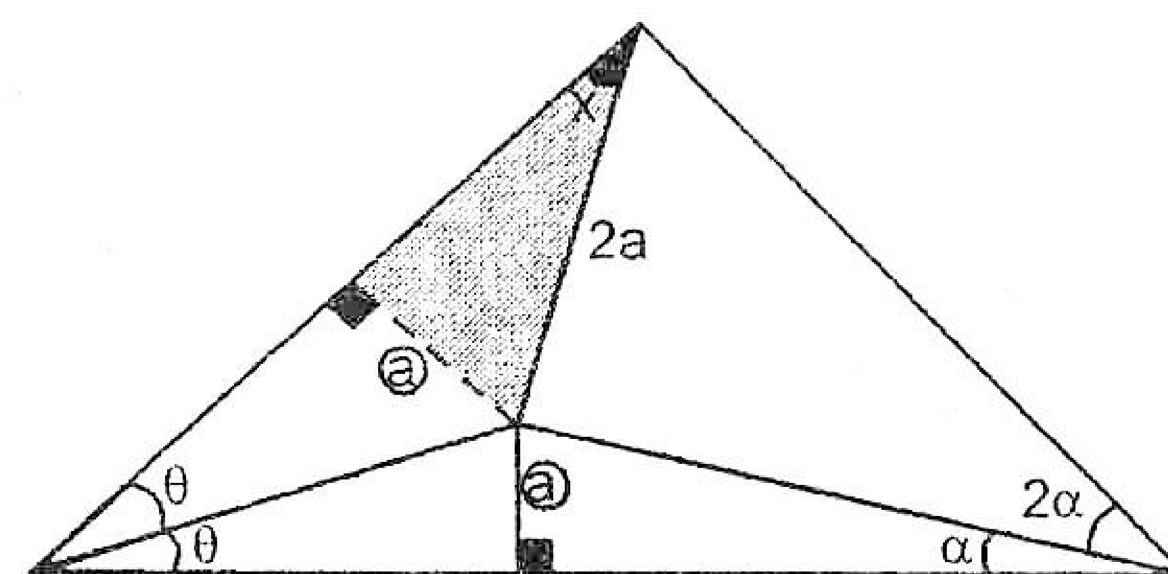
Paso Nº 3: De la misma manera se obtiene:





Paso Nº 4: Se observa un triángulo rectángulo.

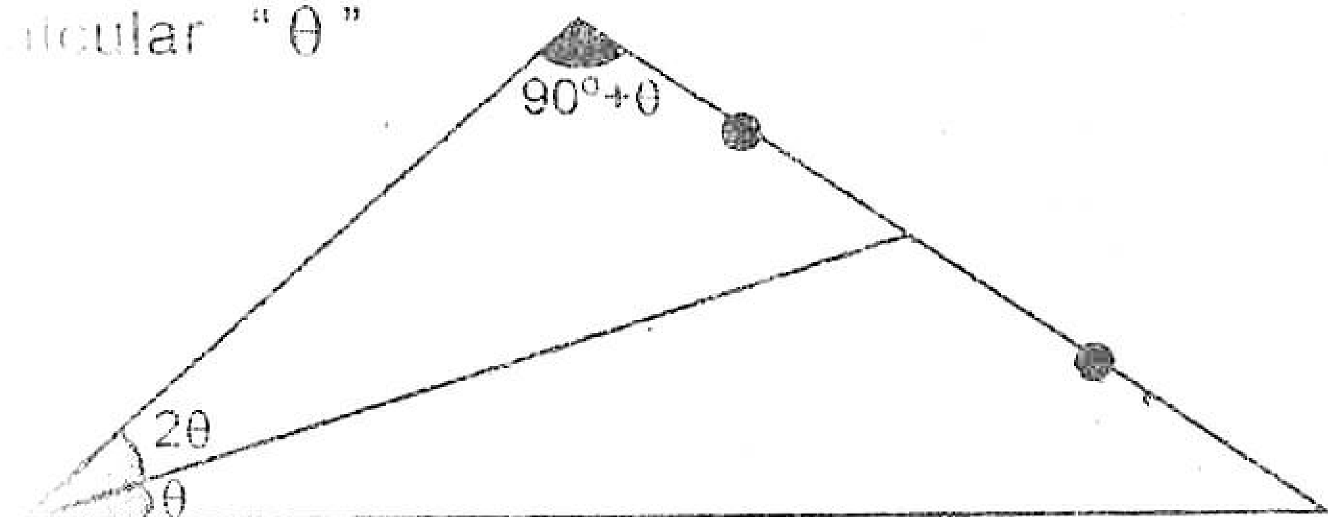




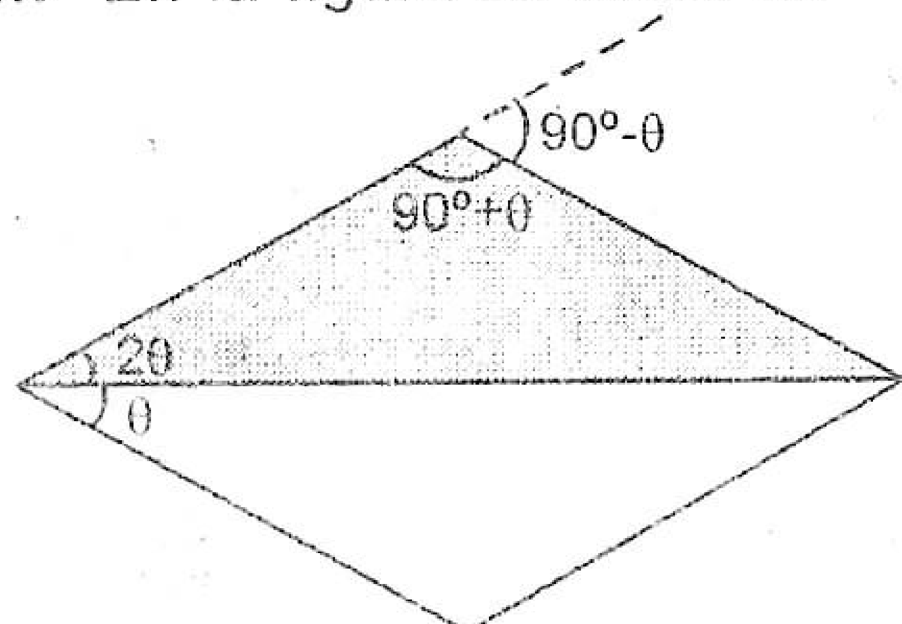
$$\Rightarrow \ \mathbf{x = 30°}$$

EJEMPLO Nº 2

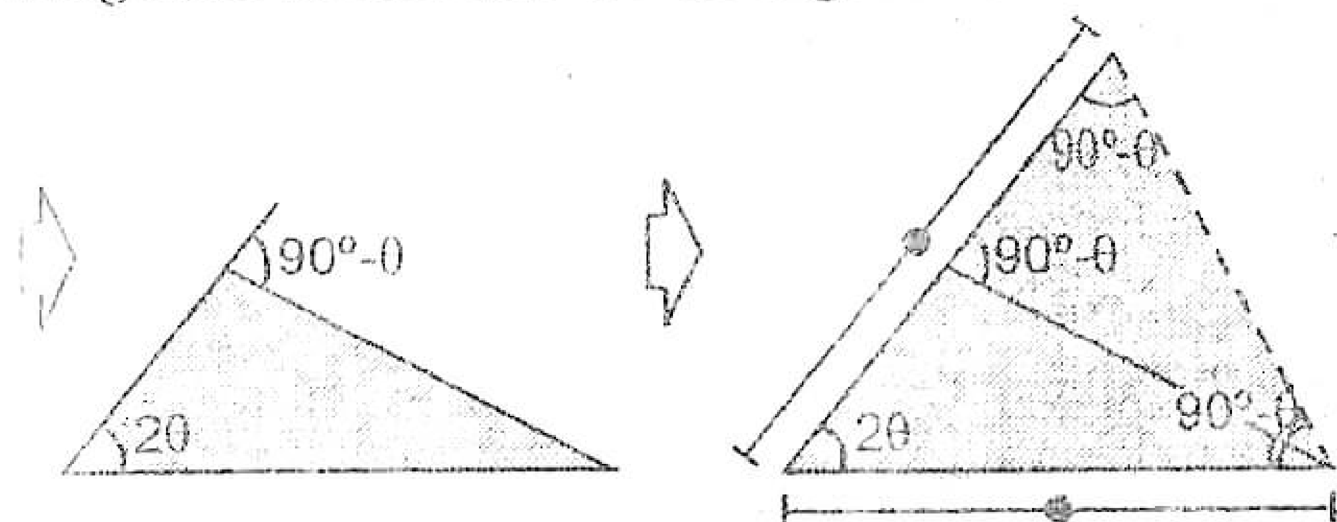
Calcular "θ"



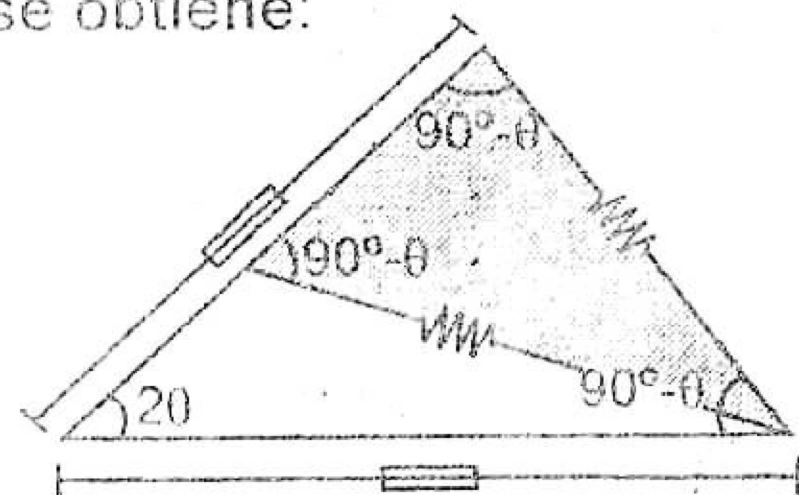
Solución: En la figura se observa:



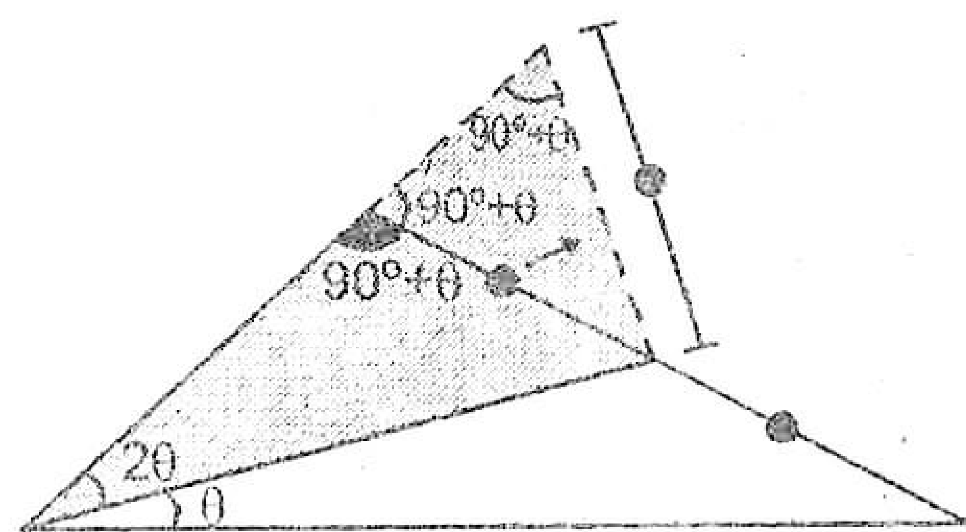
Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera.



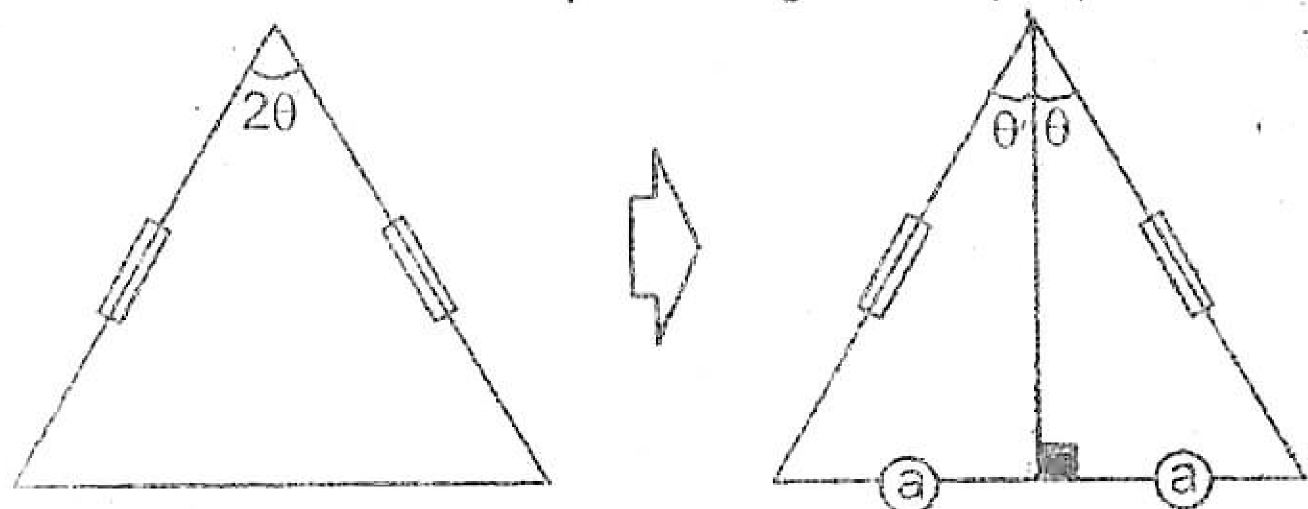
También se obtiene:

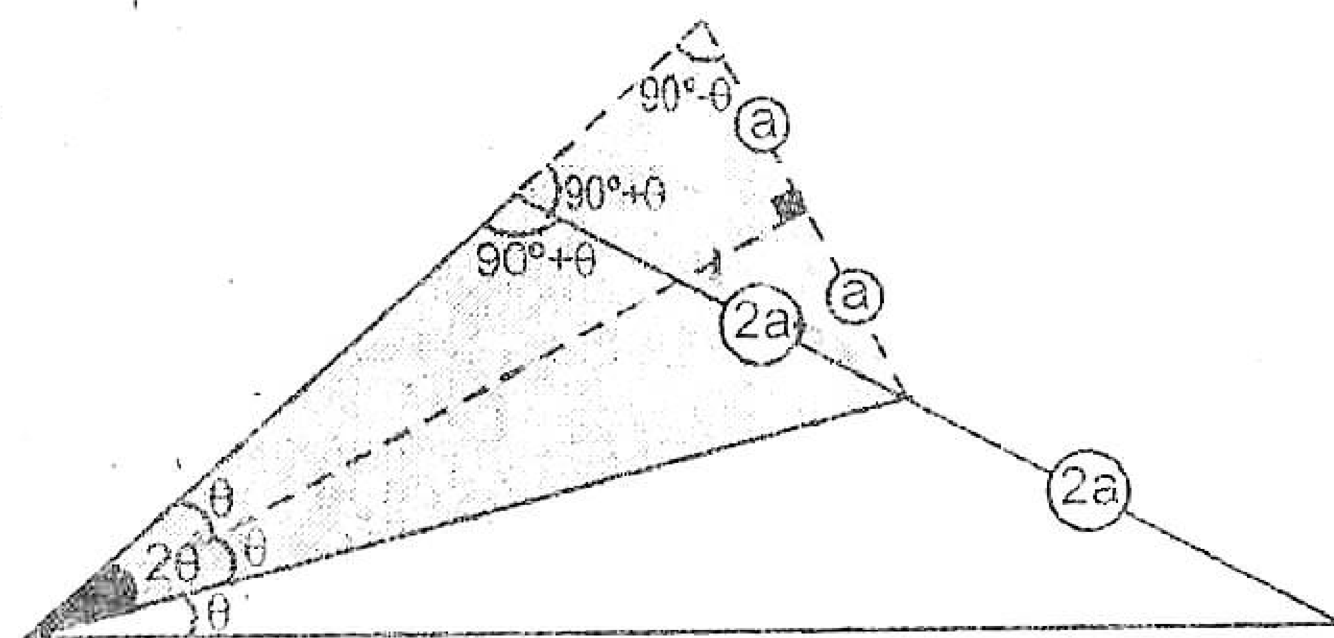


Paso Nº 1: Realizamos en la figura inicial el trazo sugerido:

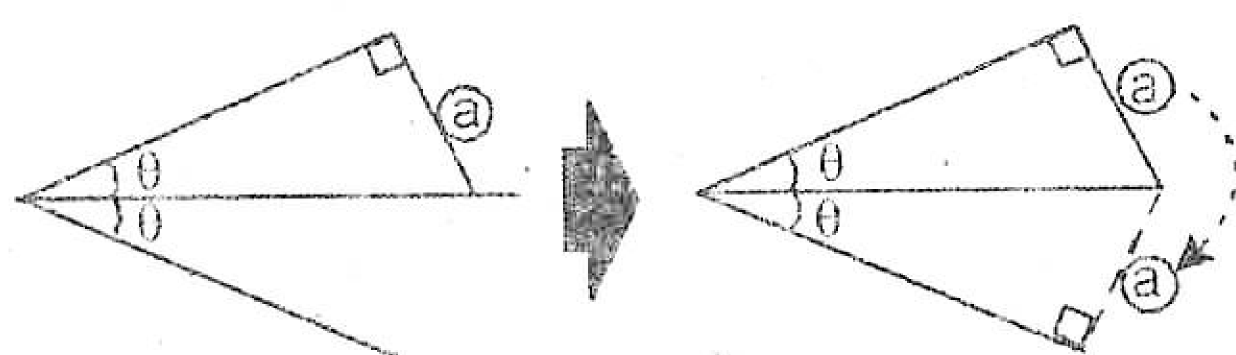


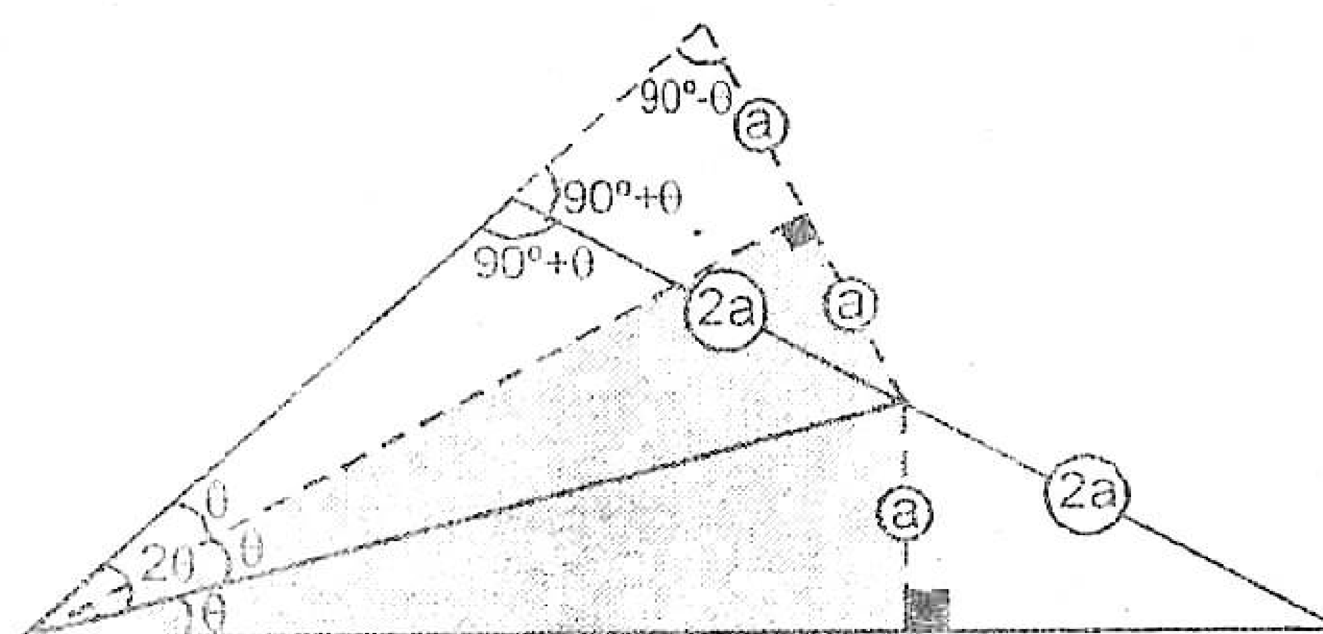
Paso Nº 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple la siguiente propiedad



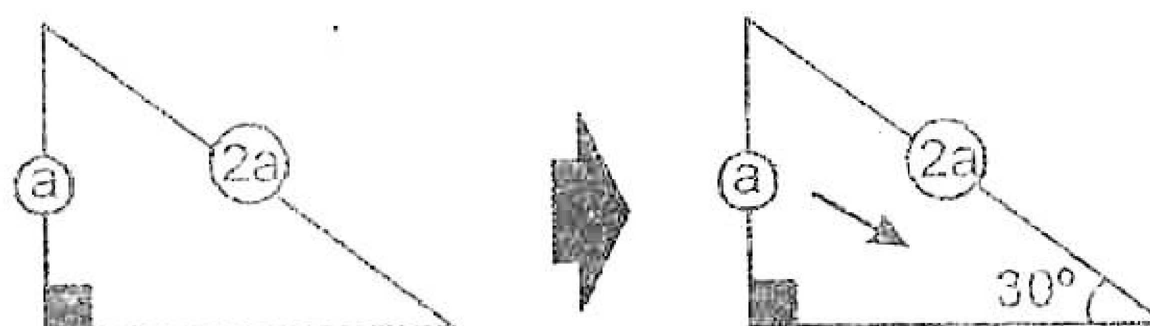


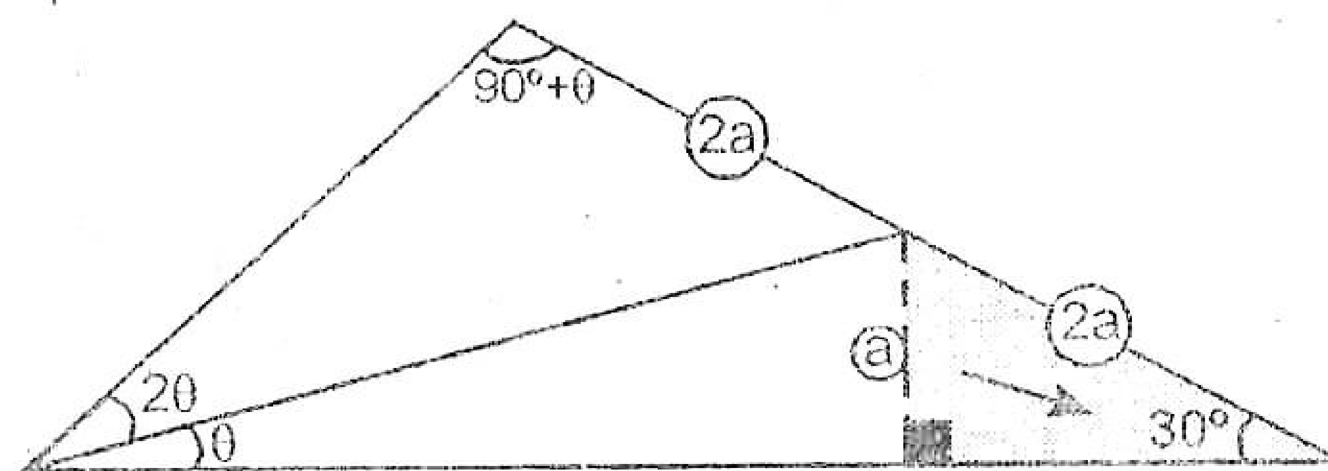
Paso Nº 3: Luego se observa en la figura que se tiene la siguiente propiedad.



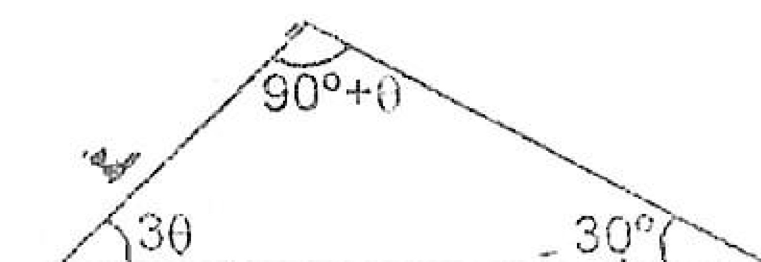


Paso Nº 4: Se observa que se obtiene un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°.





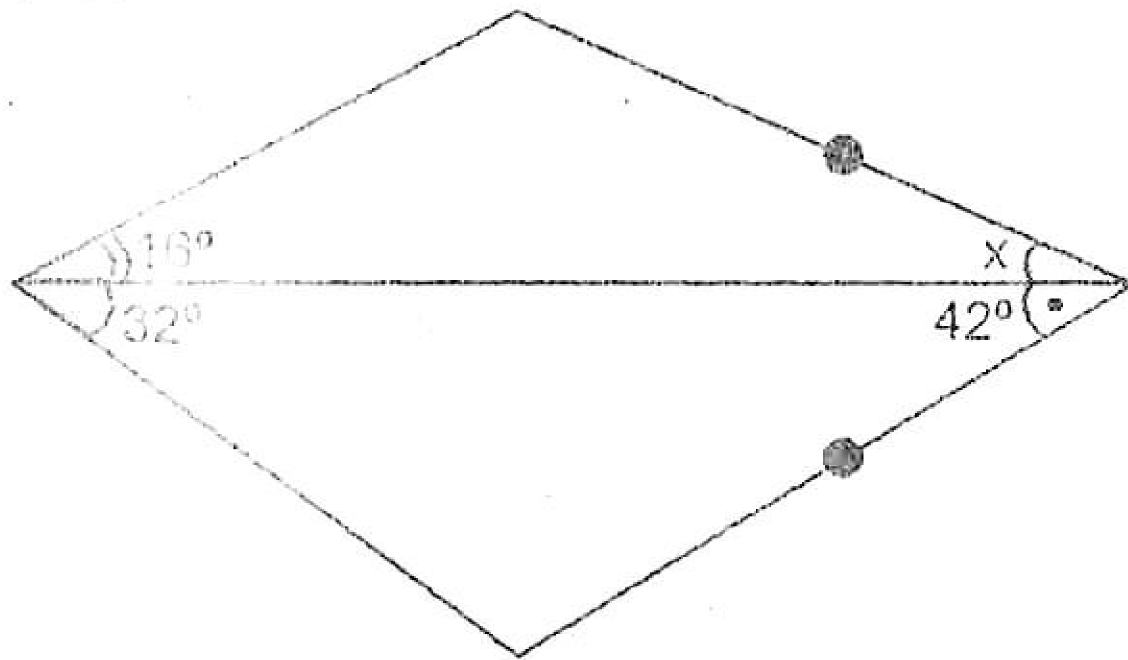
Paso Nº 5: Finalmente en el triángulo total se tiene:



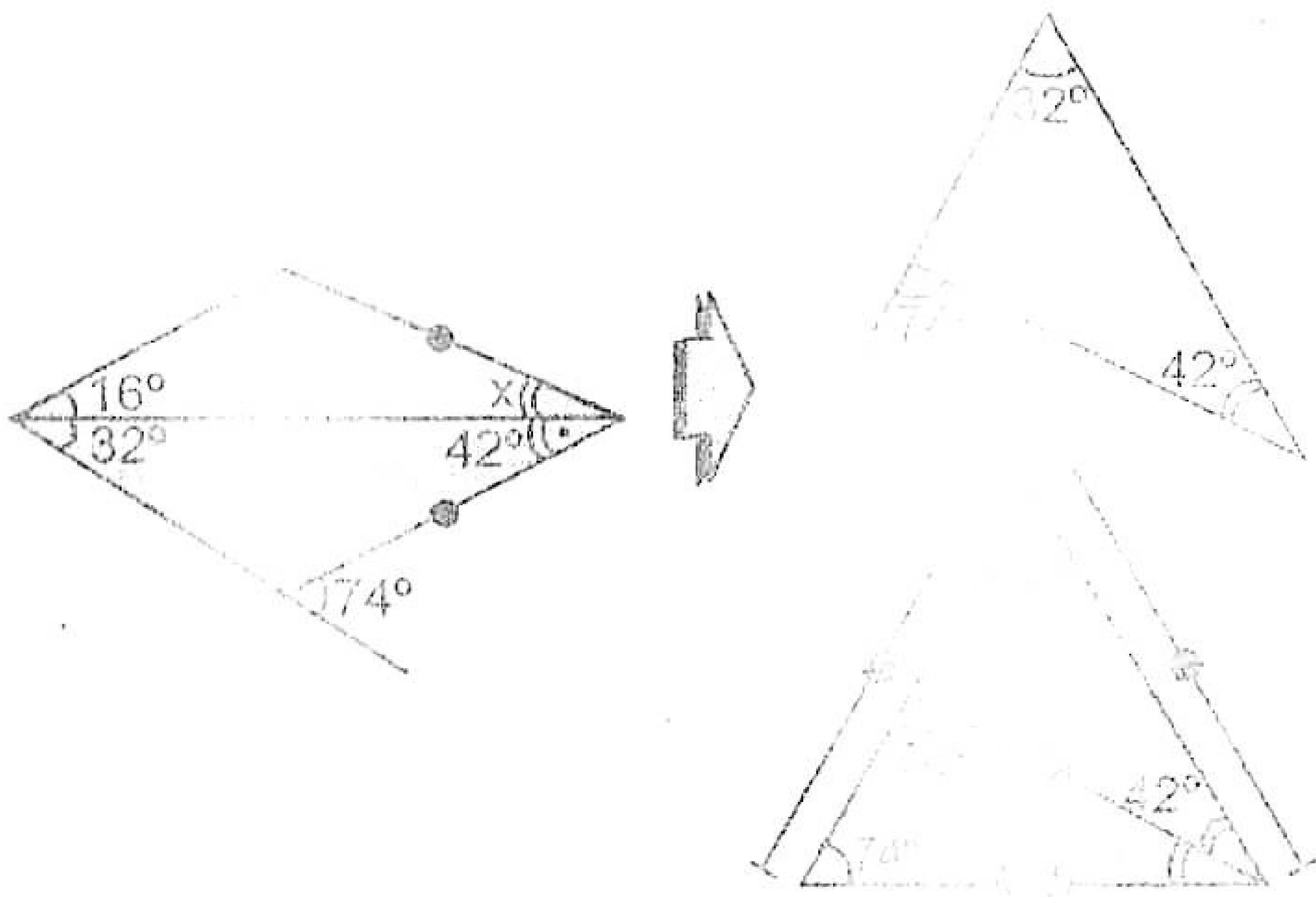
$$90° + \theta + 3\theta + 30° = 180°$$
$$4\theta = 60°$$
$$\theta = 15$$

EJEMPLO Nº 3

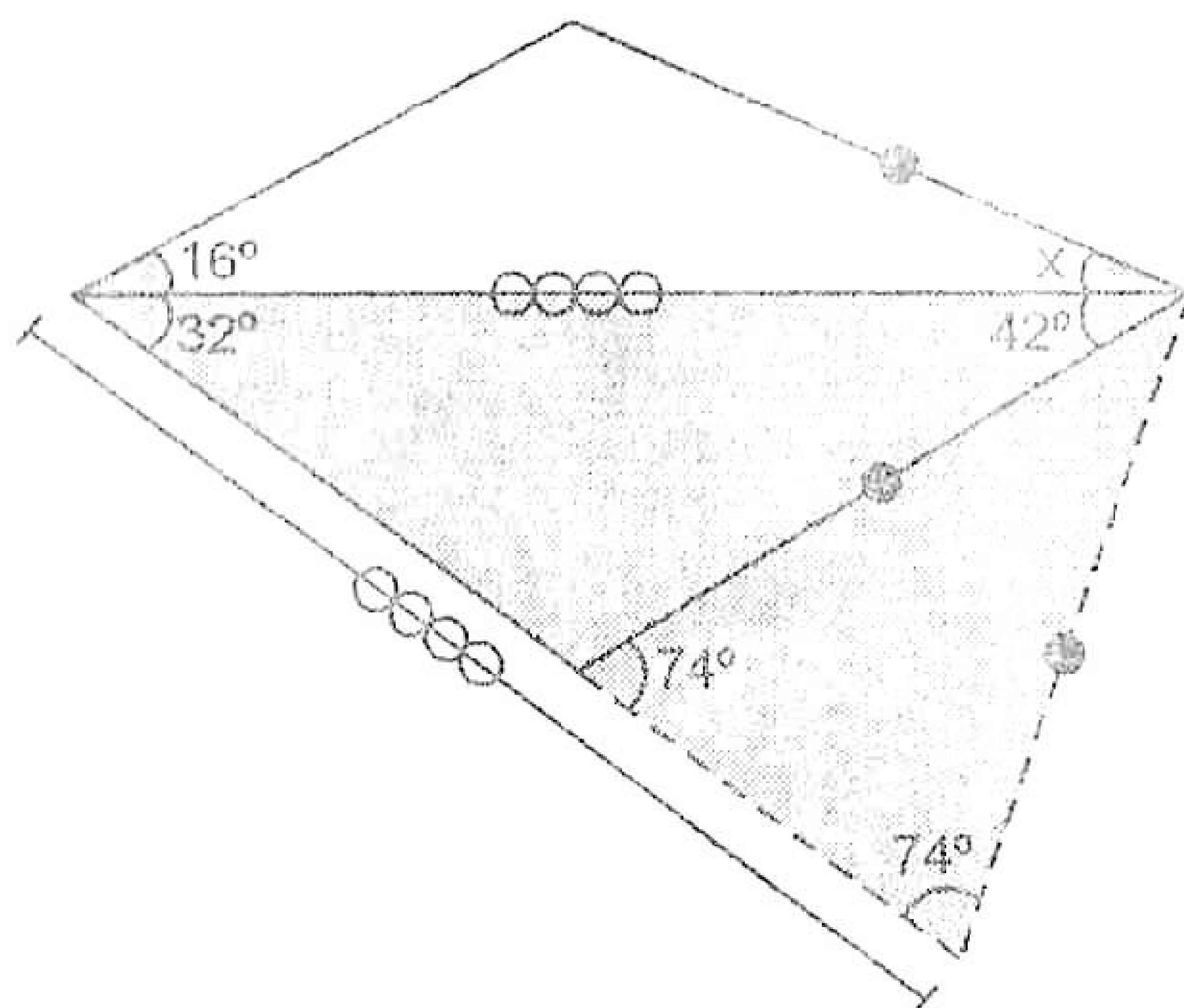
Hallar "x"



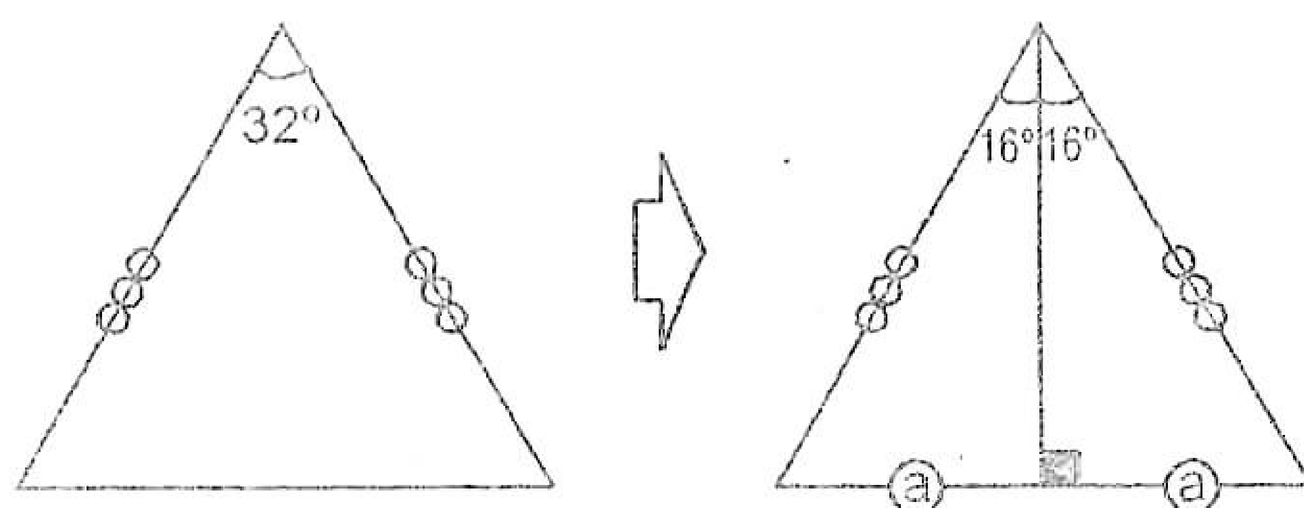
Solución: En la figura se observa que podemos realizar el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera.

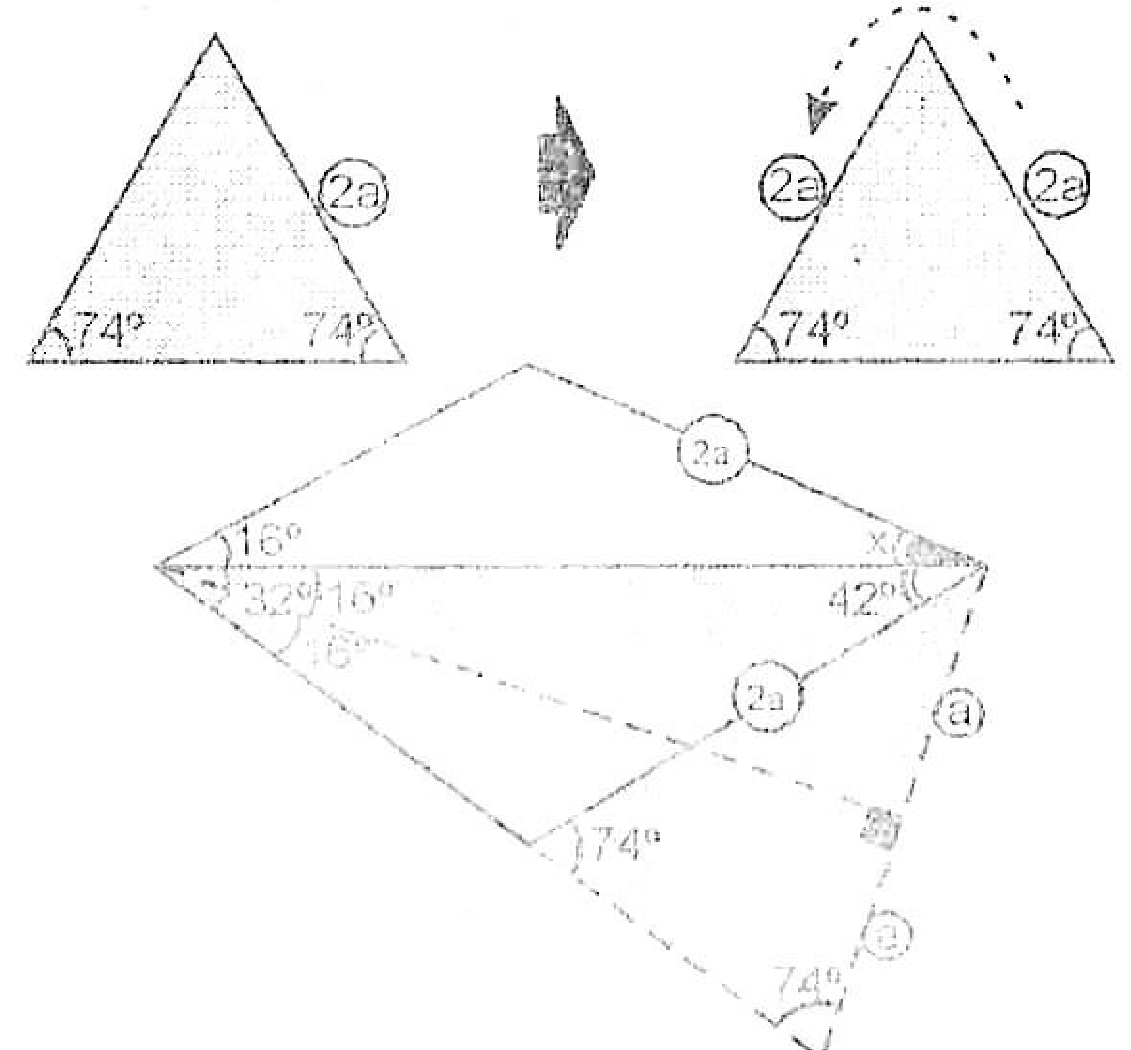


Paso Nº 1: Realizamos el trazo sugerido en la figura

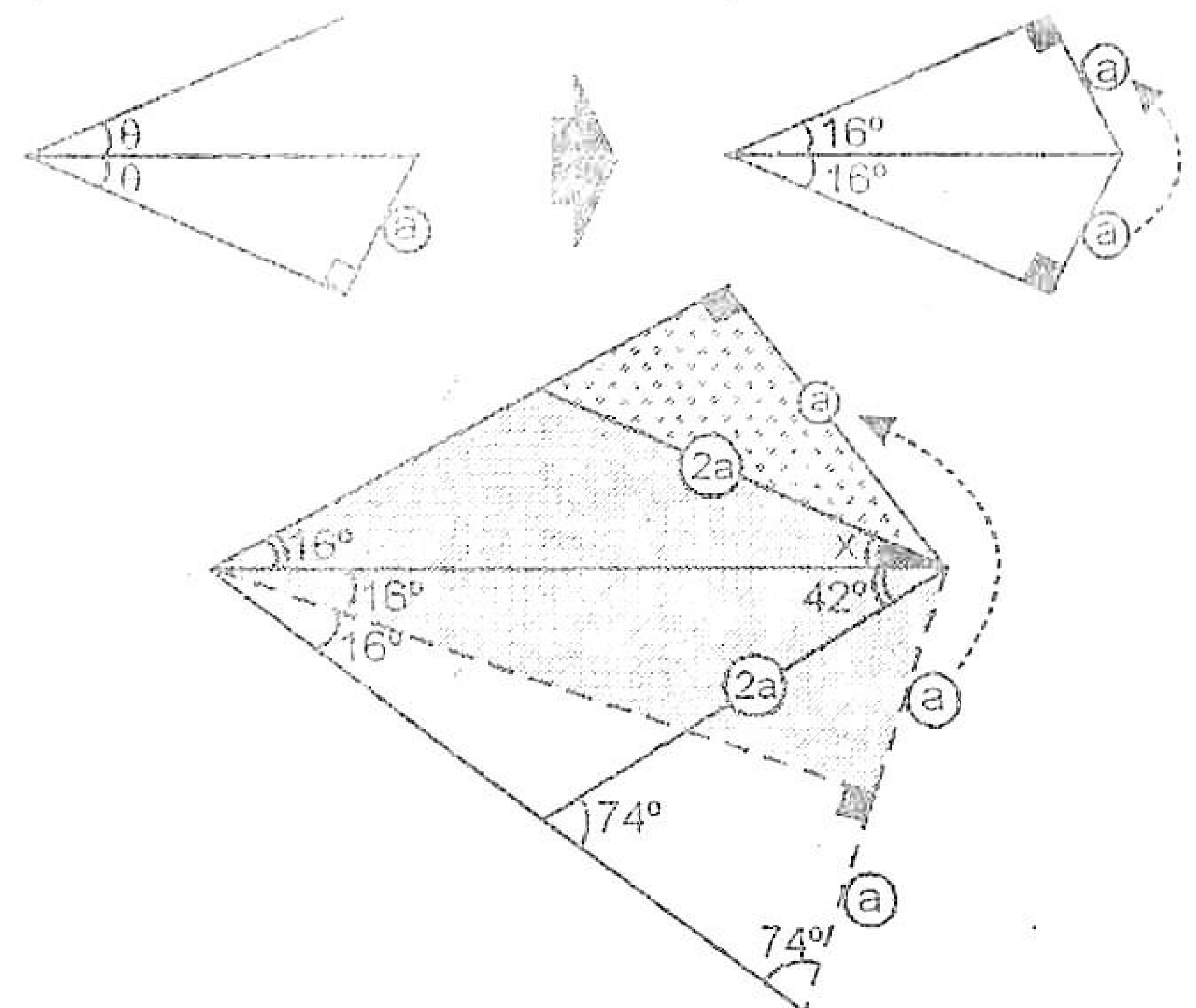


Paso Nº 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:

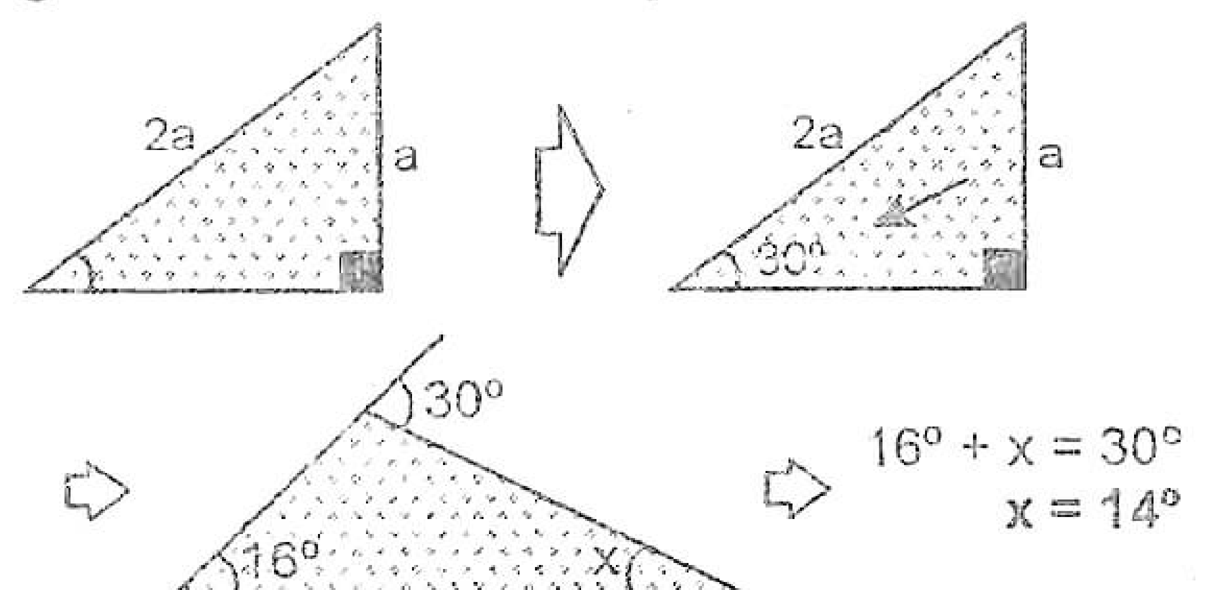




Paso Nº 3: Se observa también un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



Paso Nº 4: Luego se observa la siguiente propiedad en donde se cumple:



Paso Nº 5: Se observa que se obtiene un triángulo notable de 30° y 60°

$16° + x = 30°$

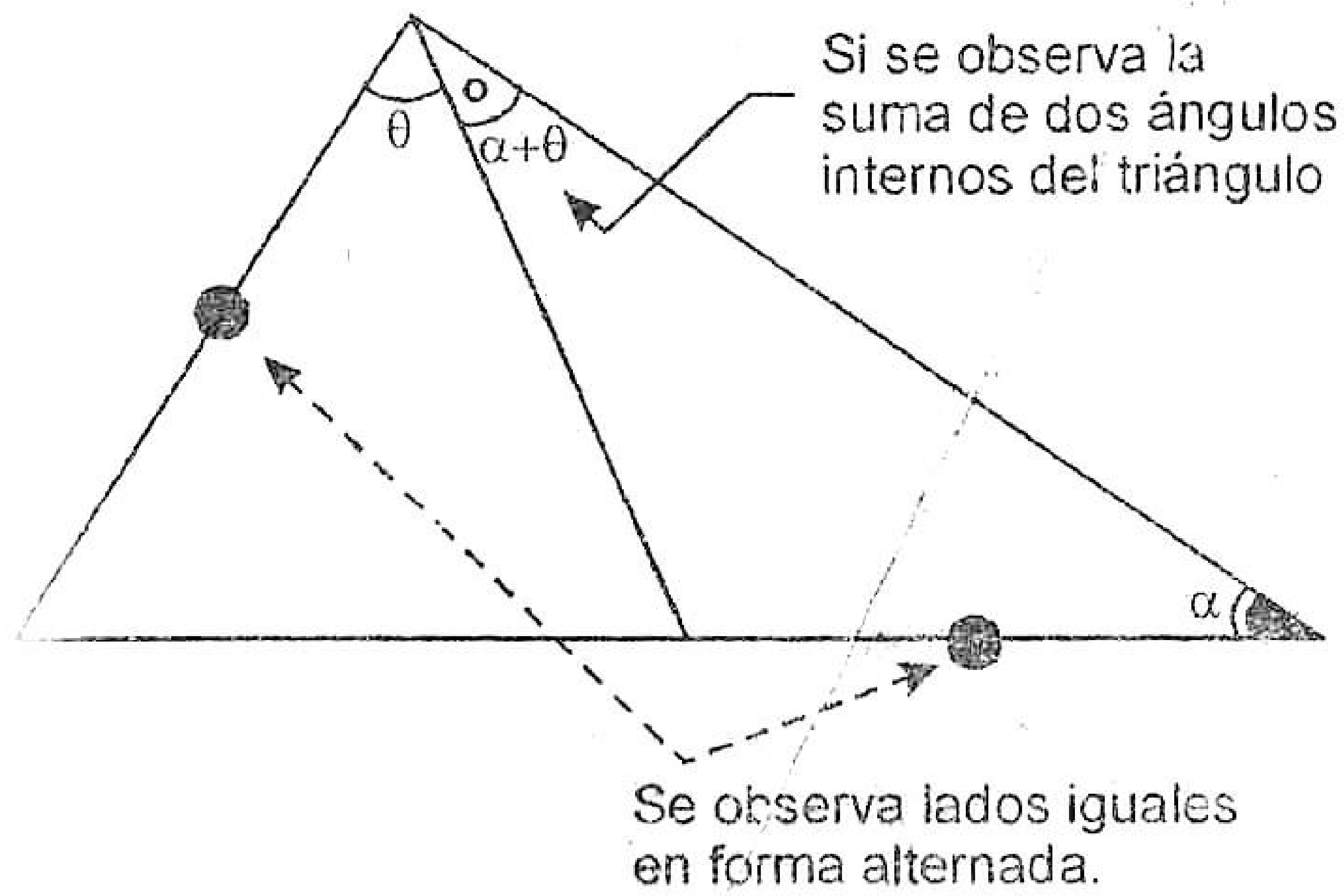
$x = 14°$

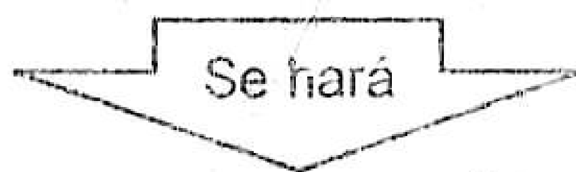
5to Criterio

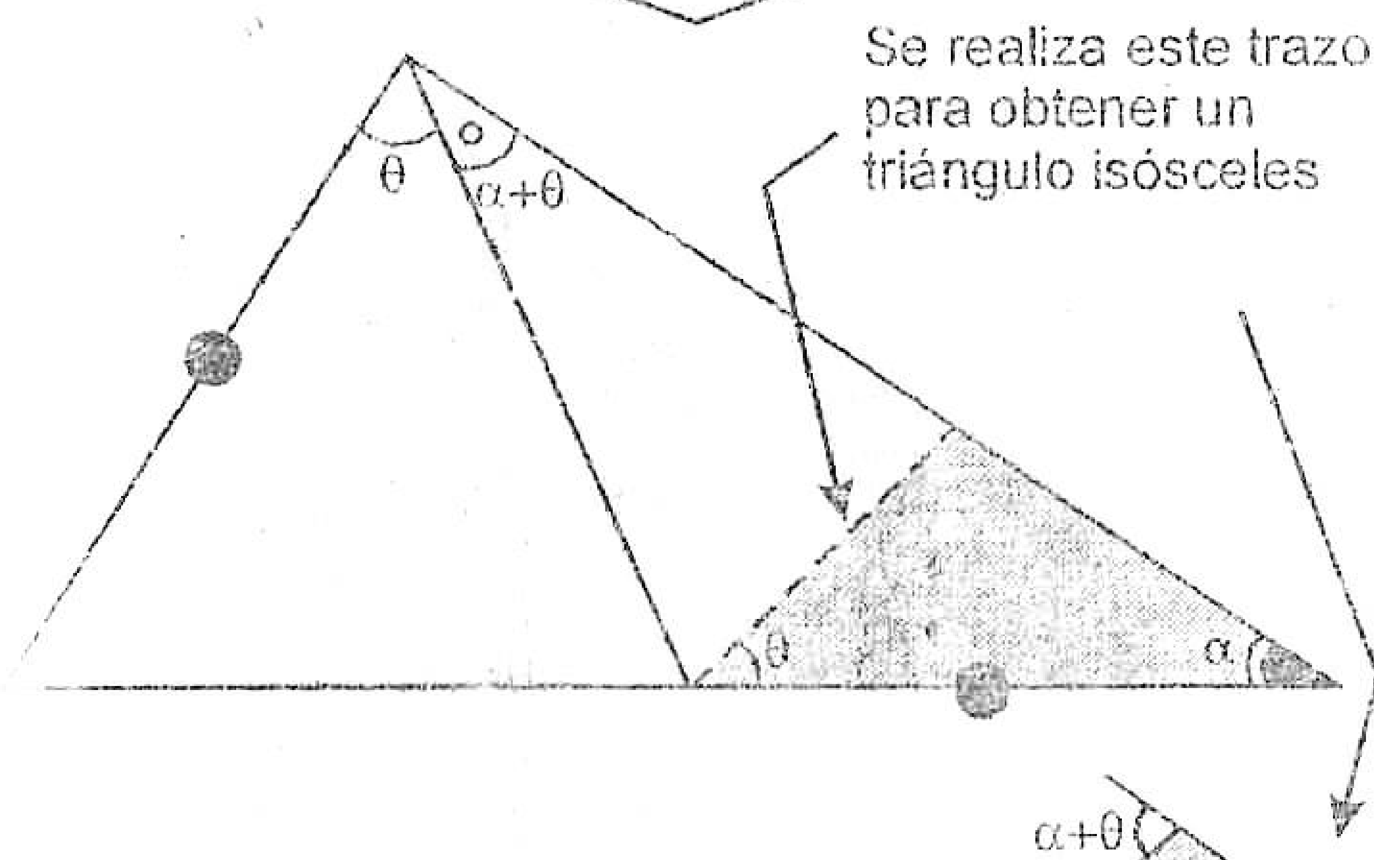
"BUSCANDO CONGRUENCIA"

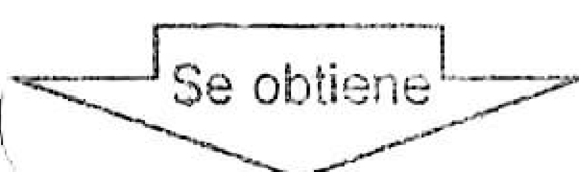
Cuando se observan triángulos de las siguientes con lados iguales en forma alternada, se realizaran los siguientes trazos.

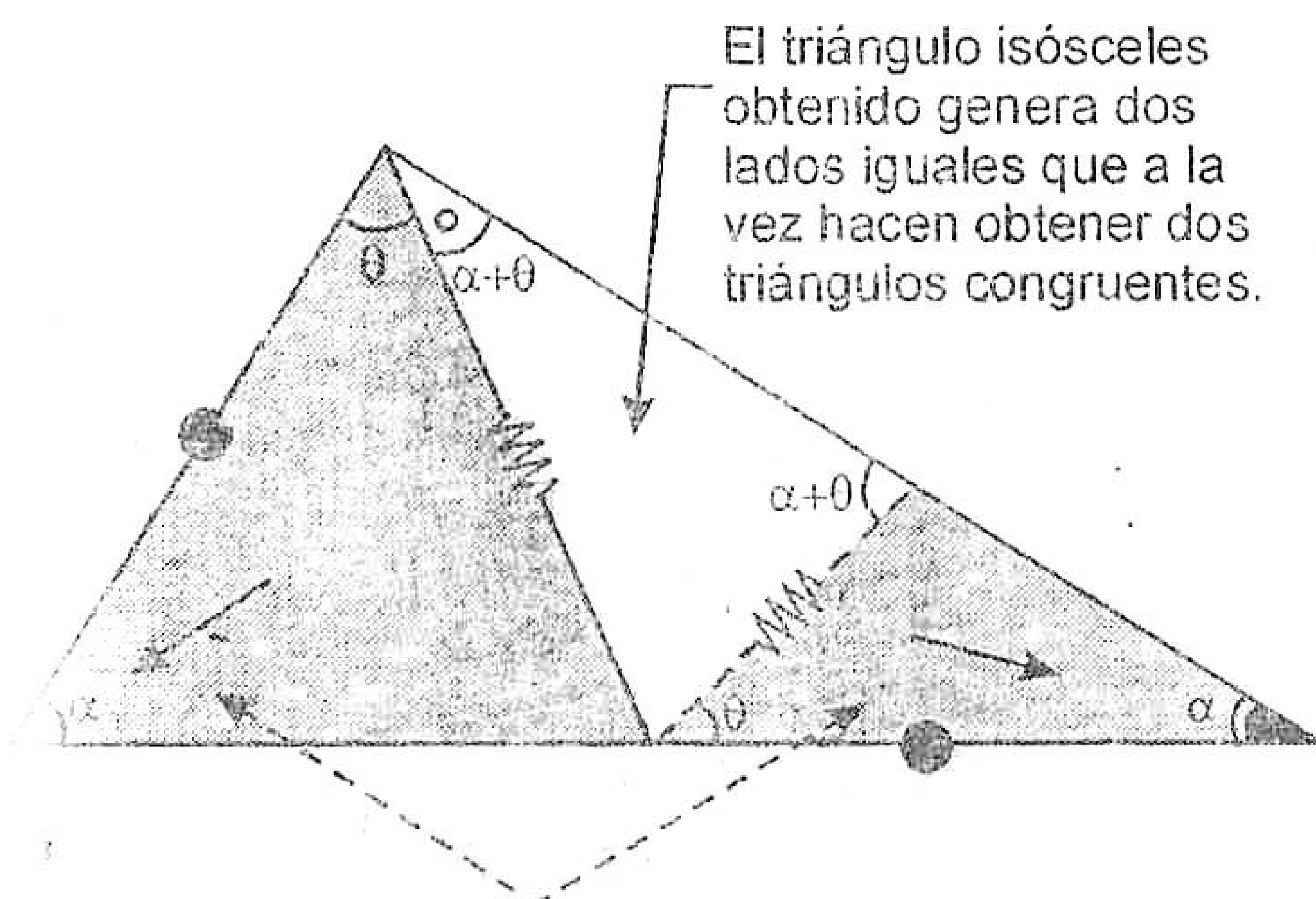
CASO I





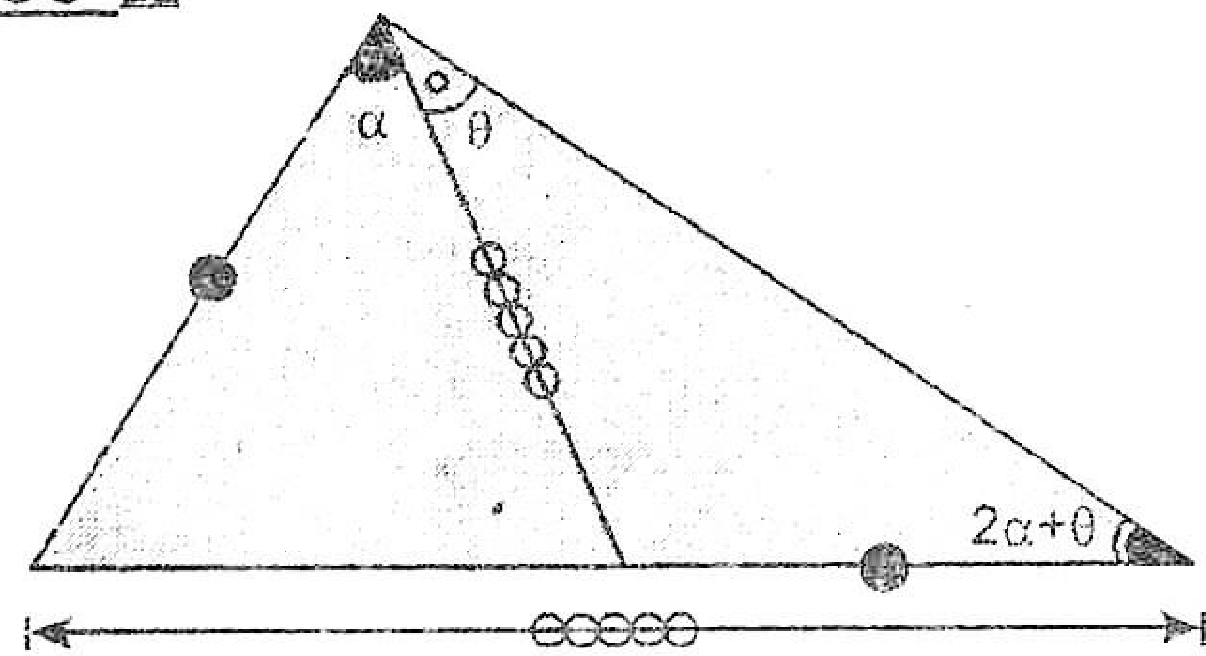




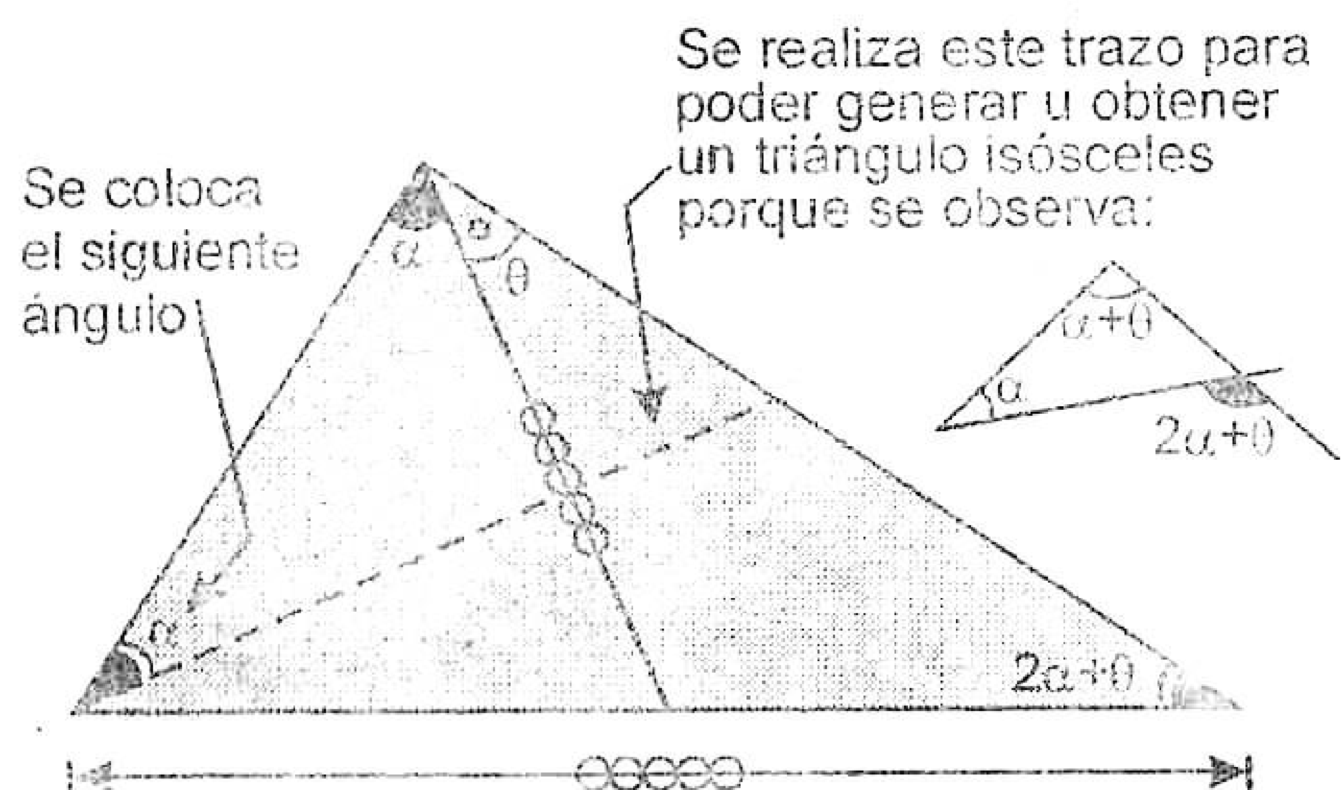


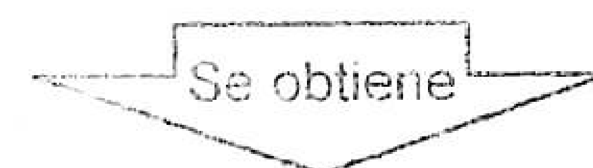
Se obtienen dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.) y se aplica el principio de la congruencia.

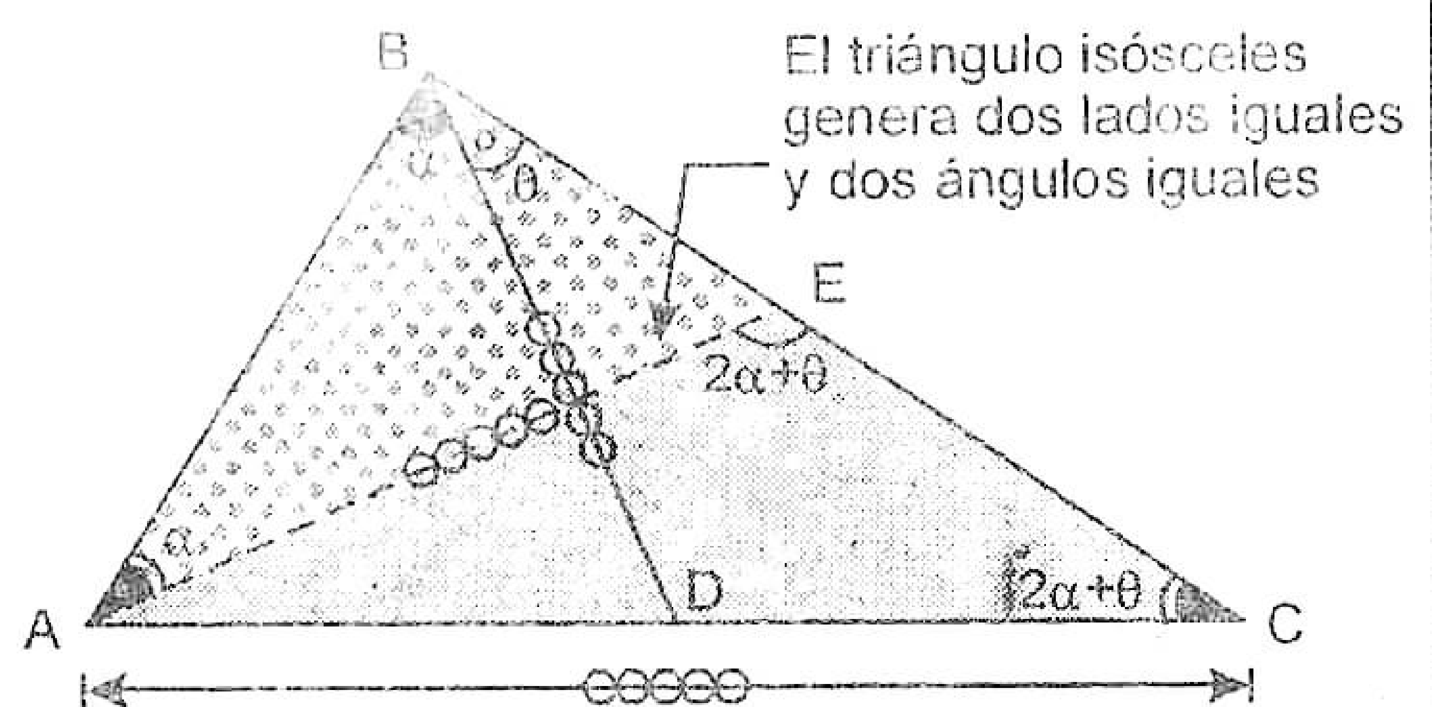
CASO II

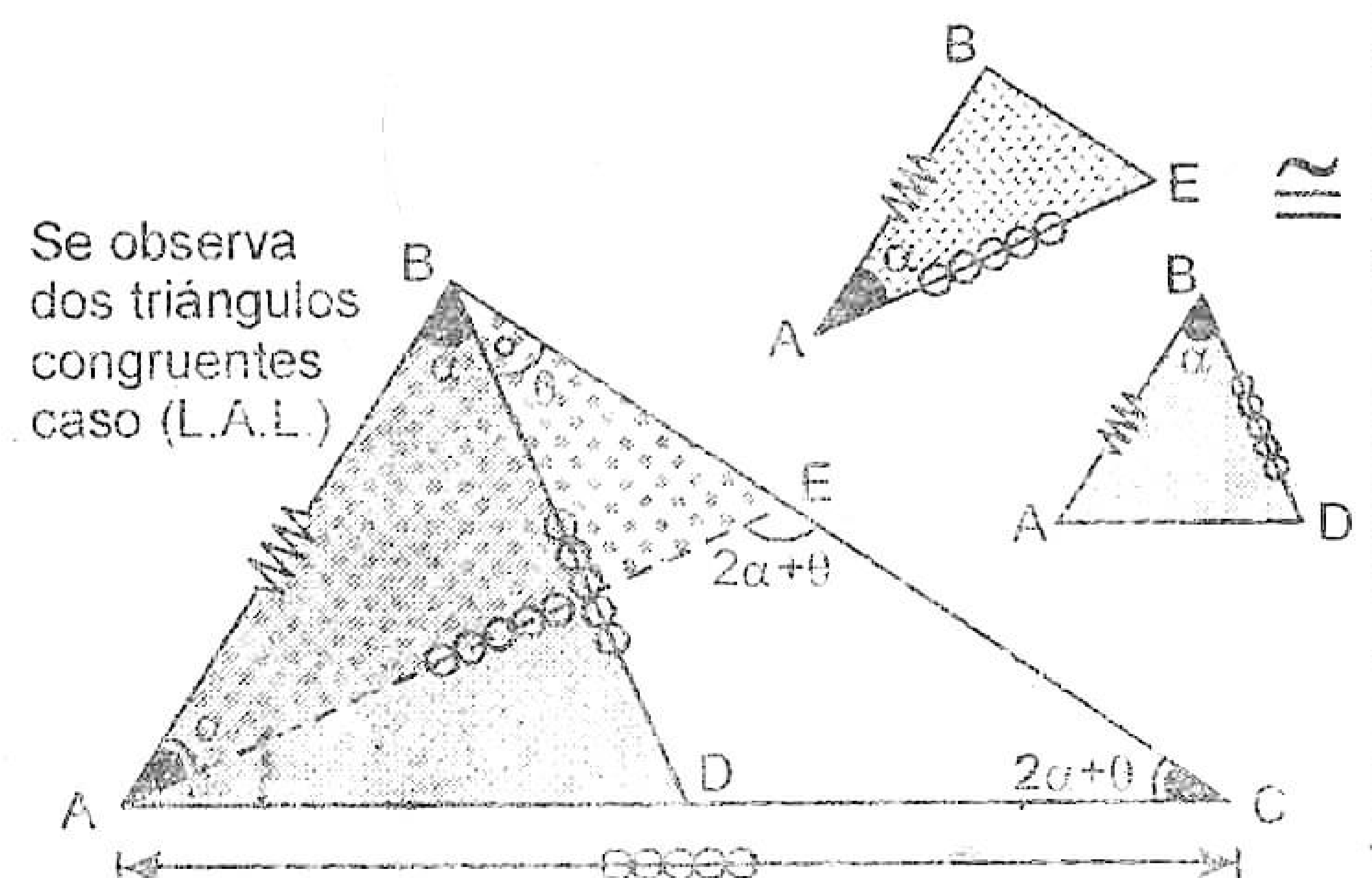






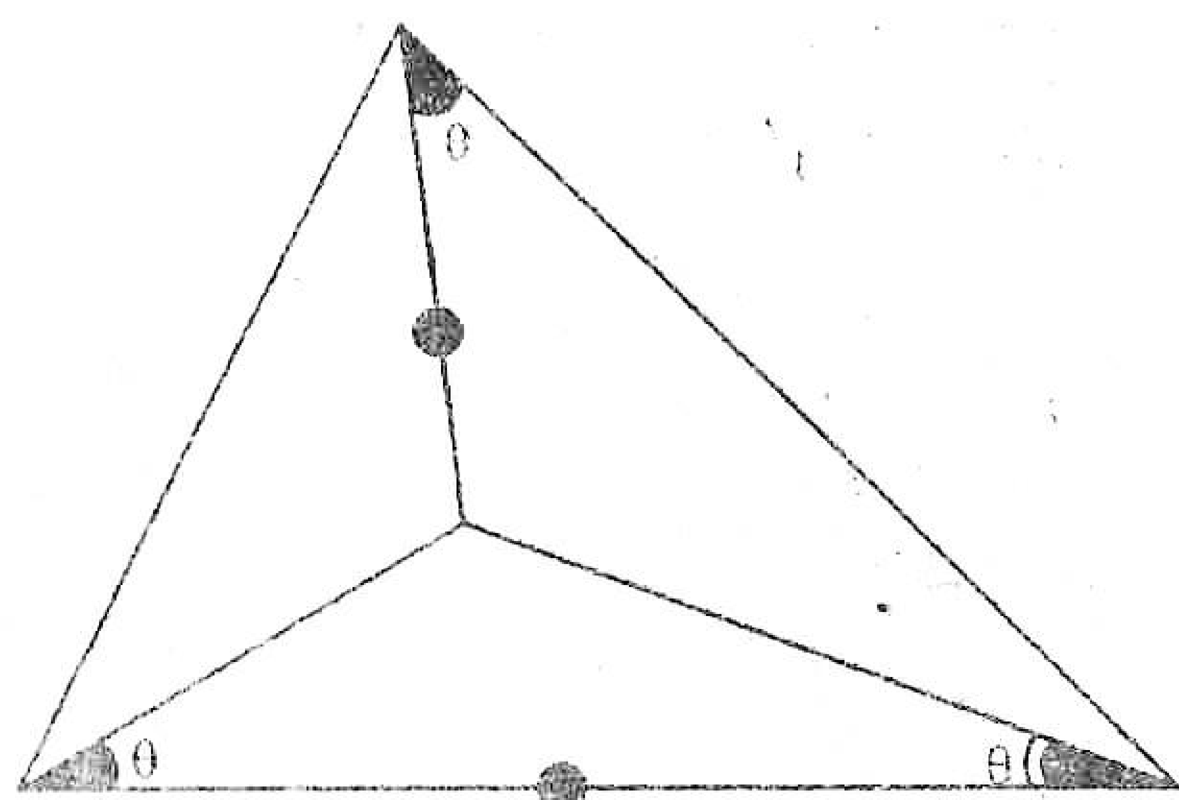


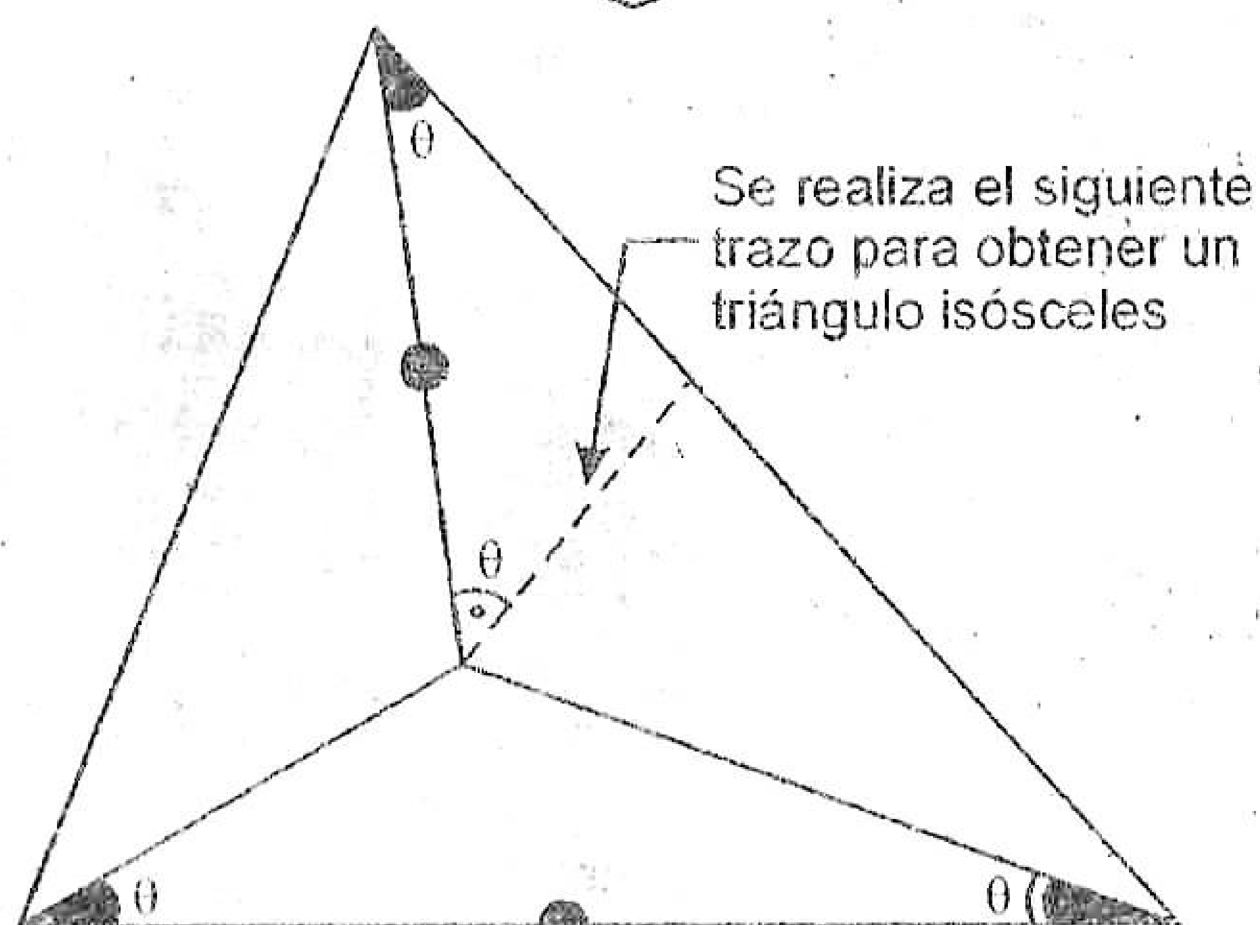


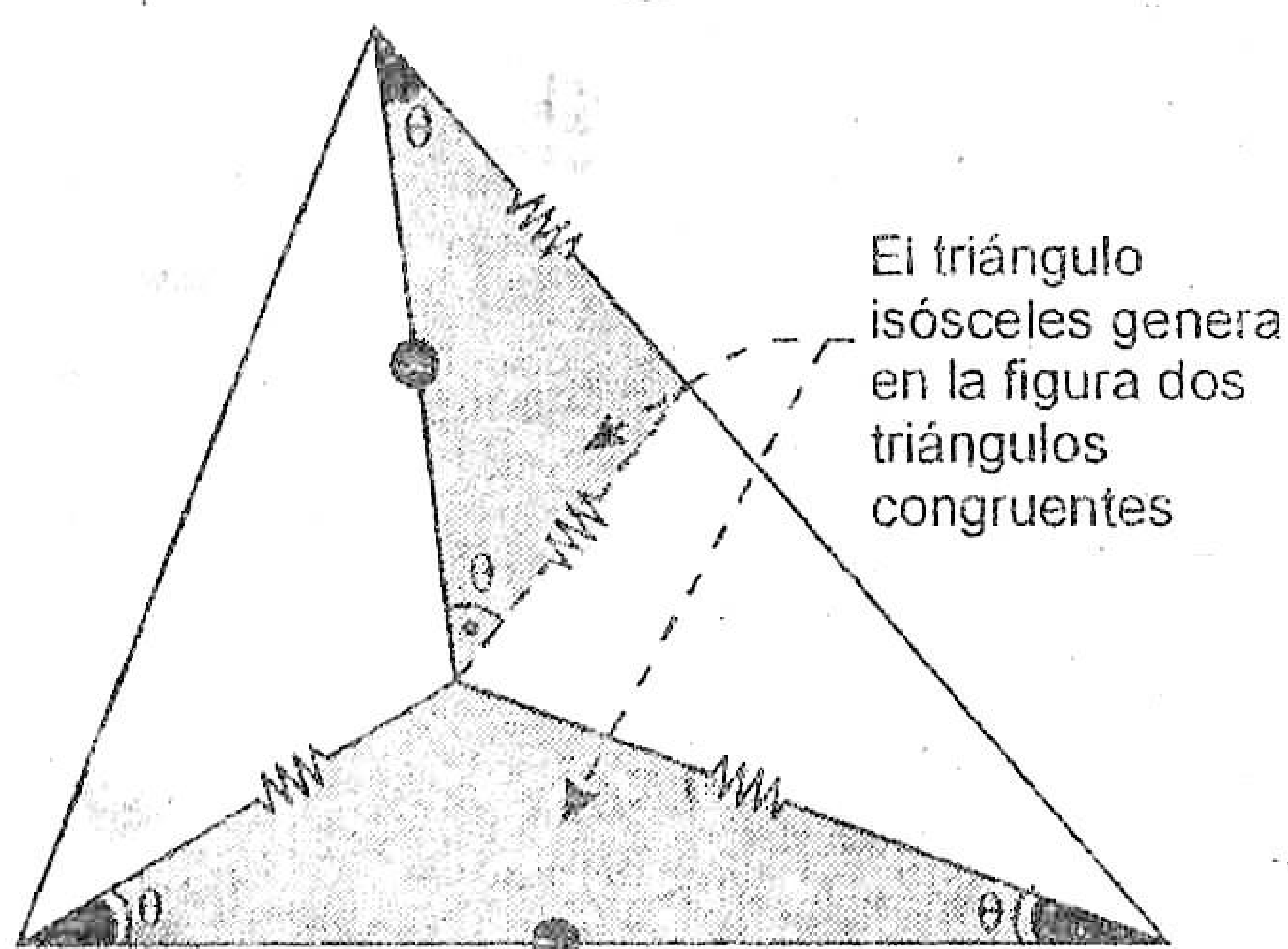


CASO III

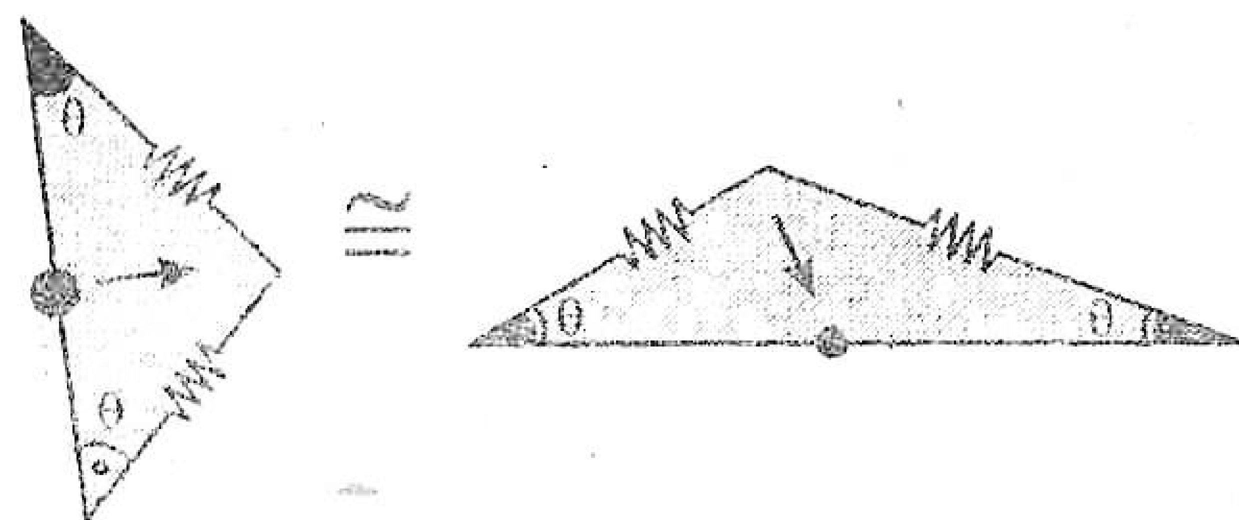
Si tenemos la siguiente figura con las siguientes características.





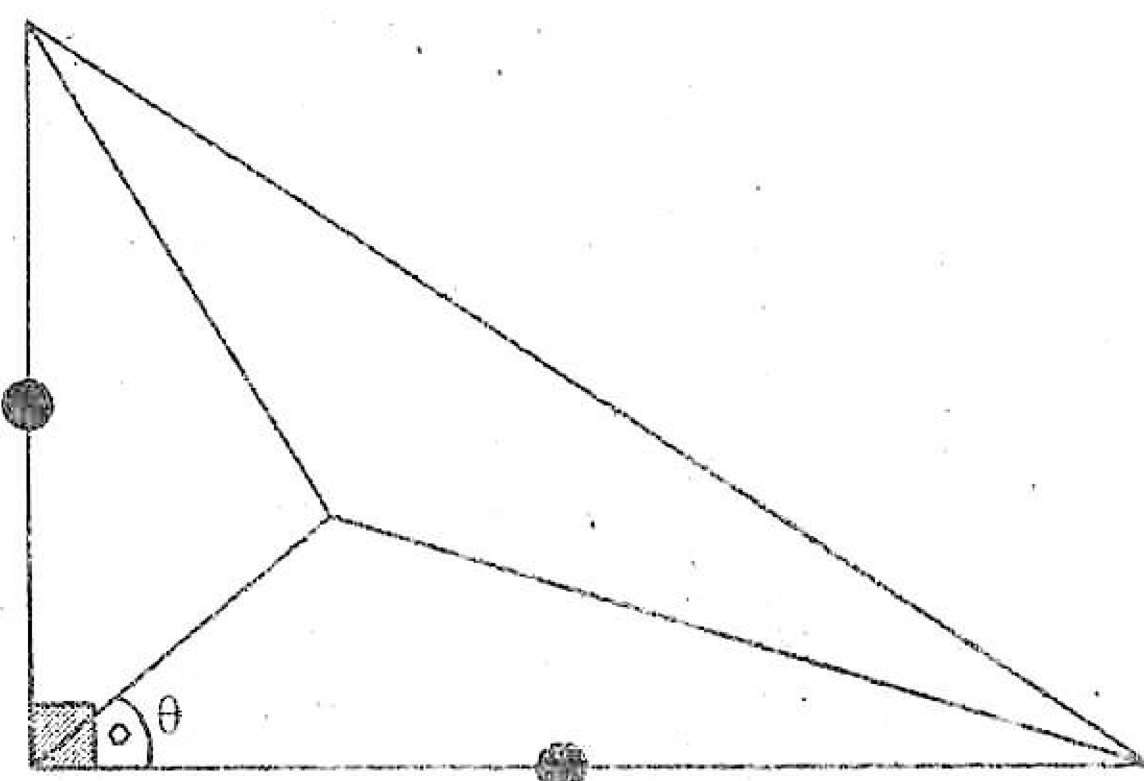


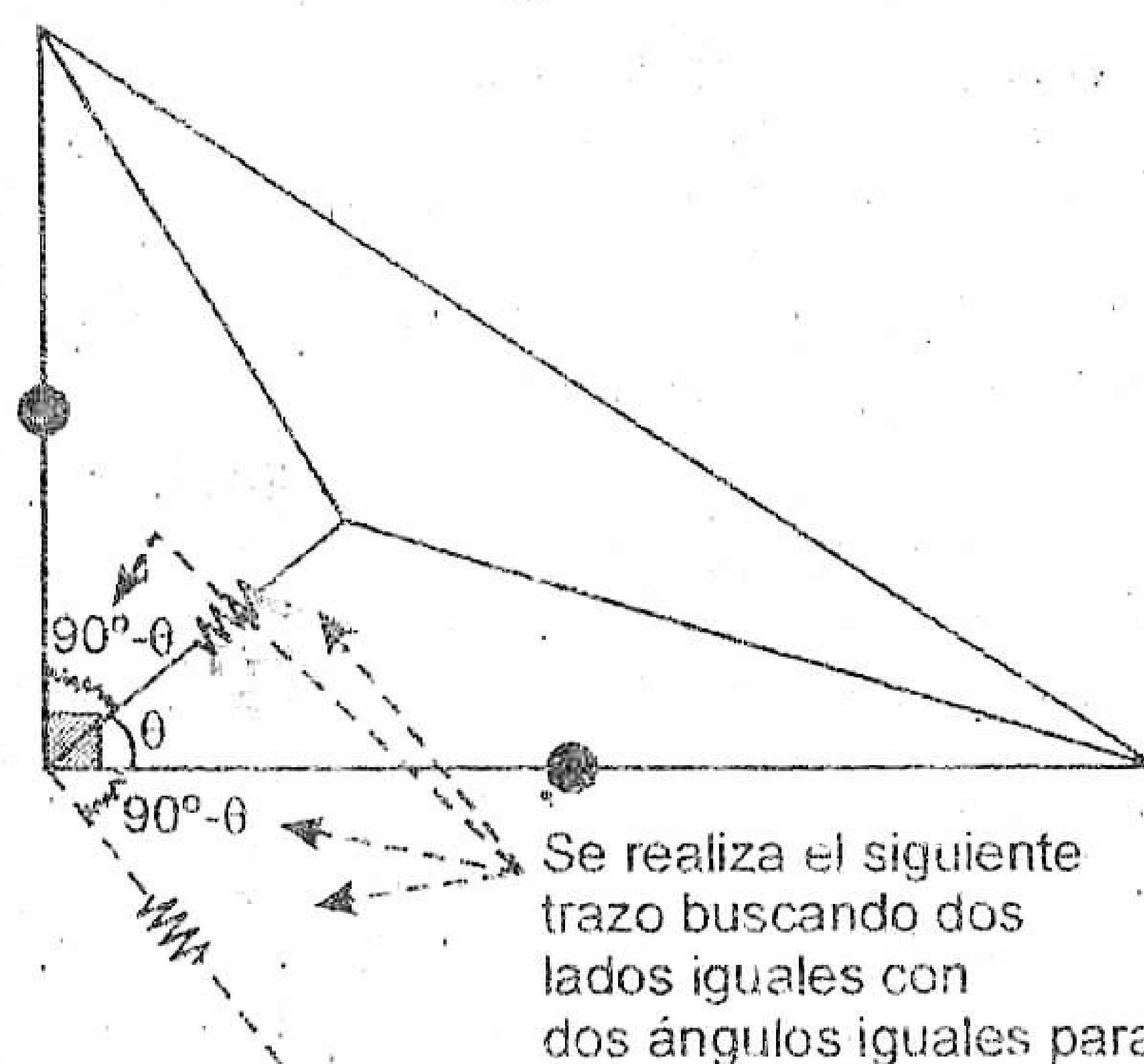
Se observa congruencia, caso (A.L.A.)

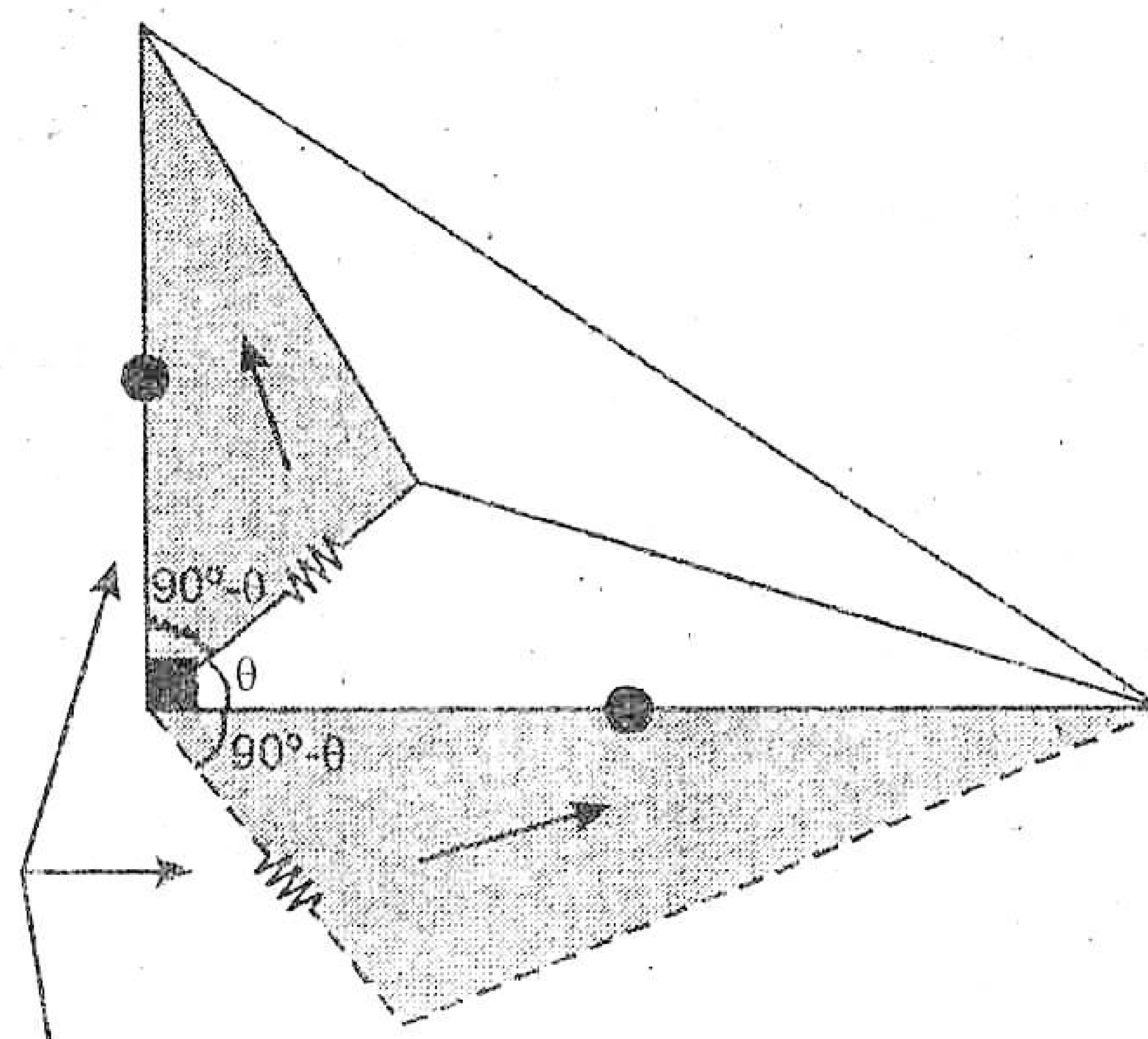


CASO IV

Si tenemos la siguiente figura con la siguiente característica.



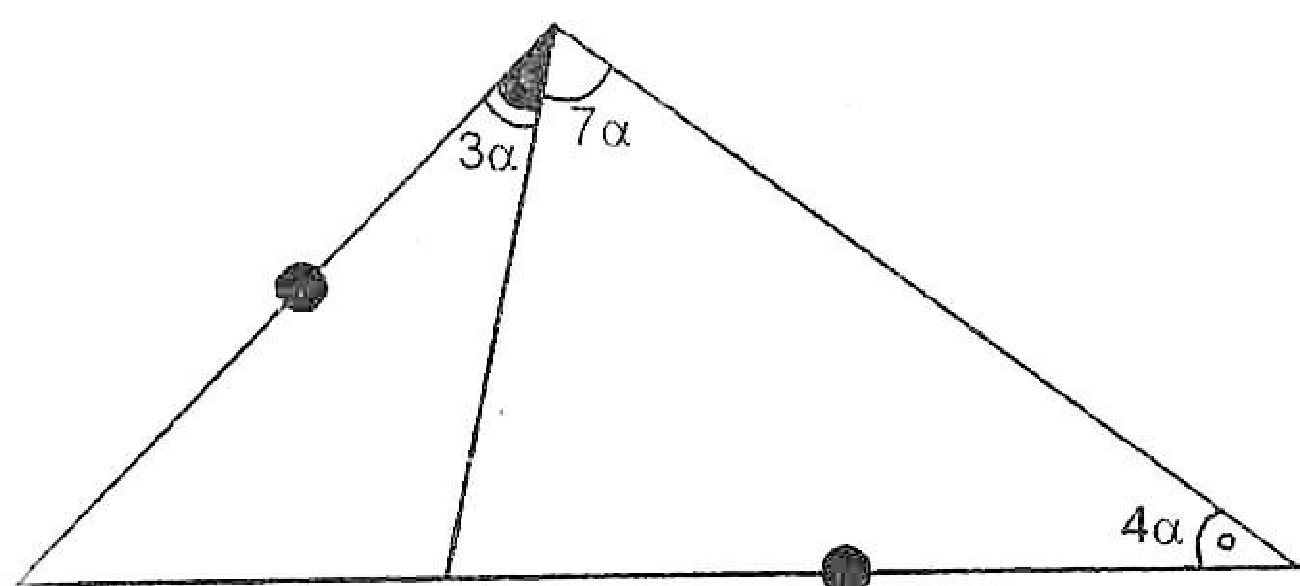




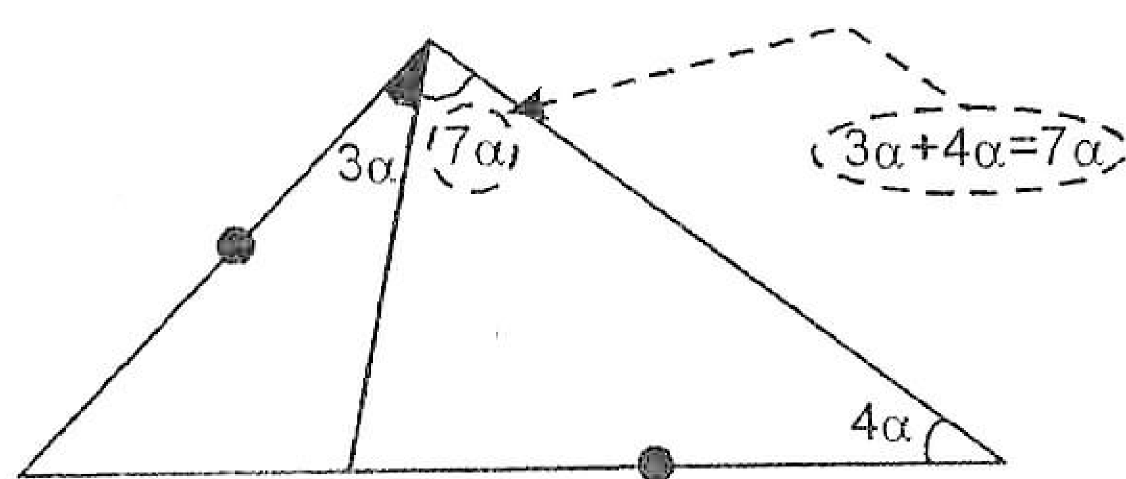
Se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)
entonces se aplica "a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"

...EMPLO Nº 1

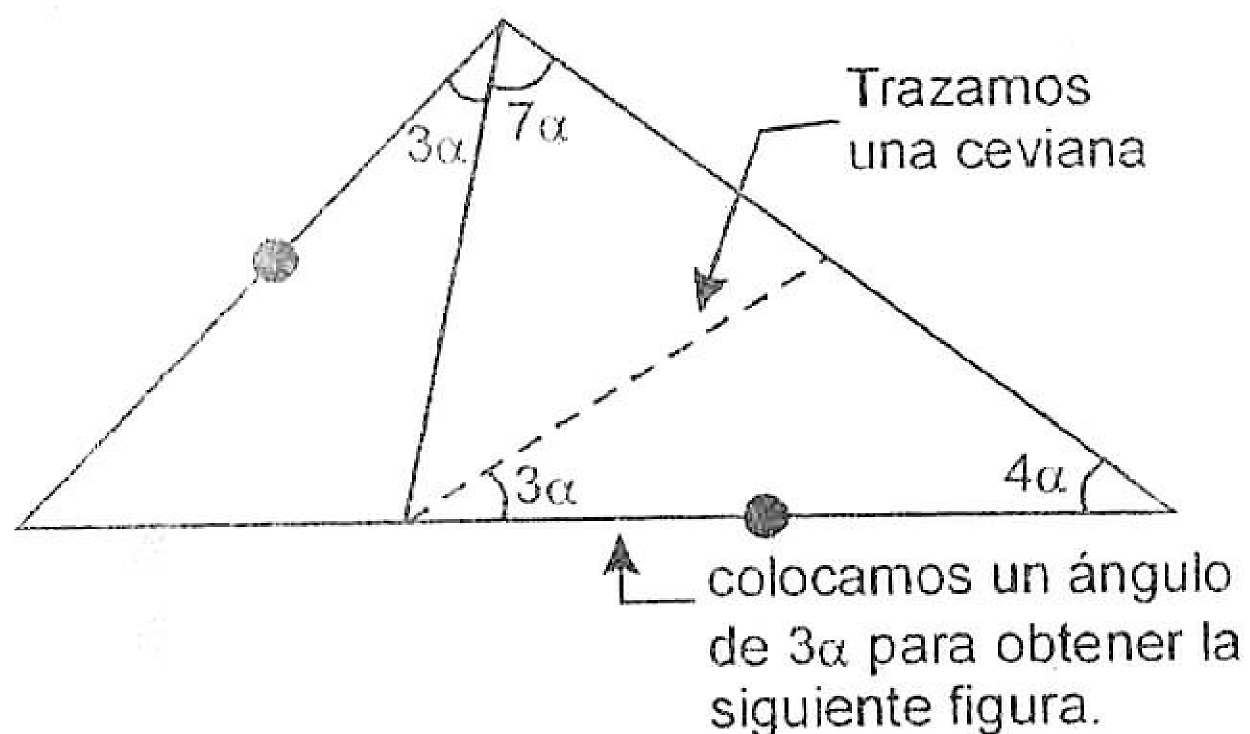
...lcular "α":

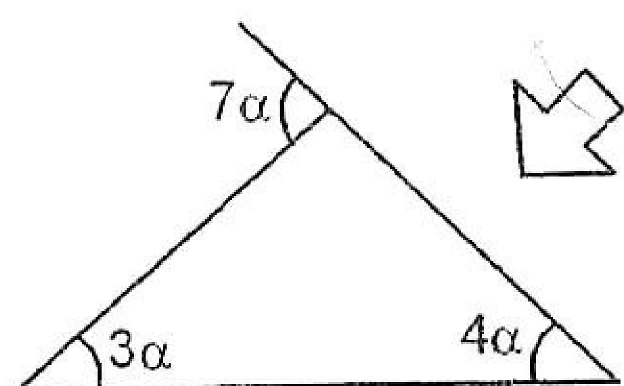


...olución: Se observa en la figura.

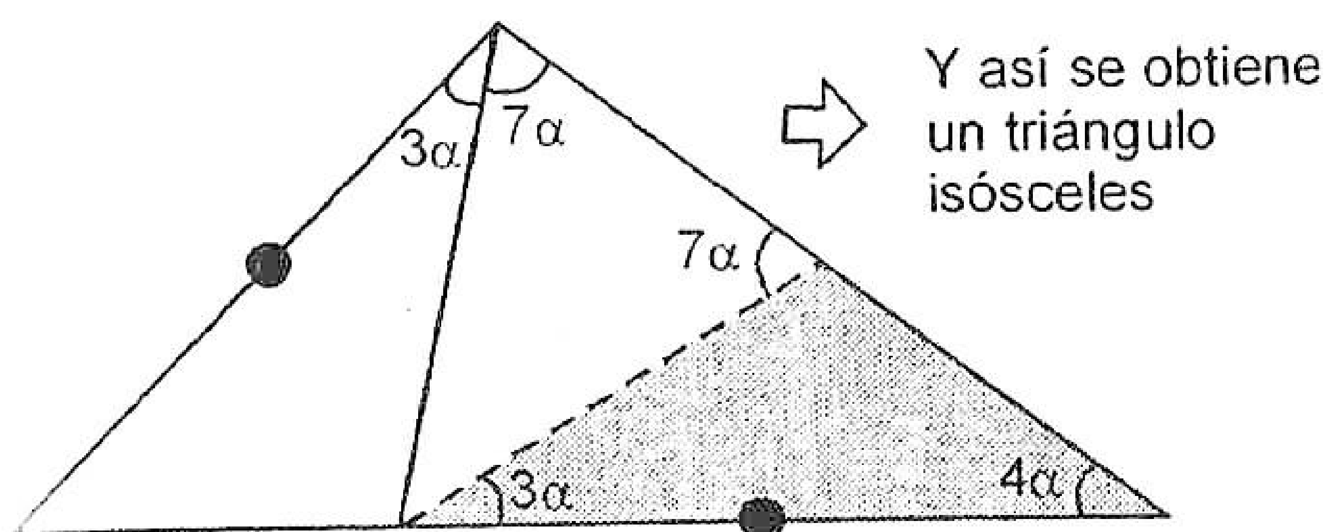


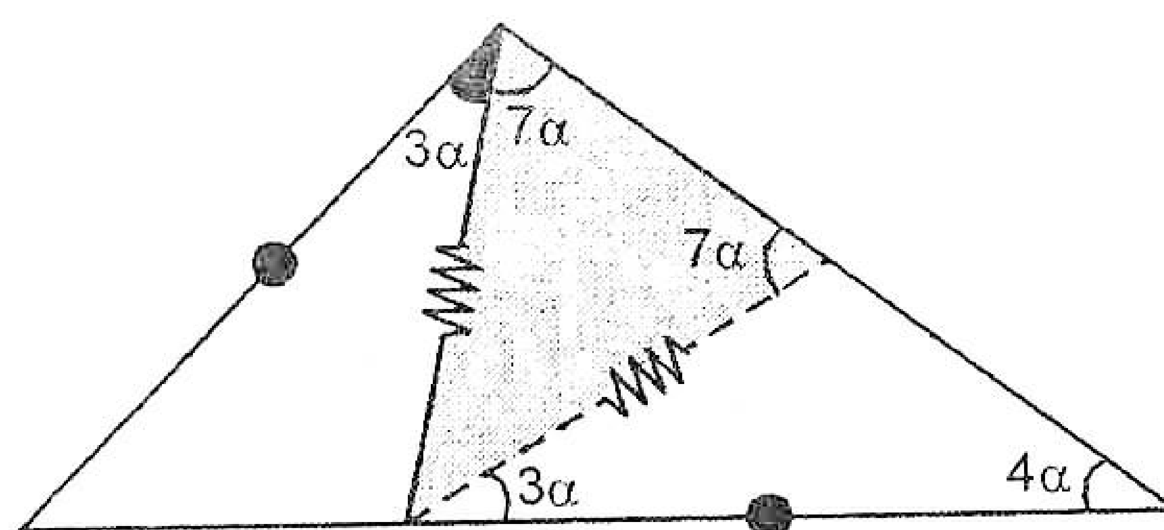
...aso Nº 1:
...omo vemos lados iguales en forma alternada ...ntonces hacemos.



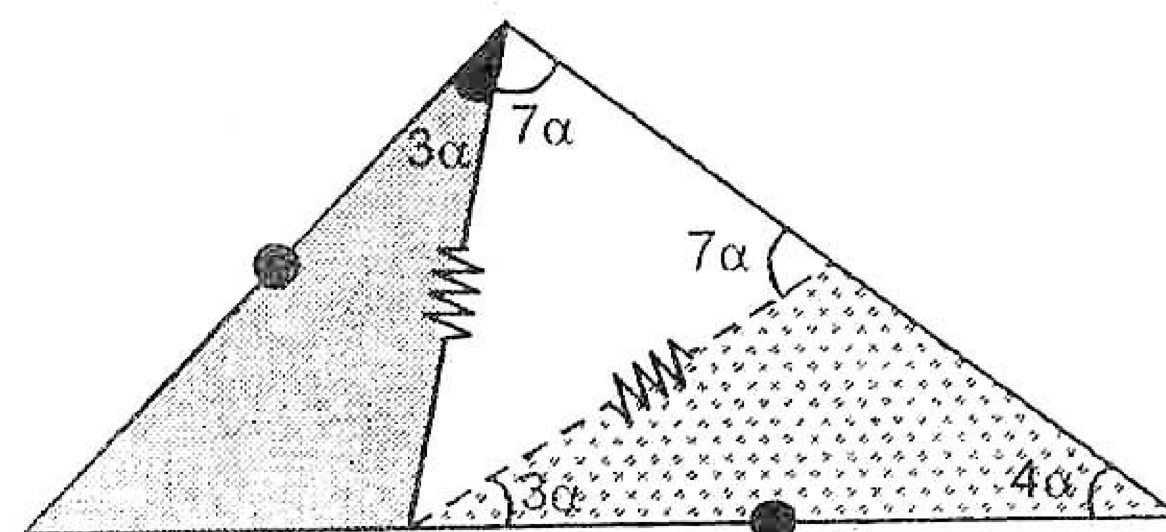


...aso Nº 2:

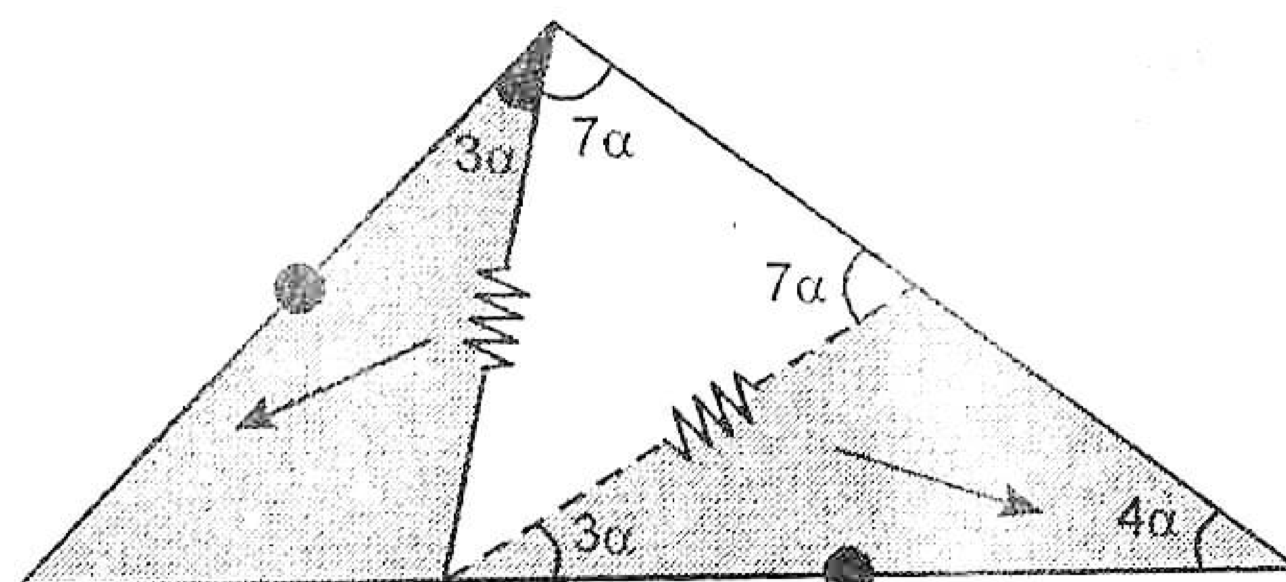




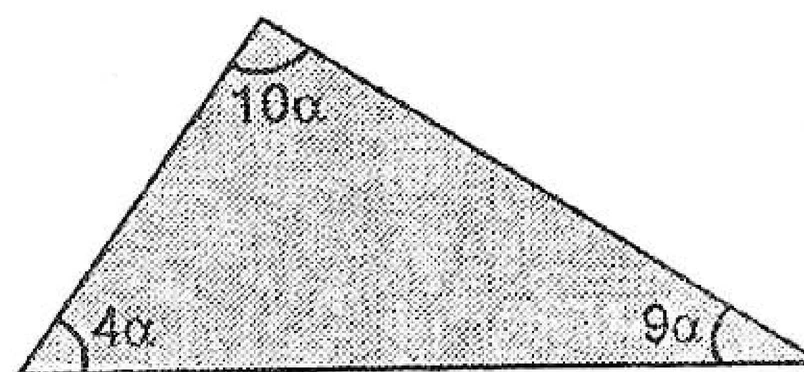
Paso Nº 3: Luego se observa dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Luego se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



Paso Nº 4:



$\Rightarrow$ En el triángulo total.

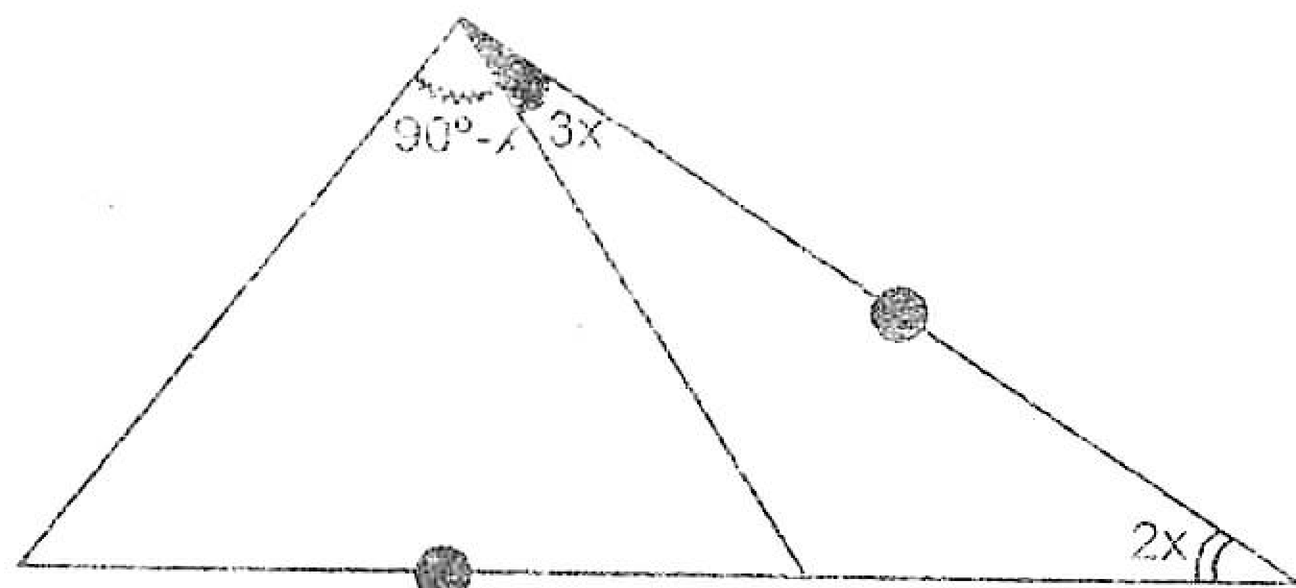
$$4\alpha + 3\alpha + 7\alpha + 4\alpha = 180°$$

$$18\alpha = 180°$$

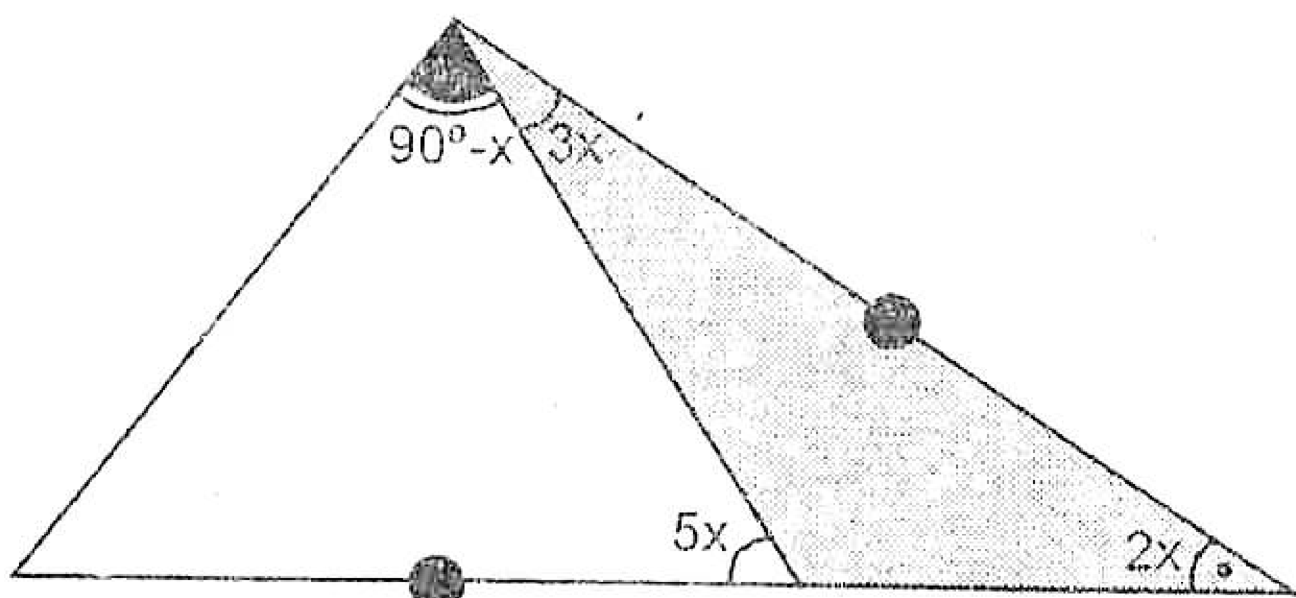
$$\alpha = 10°$$

EJEMPLO Nº 2

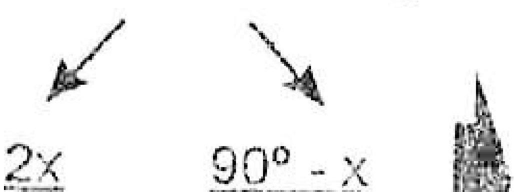
Calcular "x"



Solución: En la figura:

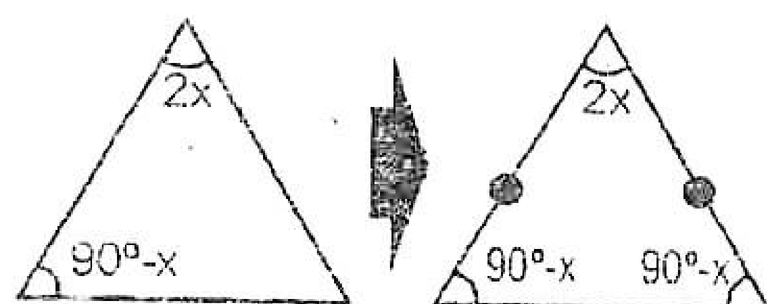


Luego se ve los ángulos



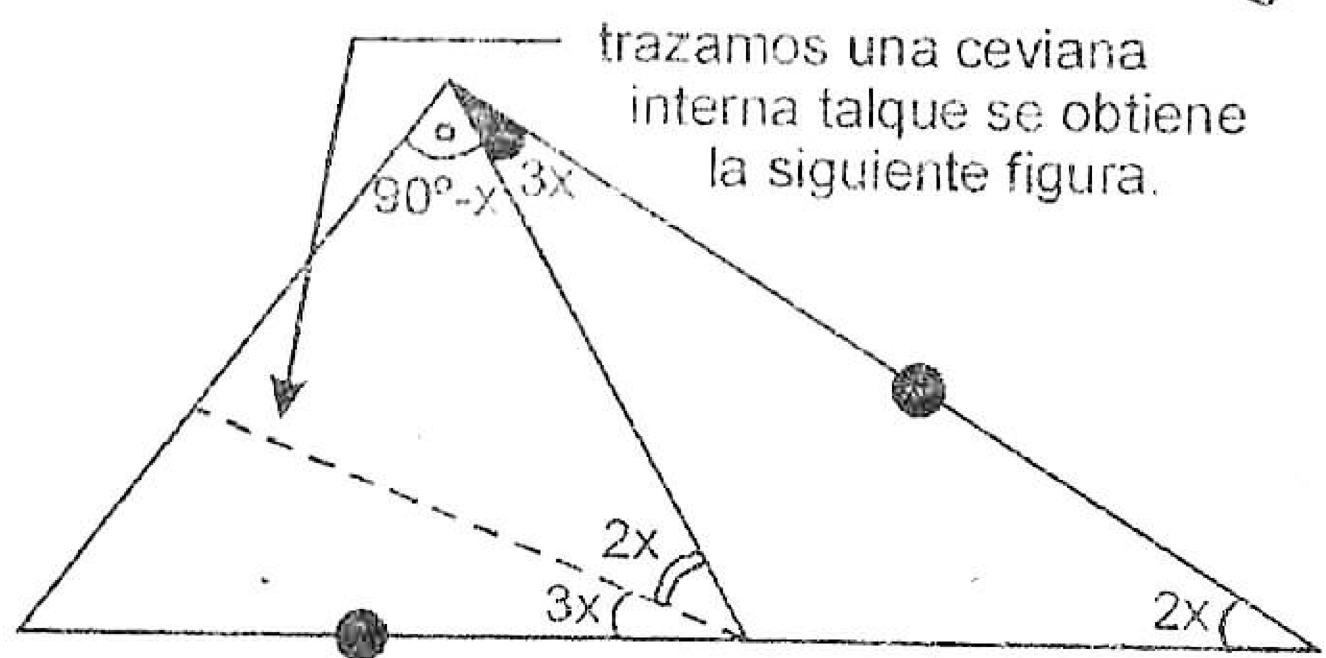
2x   90º - x

Y lo llevamos aun triángulo para obtener.

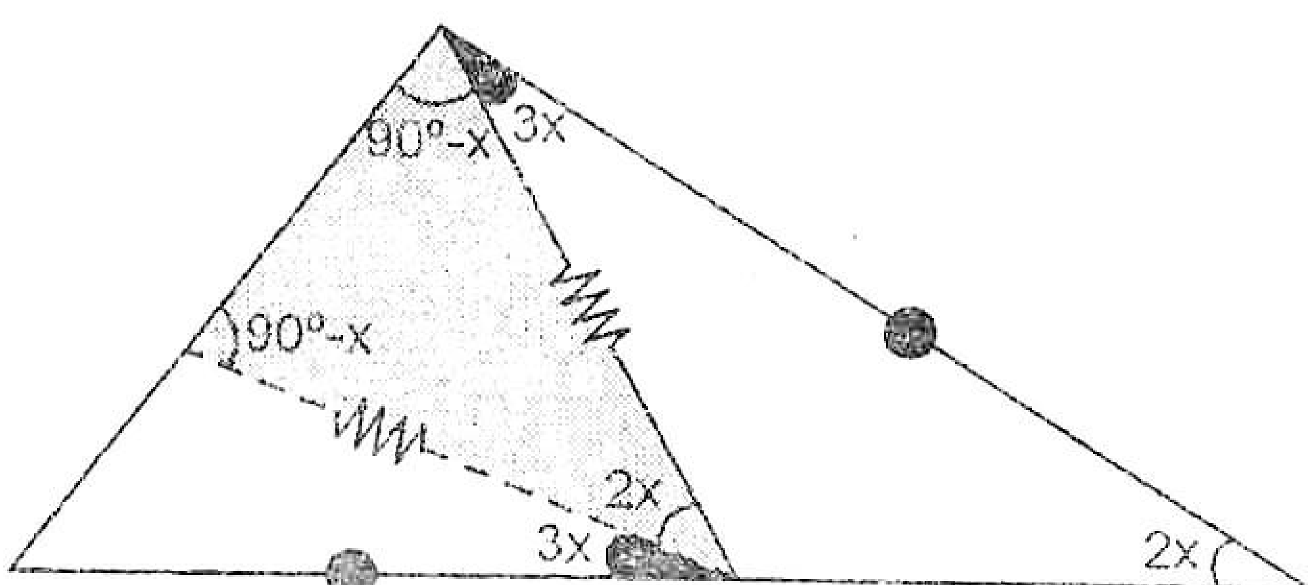


Paso Nº 1:

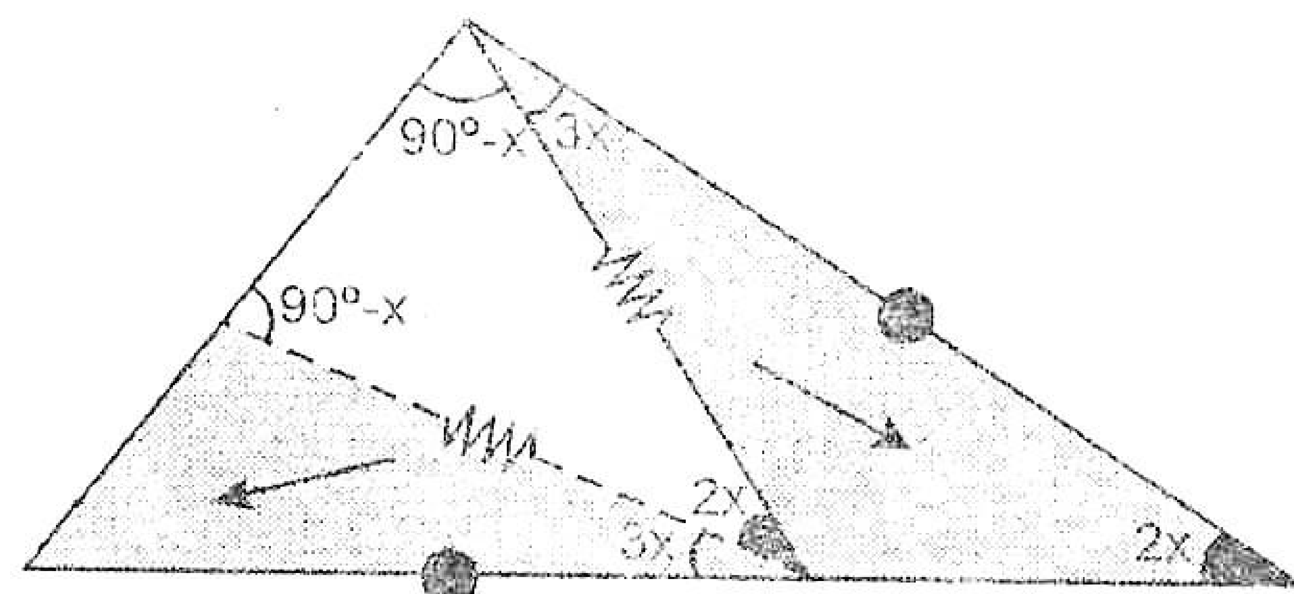
trazamos una ceviana interna talque se obtiene la siguiente figura.



Se observa un triángulo isósceles

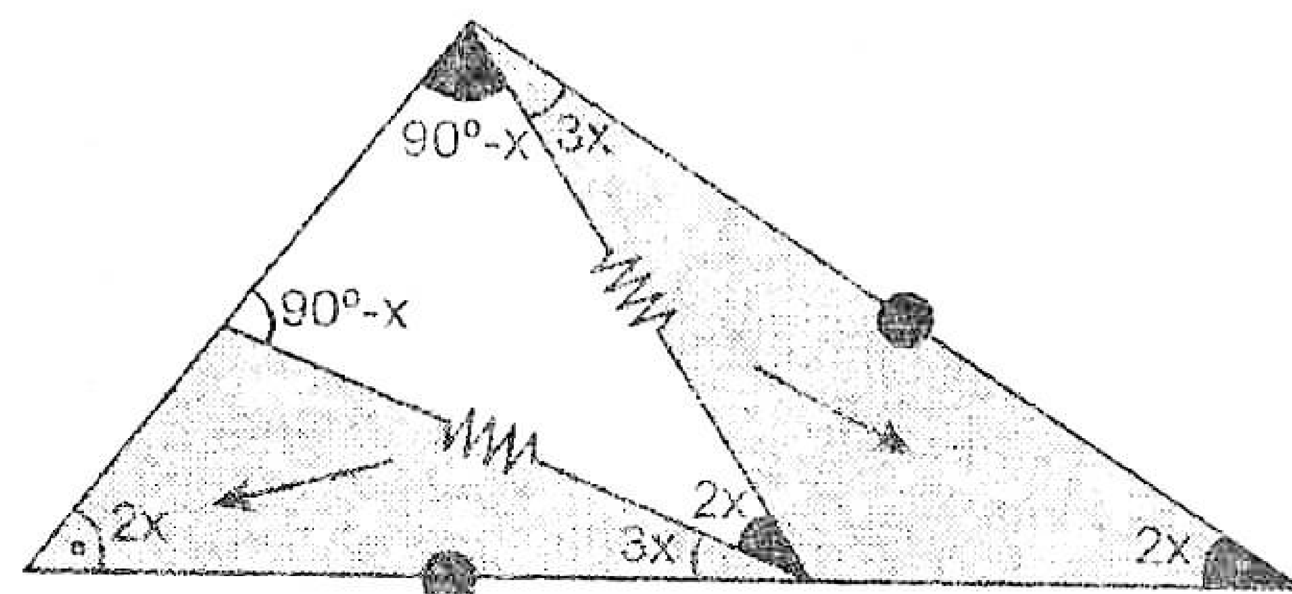


Paso Nº 2: Ahora observamos dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)

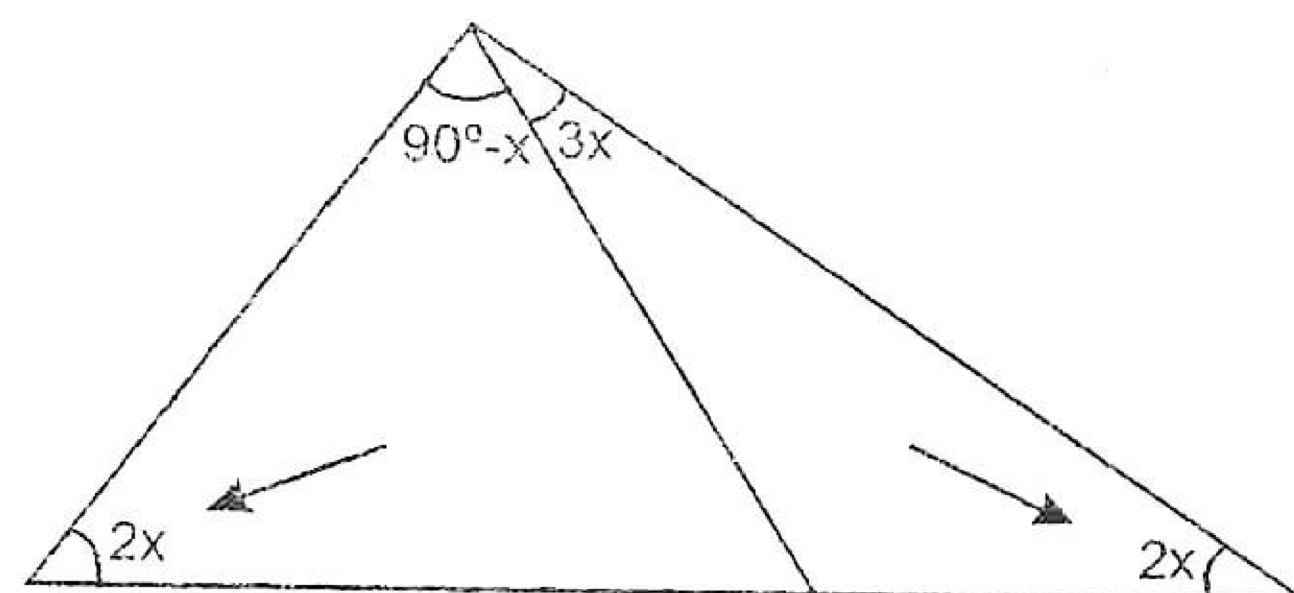




Luego se cumple:
"A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"



Paso Nº 3:
Finalmente se obtiene la siguiente figura.



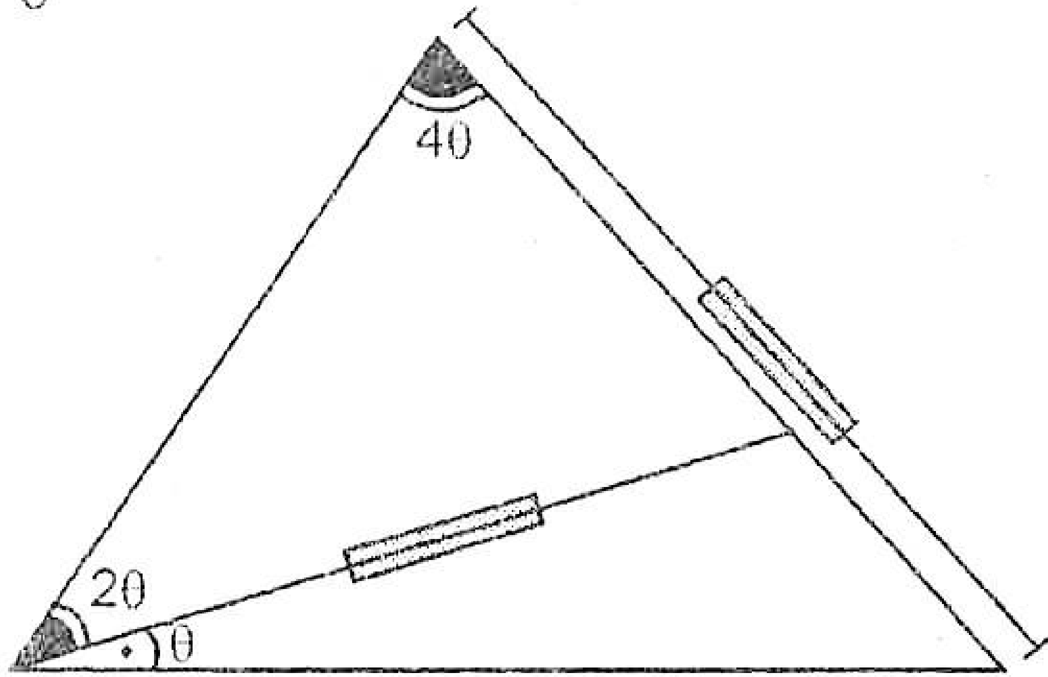
Luego: $2x + 90º - x + 3x + 2x = 180º$

$$6x = 90º$$

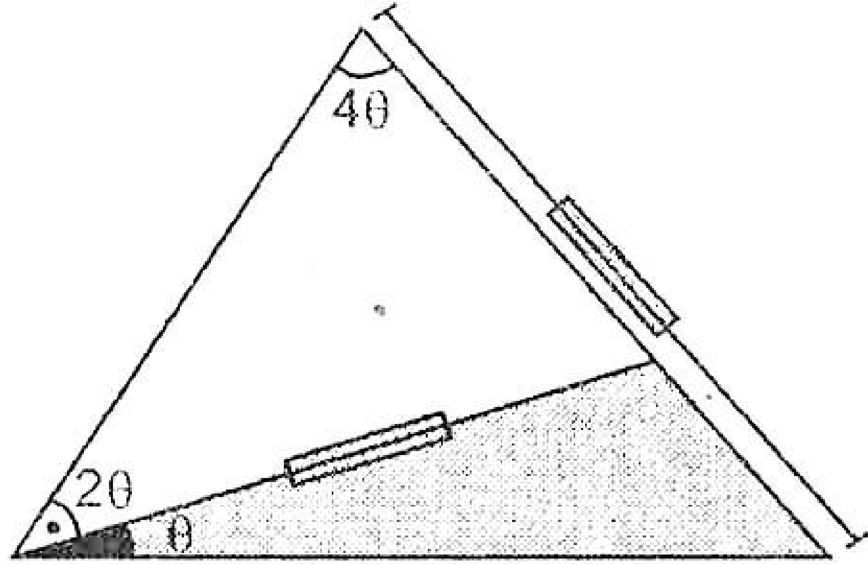
$$x = 15º$$

EJEMPLO Nº 3

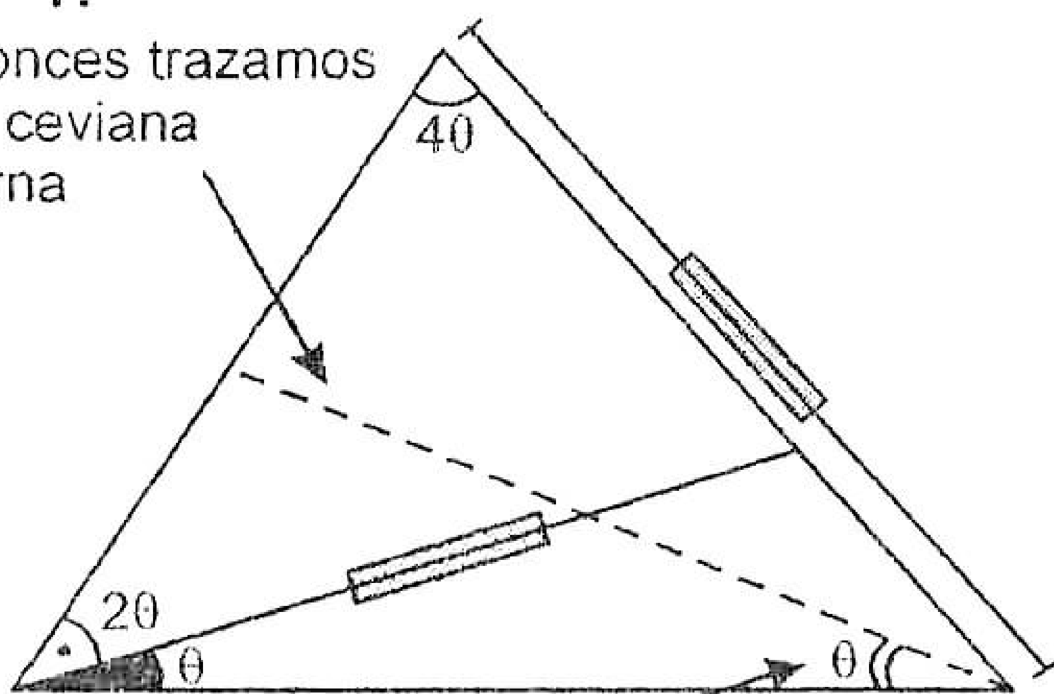
Hallar θ

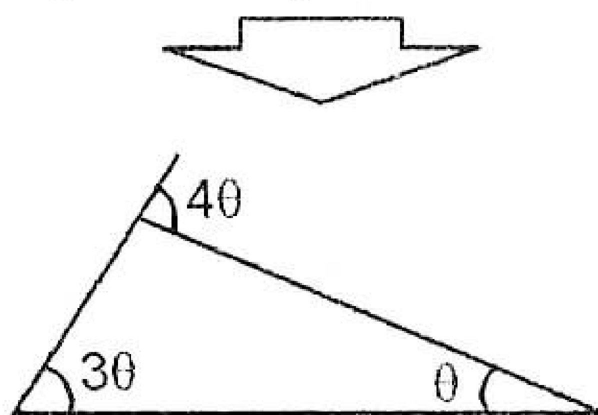


Solución: En la figura.



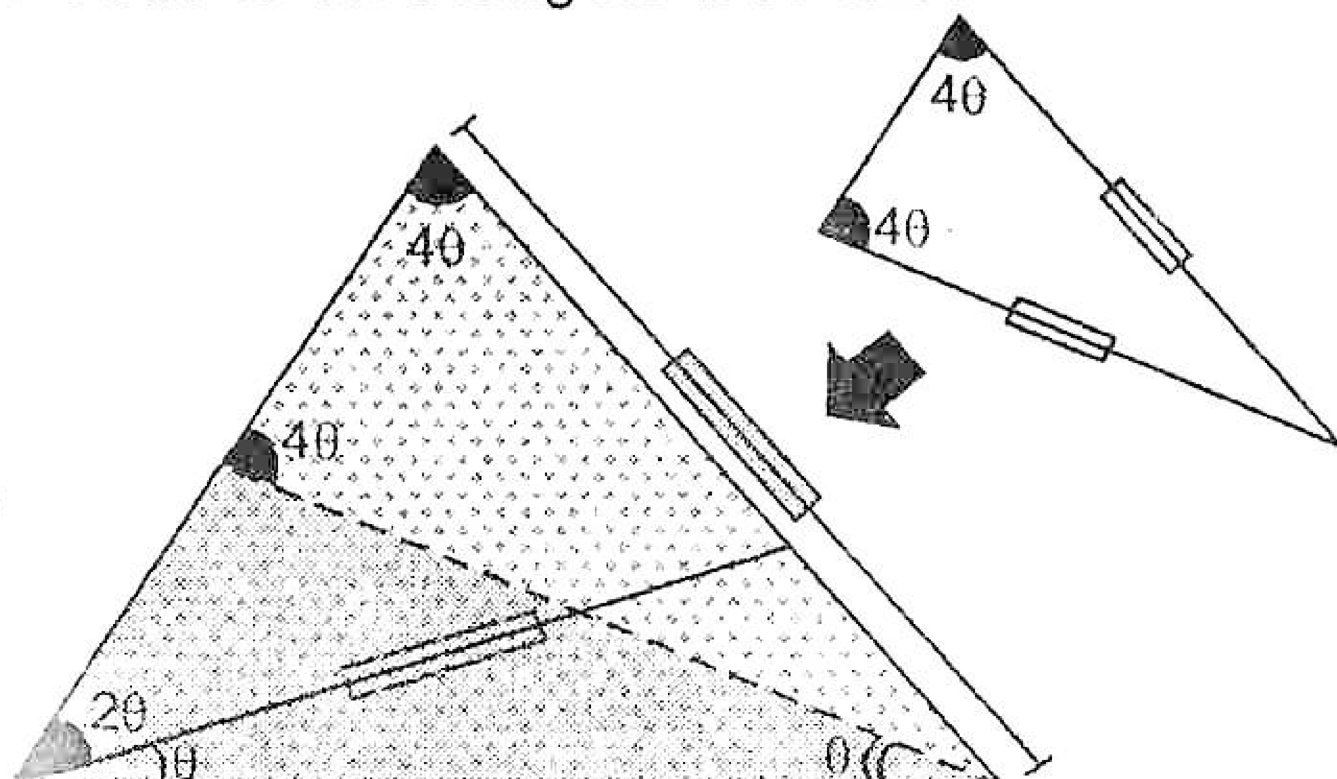
Paso Nº 1:



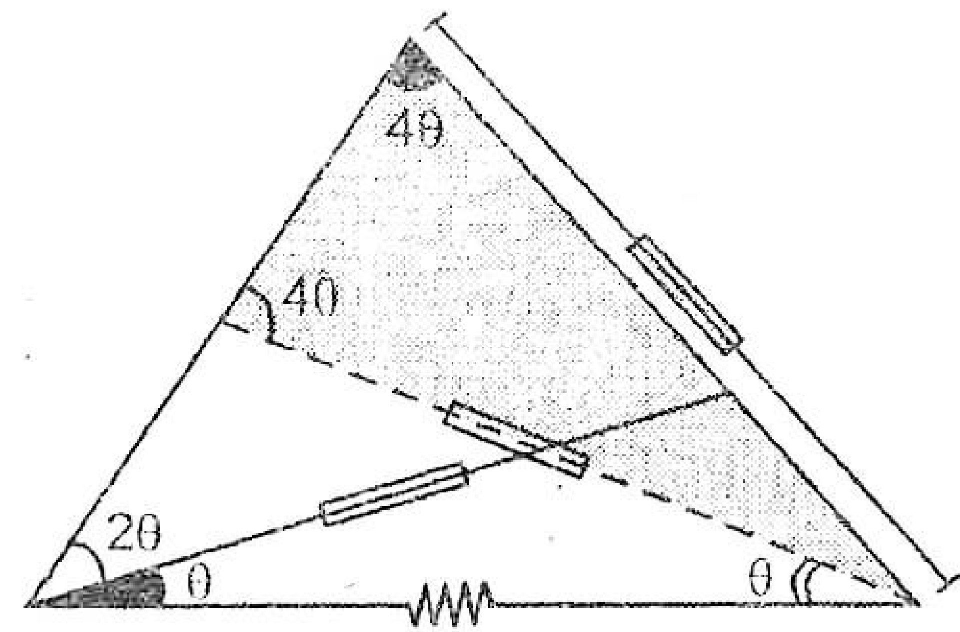




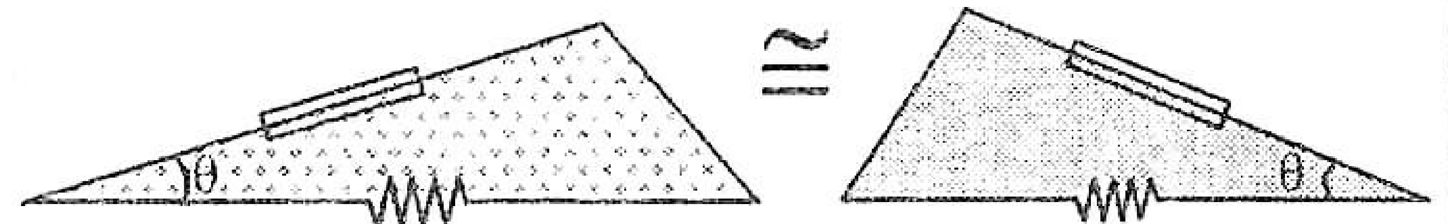
Se obtiene un triángulo isósceles.

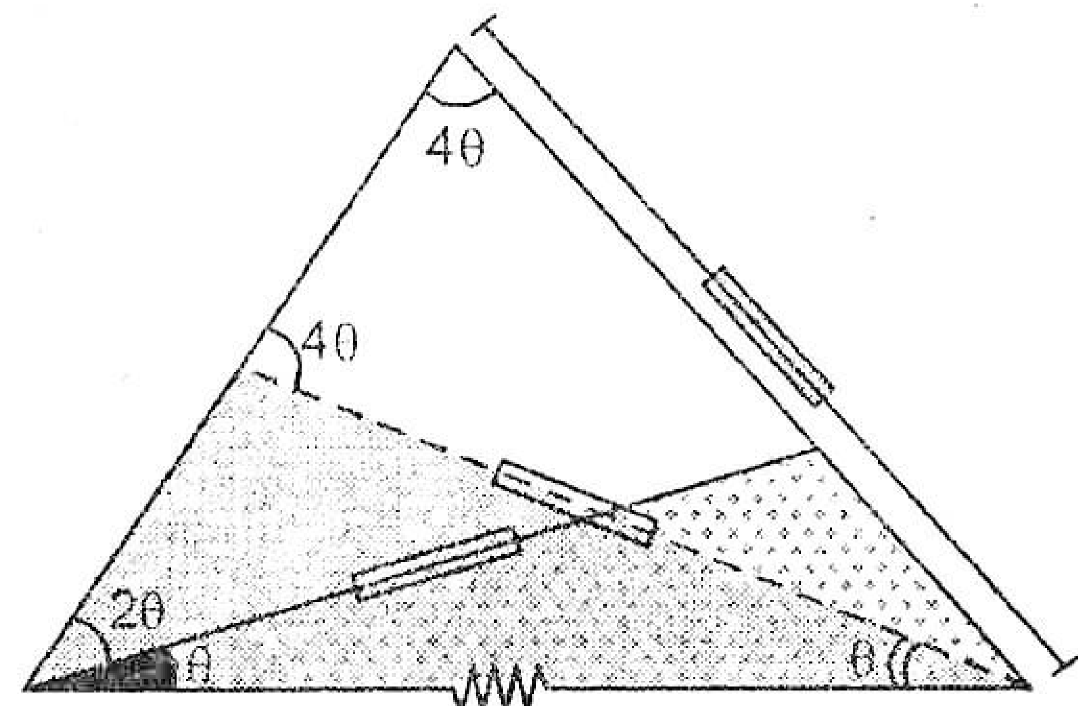


Luego:

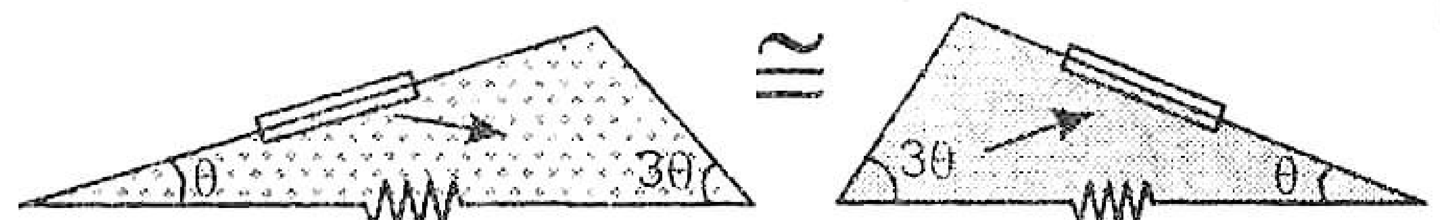


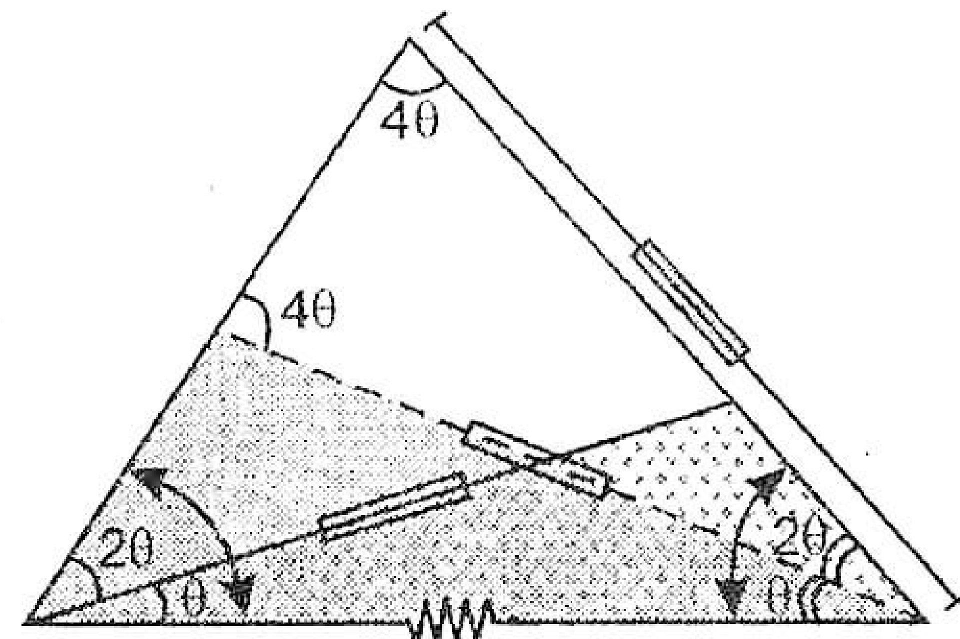
Paso Nº 2: Se observa dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



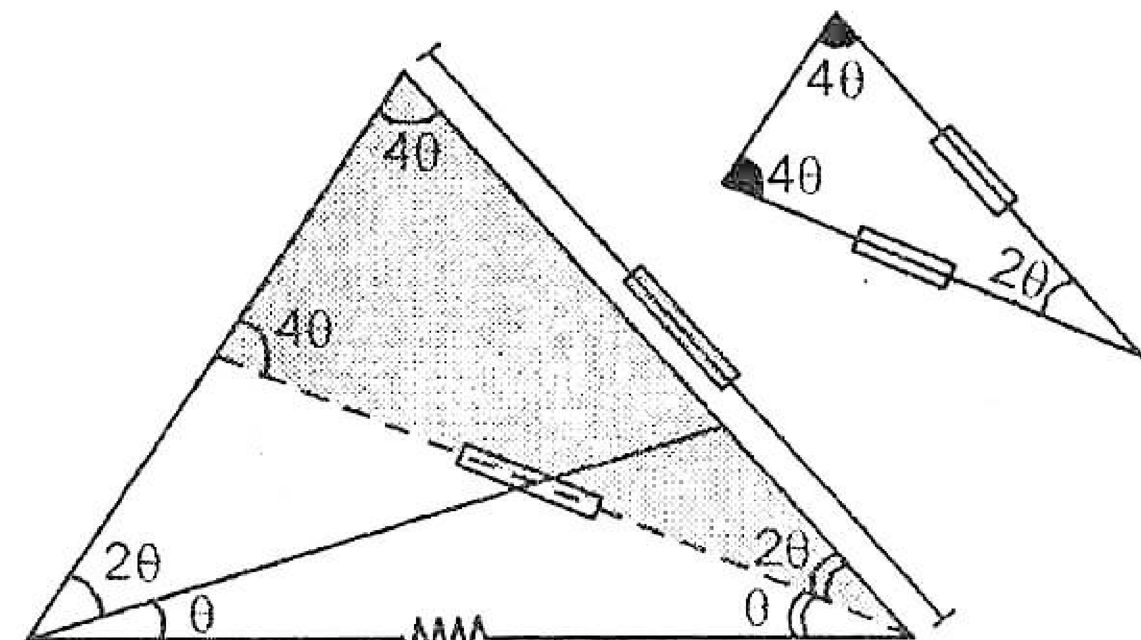


Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"





Paso Nº 3: Finalmente se observa.

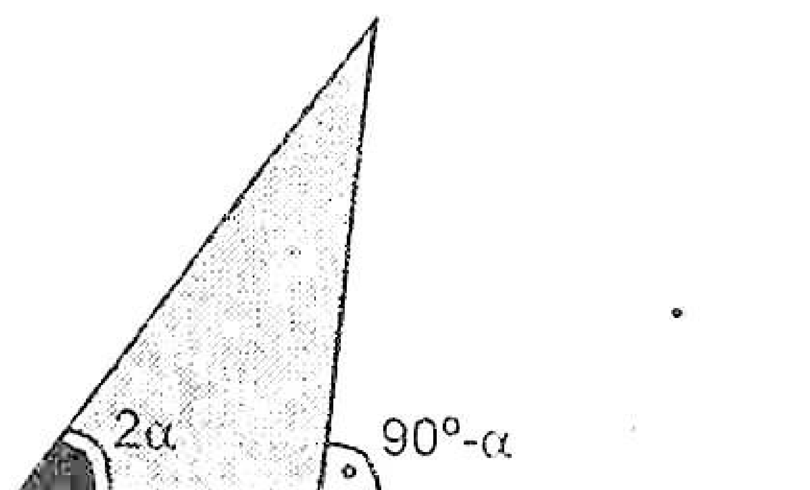


$$\Rightarrow \quad 4\theta + 4\theta + 2\theta = 180^\circ$$
$$10\theta = 180^\circ$$
$$\theta = 18^\circ$$

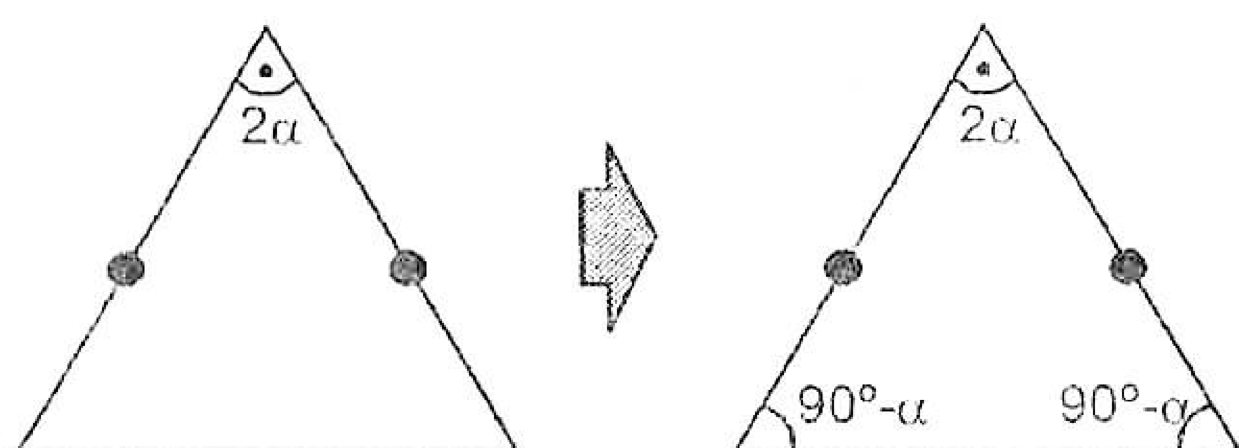
6to Criterio

"TRAZO DEL ÁNGULO SIMÉTRICO (ESPEJO)"

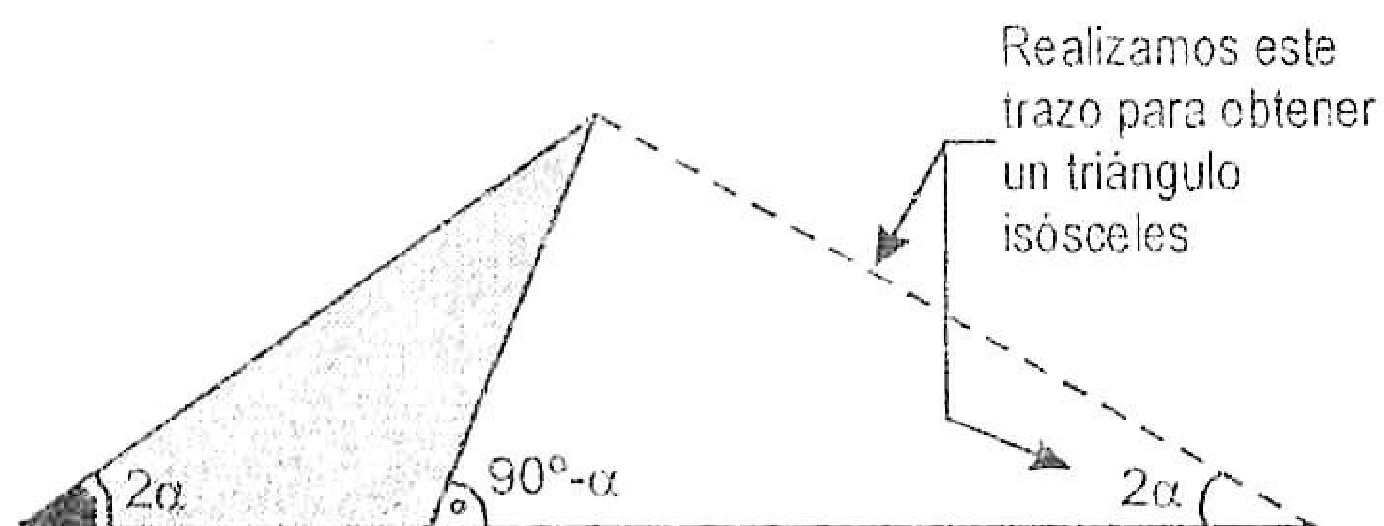
<u>CASO I:</u> Si observamos la siguiente figura con las siguientes características.



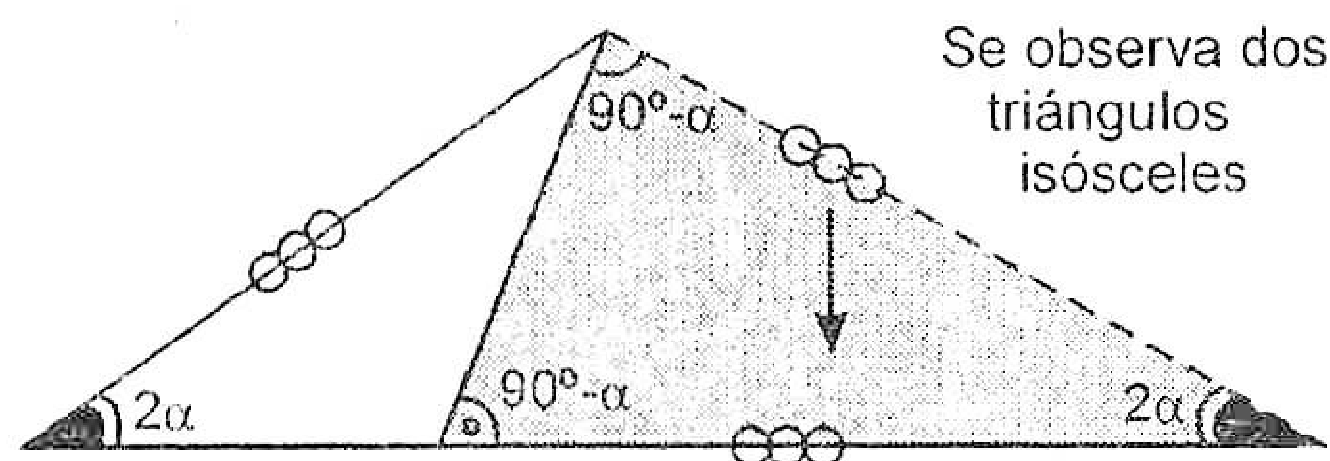
Se buscará

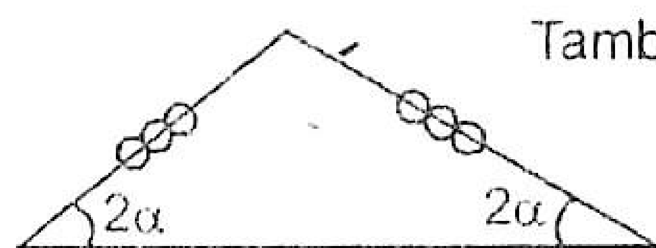


Ahora hacemos

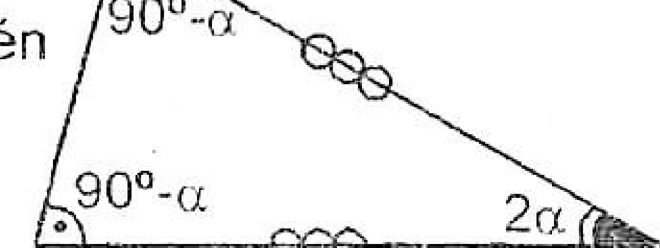


Se obtiene

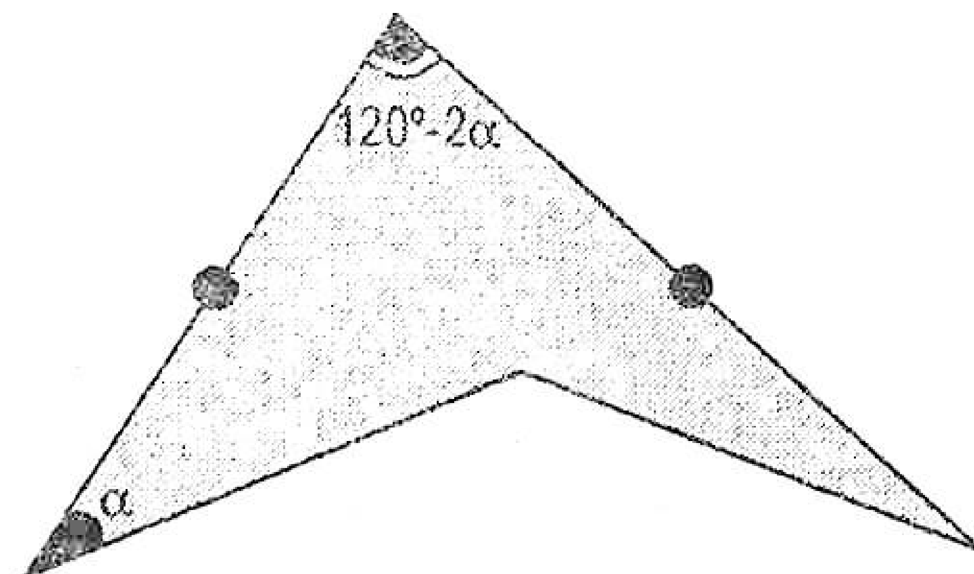




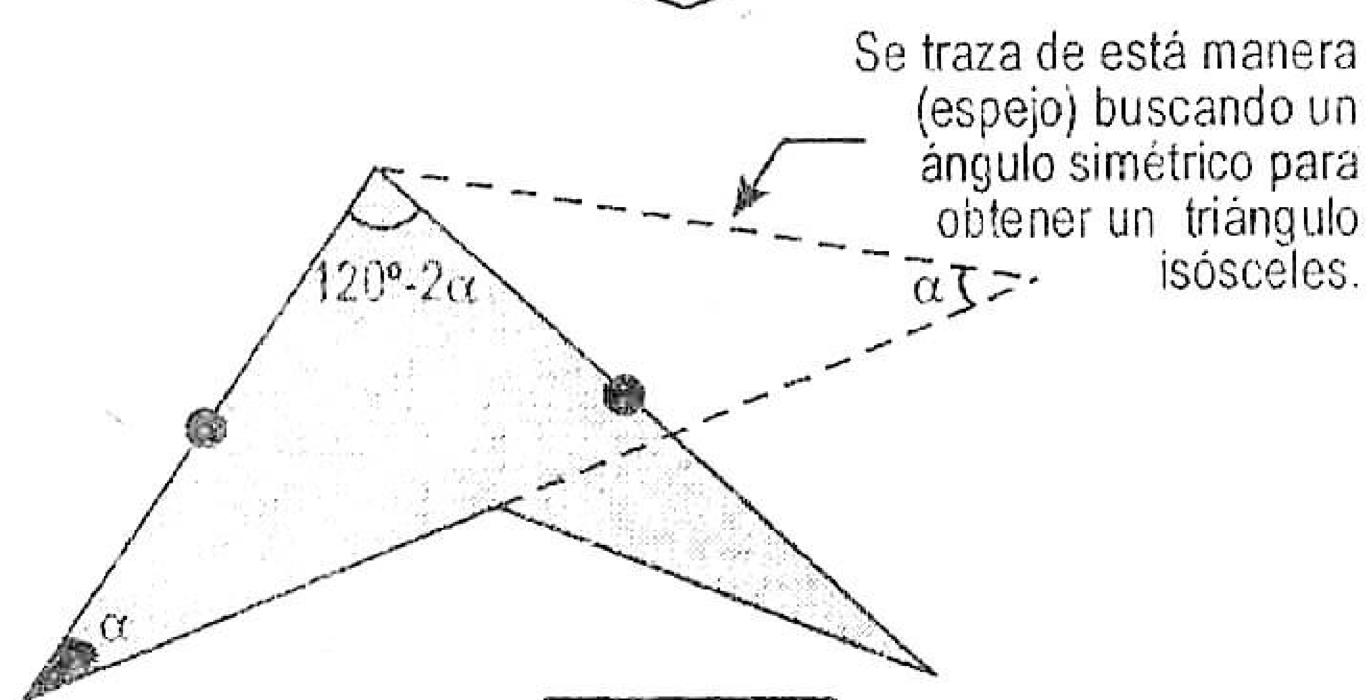
También



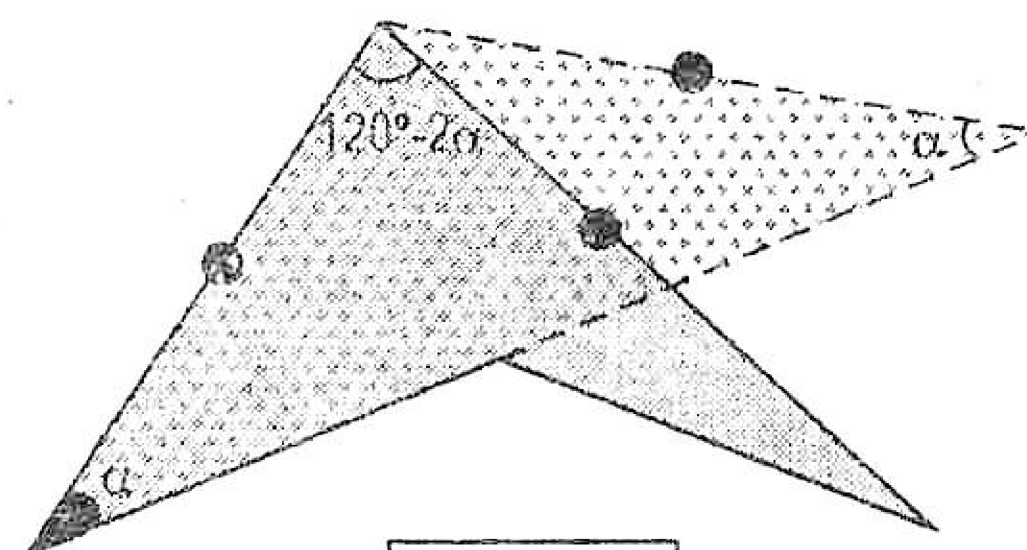
<u>CASO II:</u> Si tenemos está figura con las siguientes características.



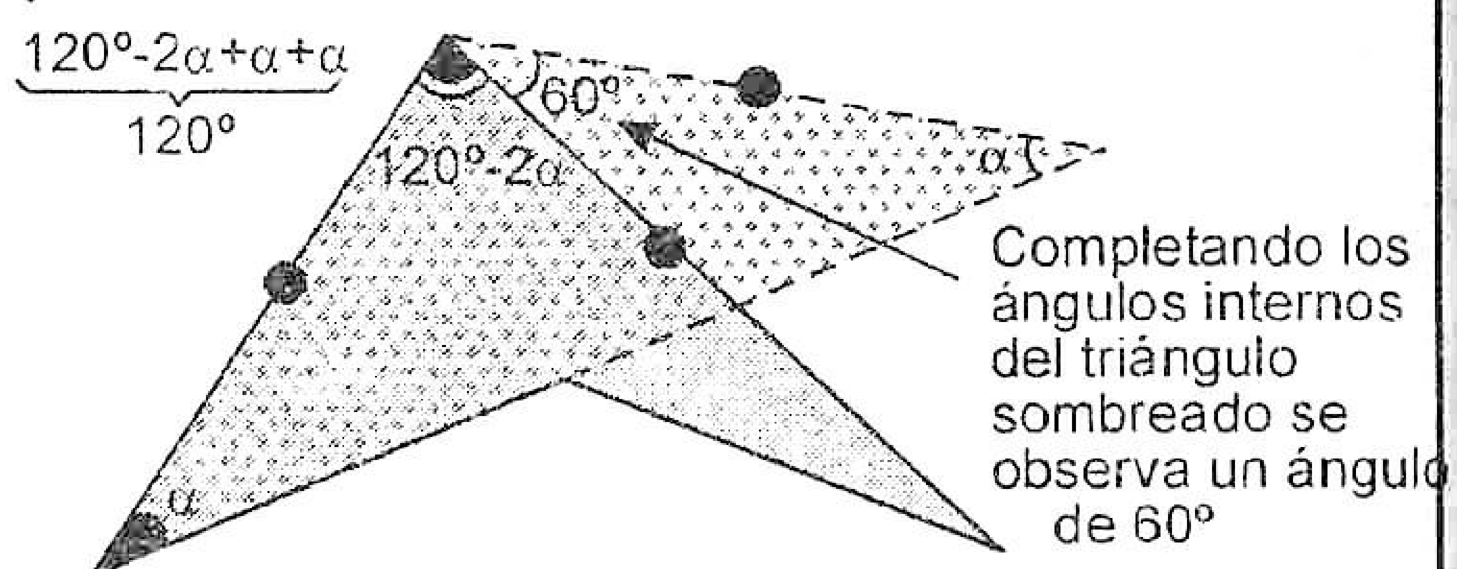
Se hará



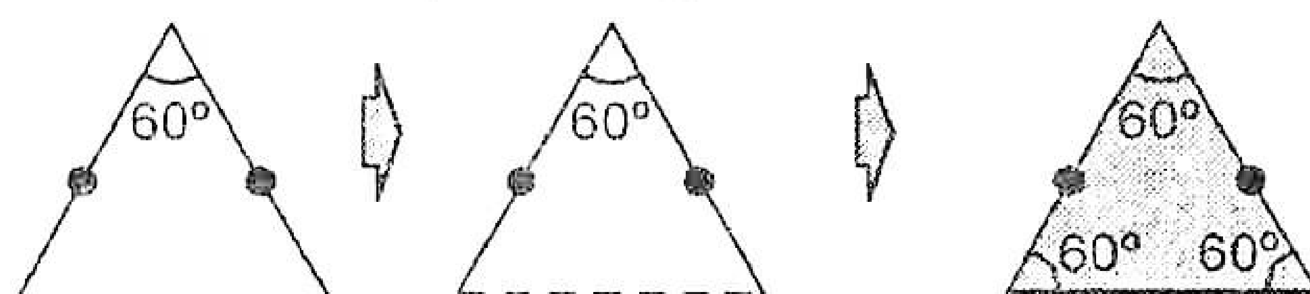
Se obtiene



Ahora se observa



Ahora aplicamos

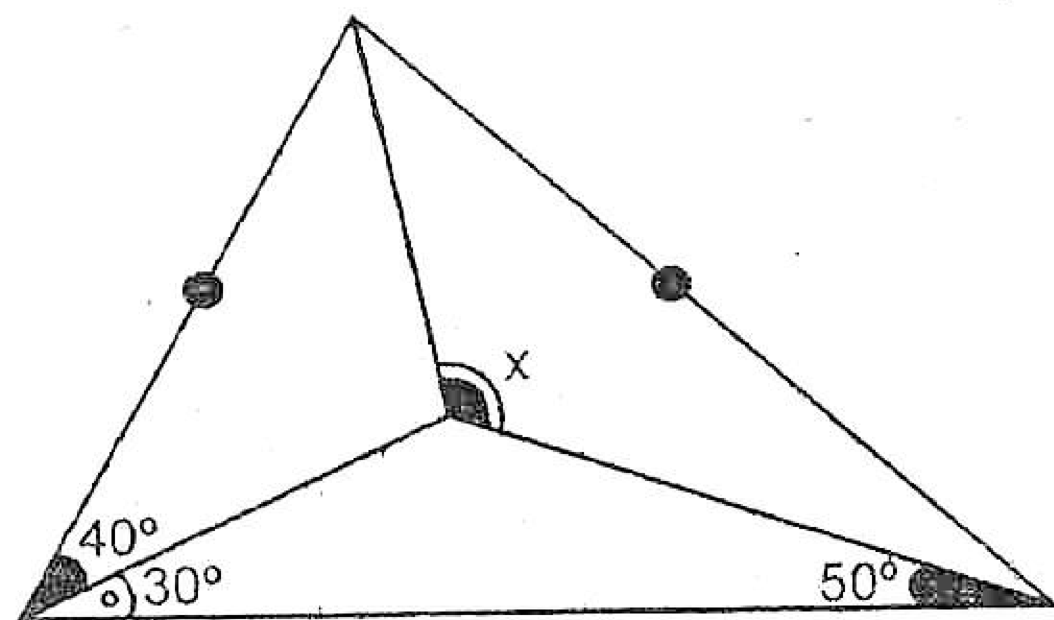


Se traza

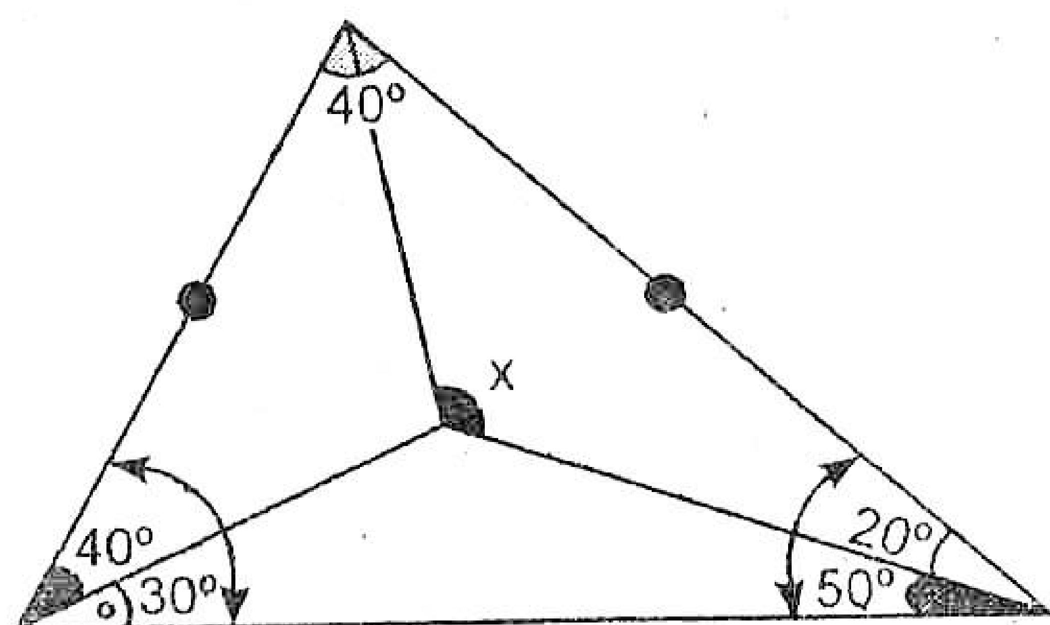
Se obtiene un triángulo equilátero

EMPLO Nº 1

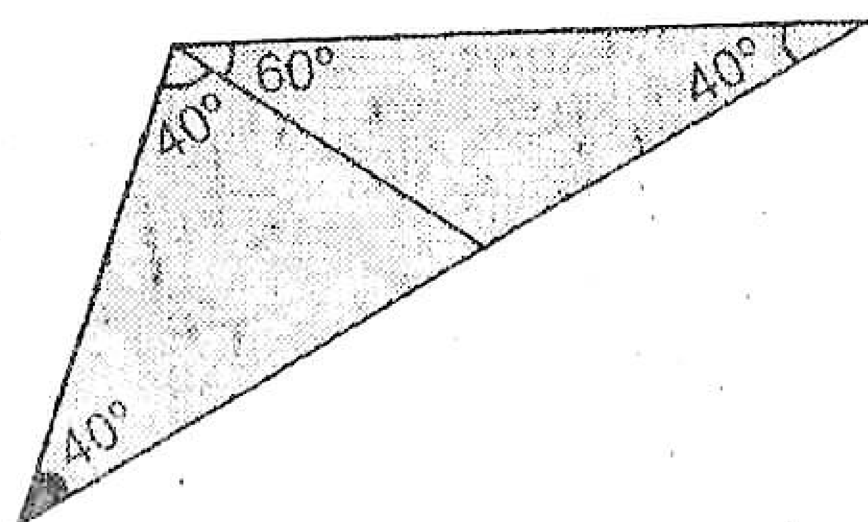
lcular "x":



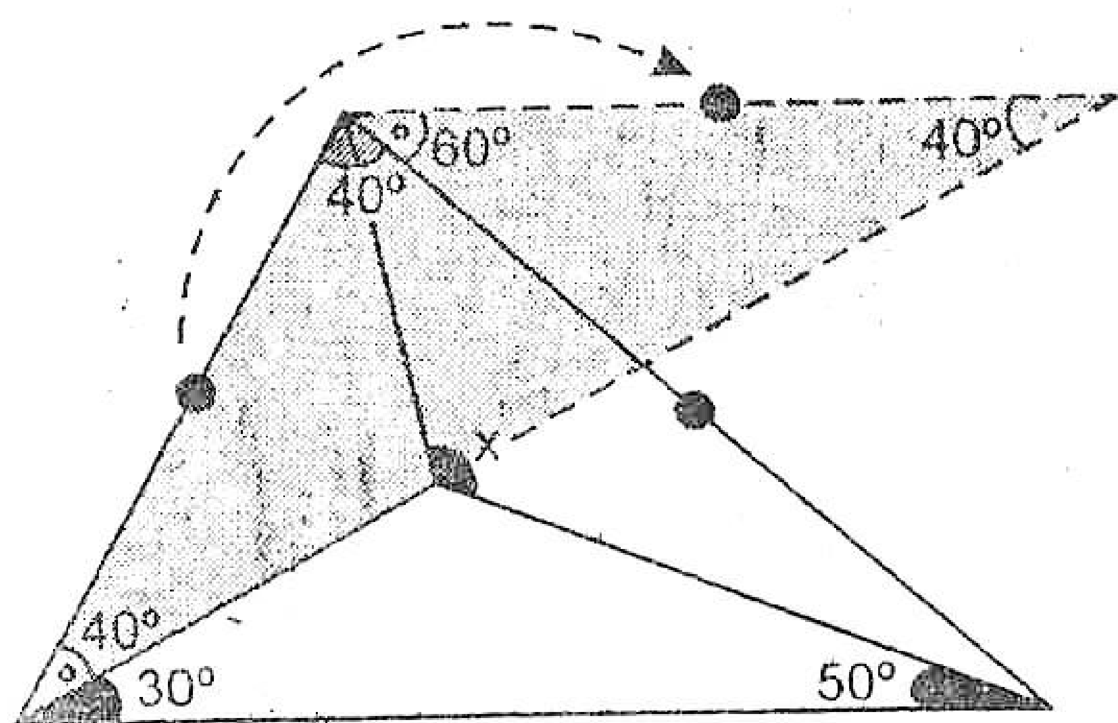
lución: Se observa en la figura, un triángulo sósceles.



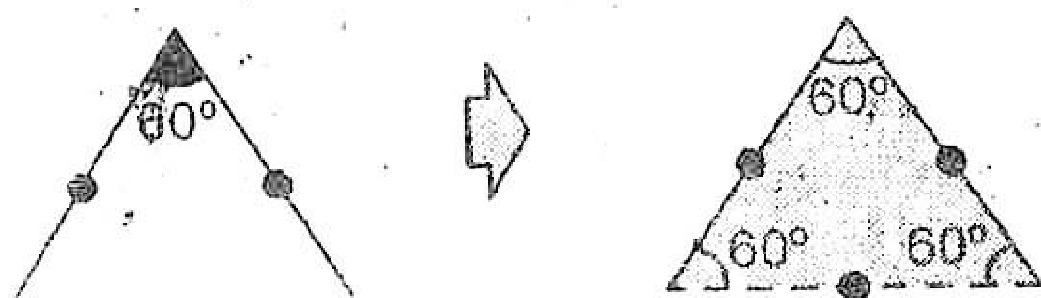
so Nº 1: Se observa que se puede obtener un evo triángulo isósceles de la siguiente forma:

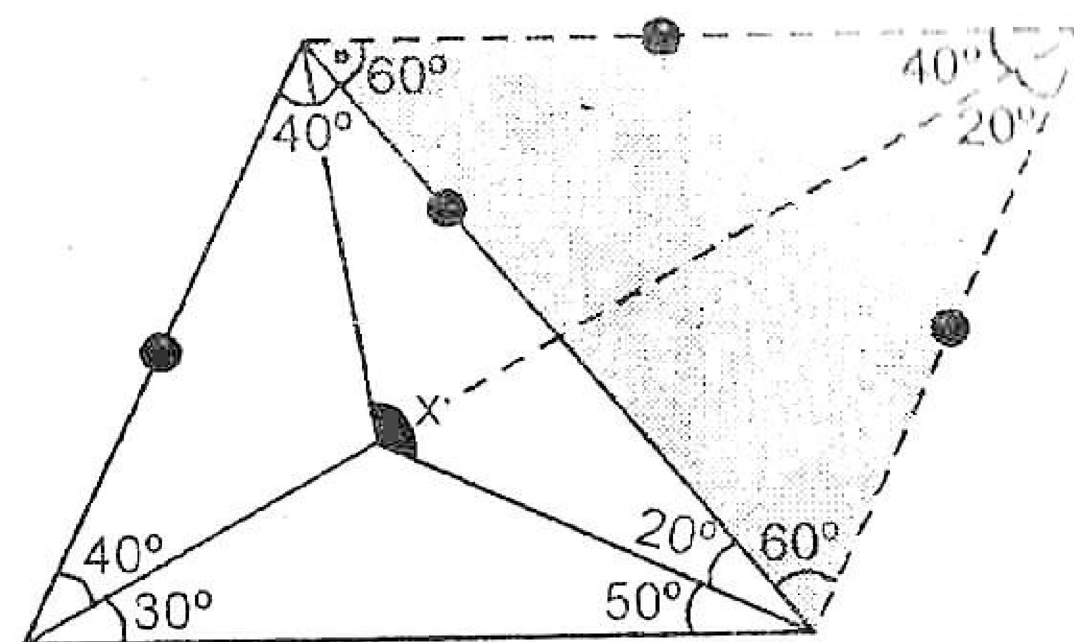


Empleamos el sexto criterio de construcción para obtener el triángulo anterior.

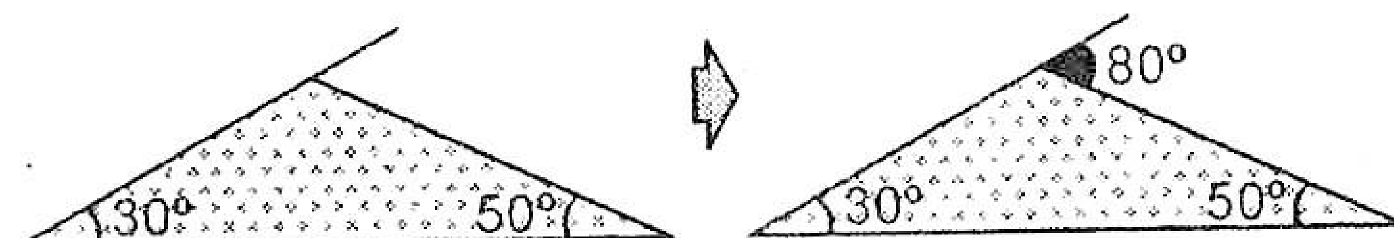


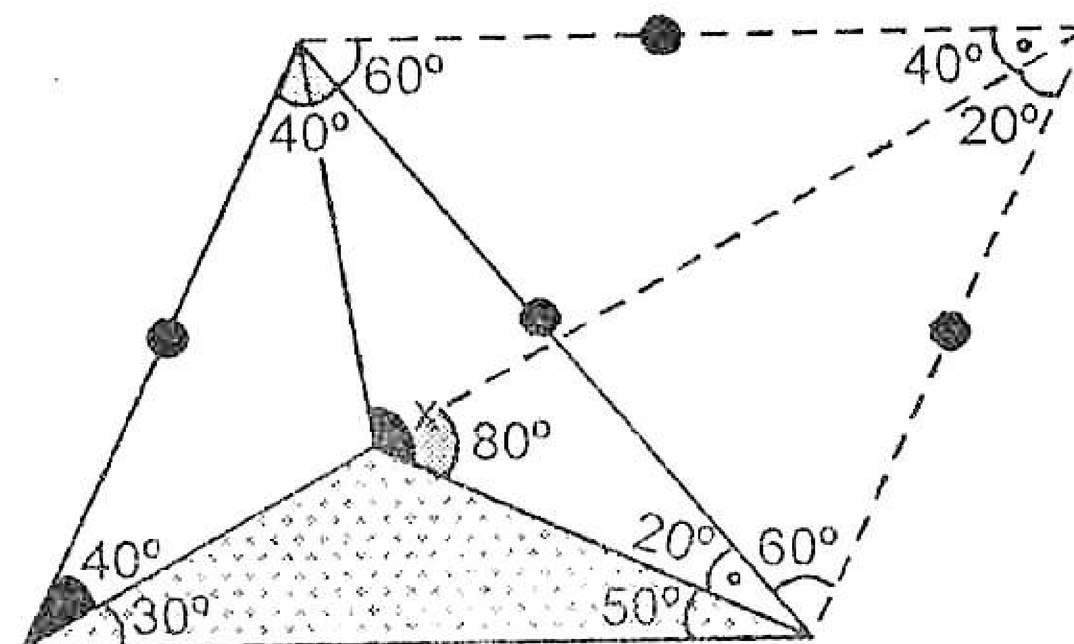
so Nº 2: Ahora se observa la siguiente opiedad donde se cumple:



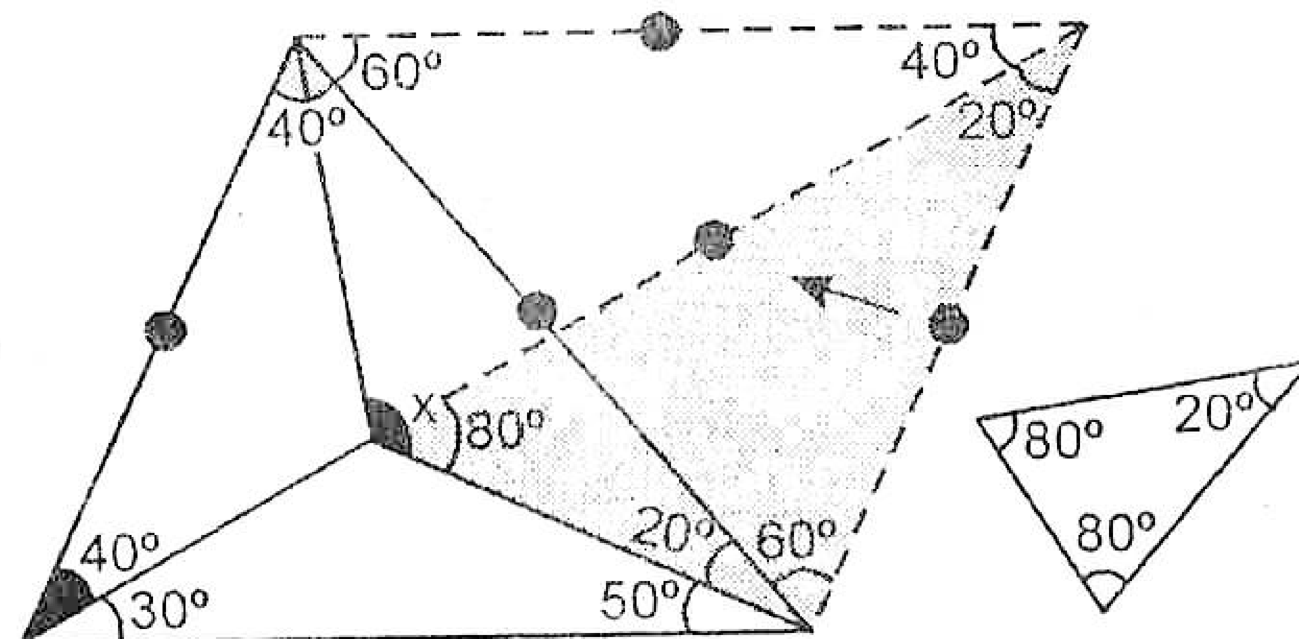


Paso Nº 3: Luego se observa en la figura un triángulo que cumple la siguiente propiedad.

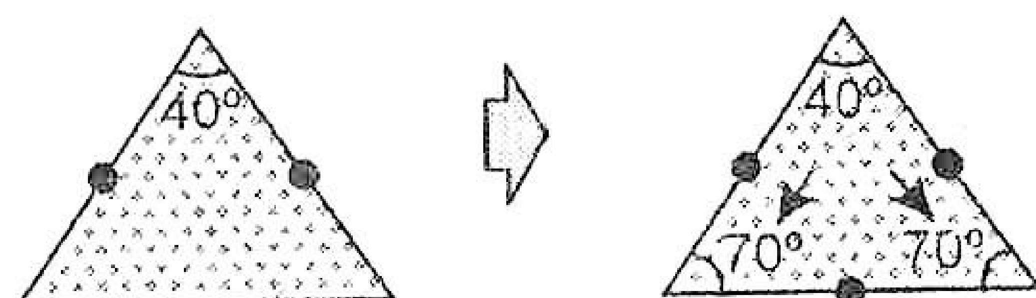


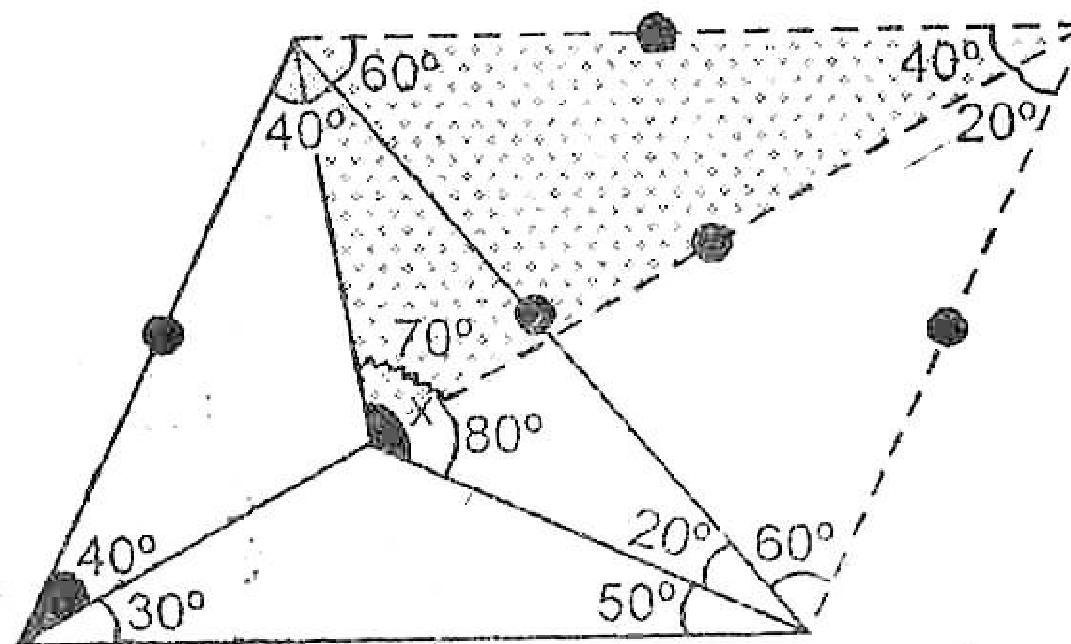


Paso Nº 4: Luego se obtiene un triángulo isósceles.



Paso Nº 5: También se obtiene:



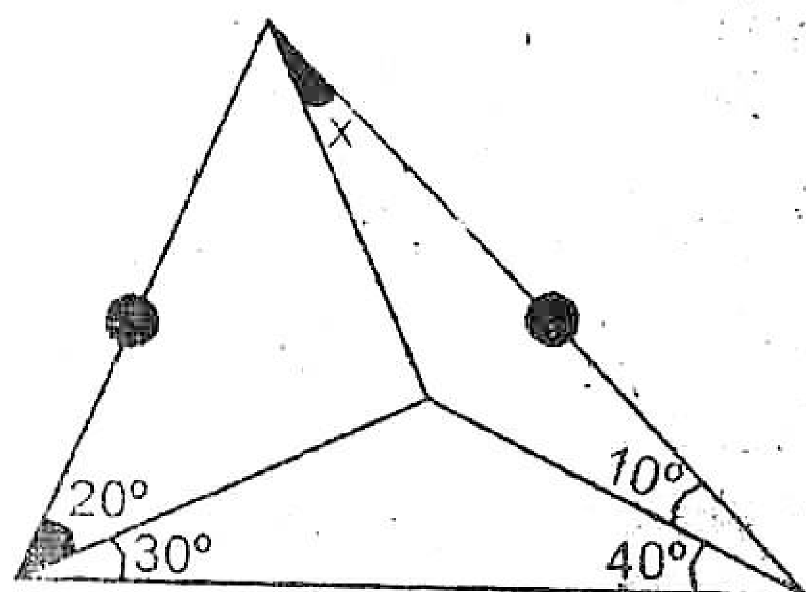


Luego: $\therefore\ x = 70° + 80°$

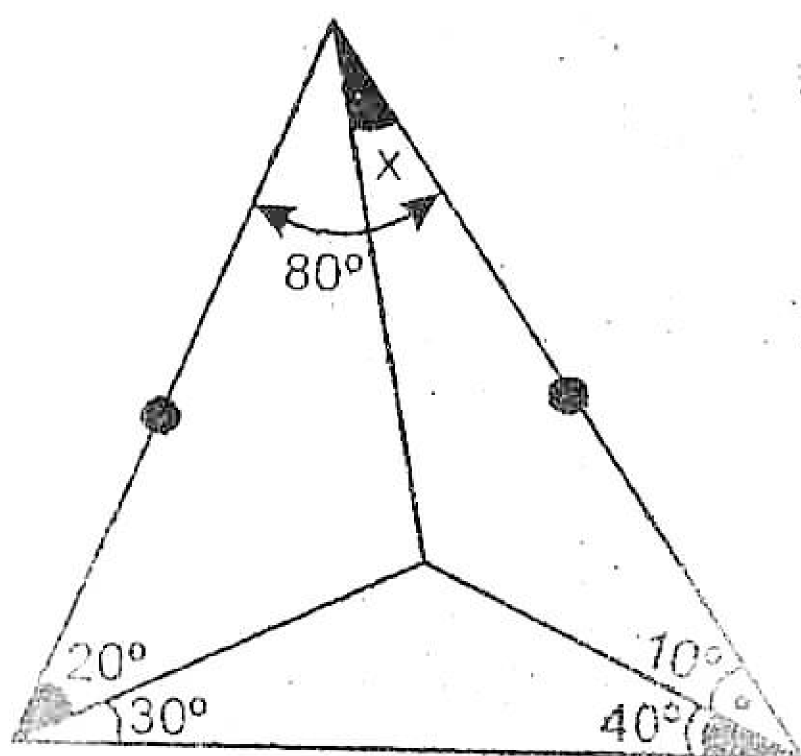
$x = 150°$

EJEMPLO Nº 2

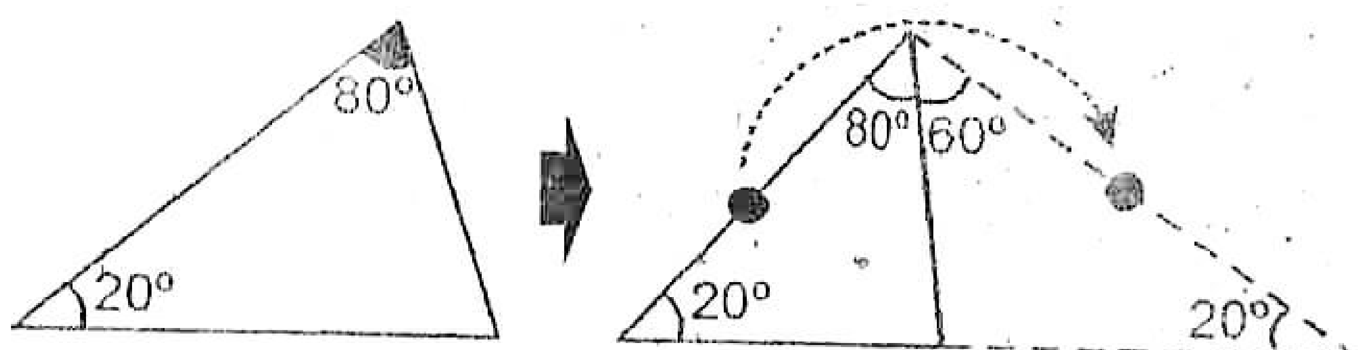
Calcular "x"



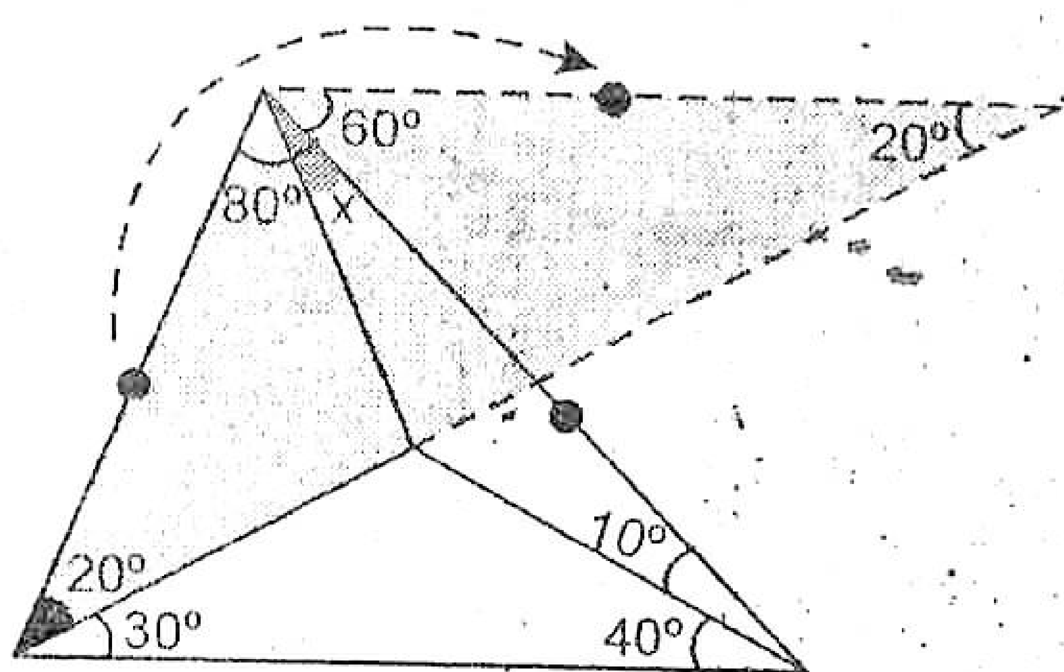
Solución: Se observa en la figura un triánguto isósceles.



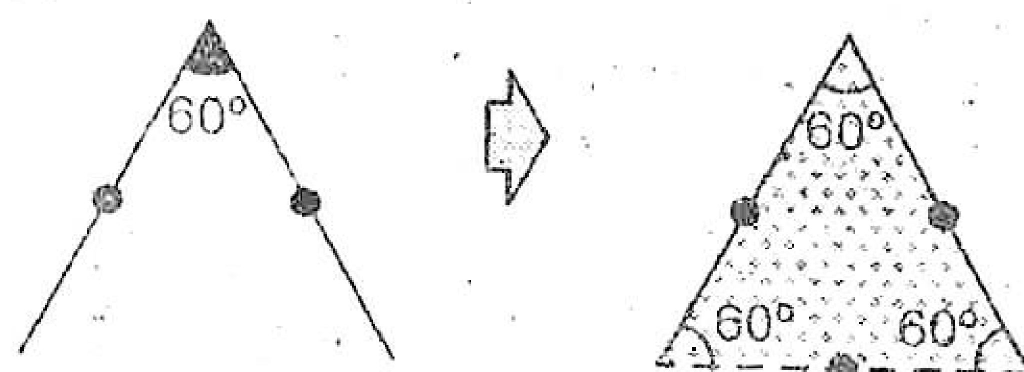
Paso Nº 1: En la figura se tiene:

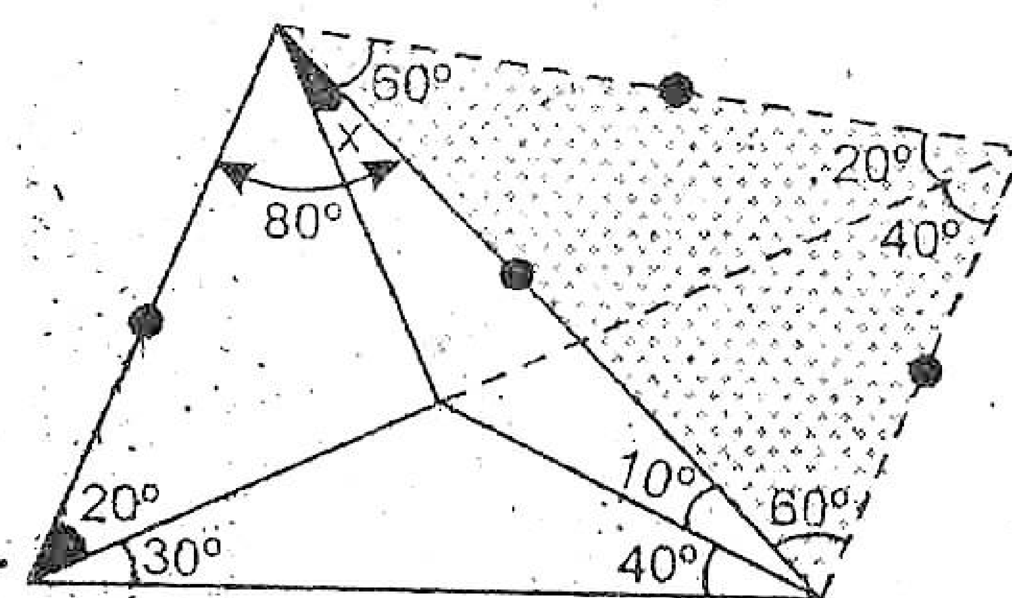


Empleando el sexto criterio de construcción para obtener el triángulo anterior.

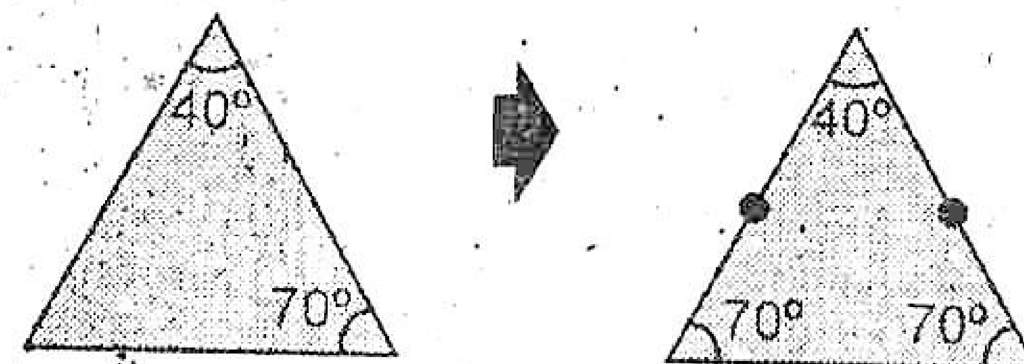


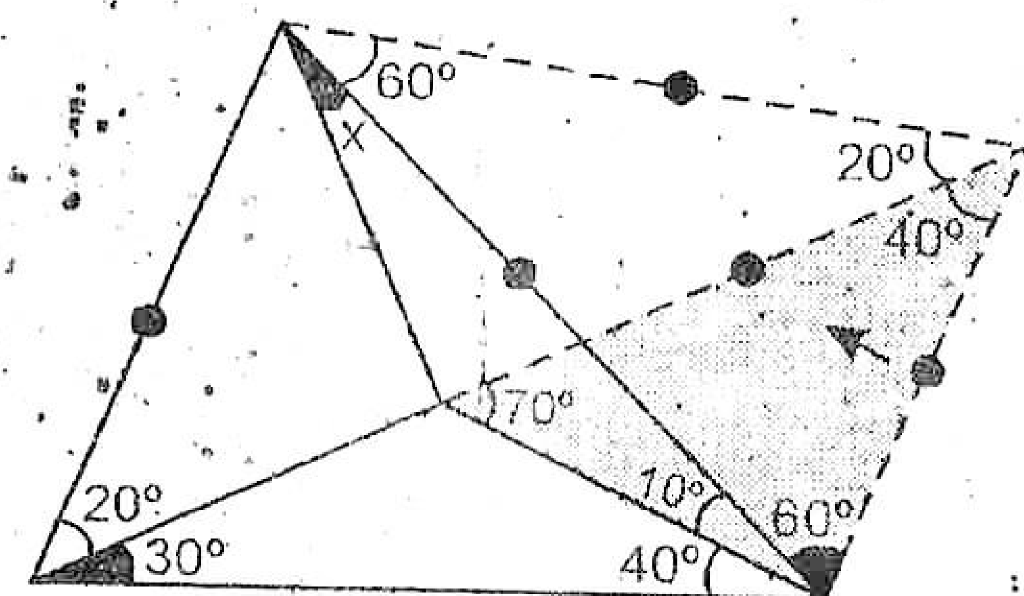
Paso Nº 2: Luego se observa en la figura que se obtiene la siguiente propiedad donde se cumple:



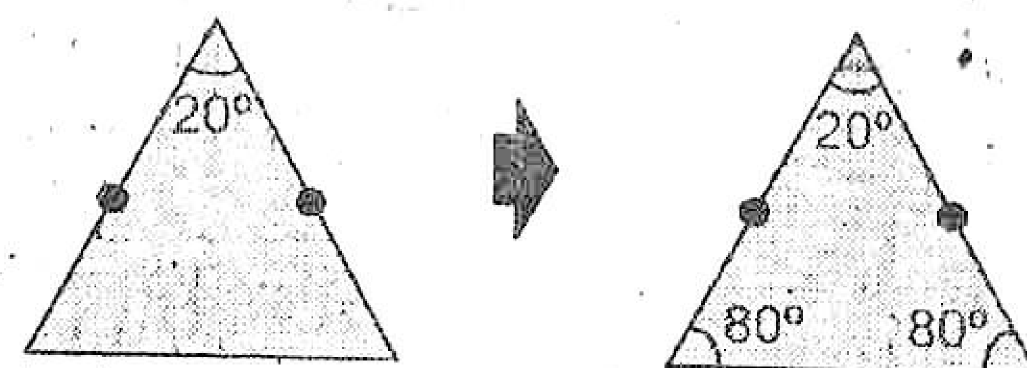


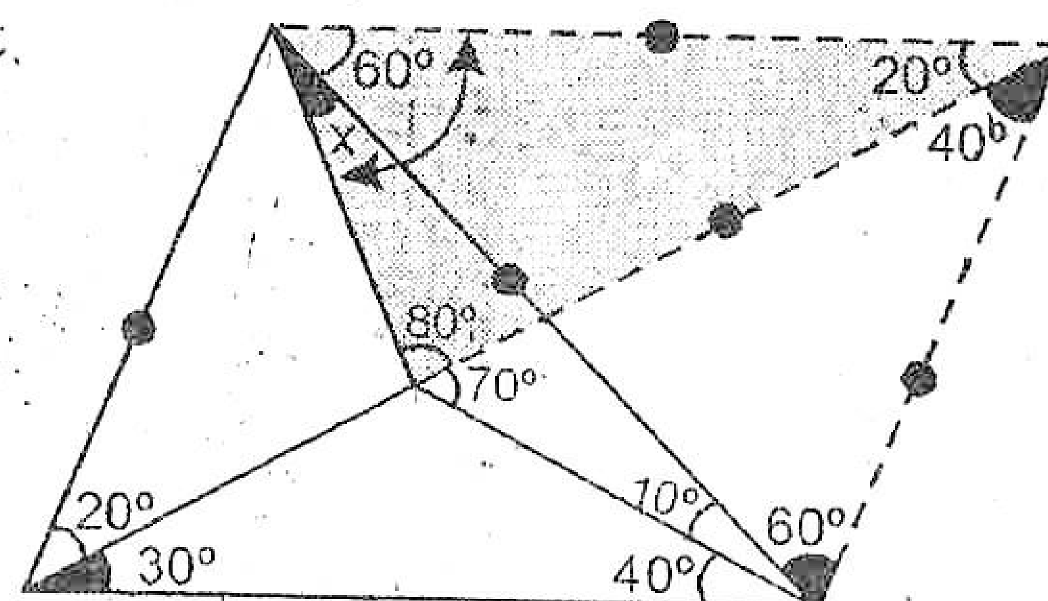
Paso Nº 3: También se obtiene un nuevo triángulo isósceles.





Paso Nº 4: También se observa en la figura:



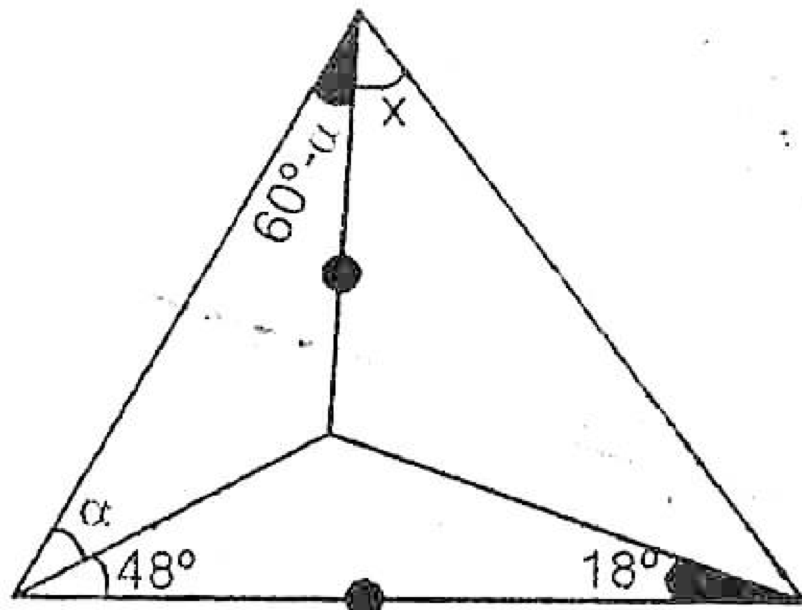


$\Rightarrow x + 60^\circ = 80^\circ$

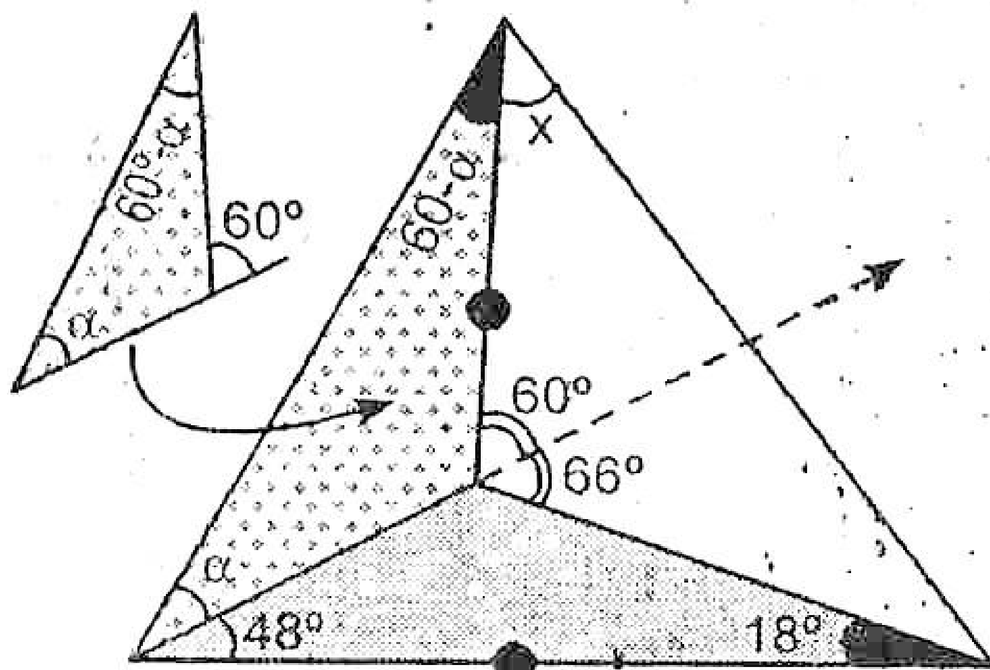
$x = 20^\circ$

EJEMPLO Nº 3

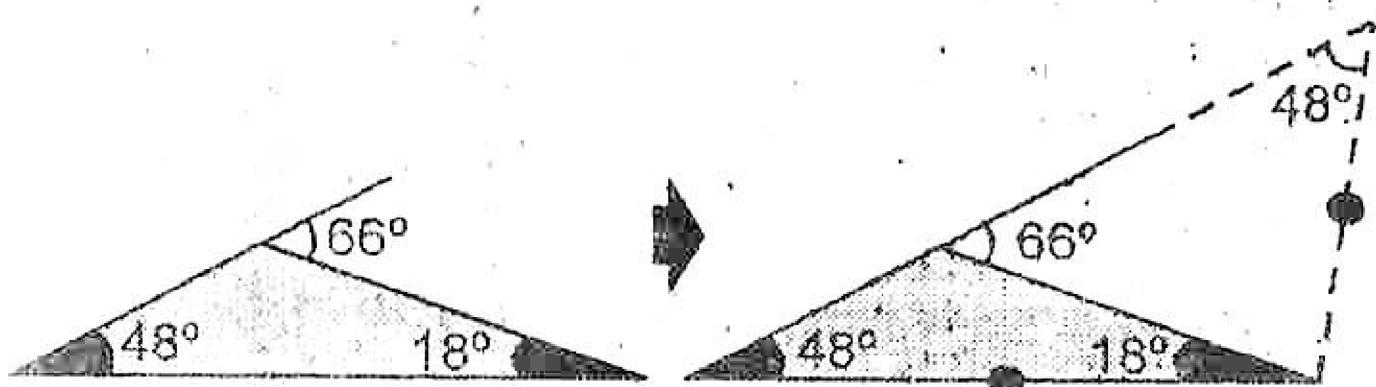
Calcular "x"



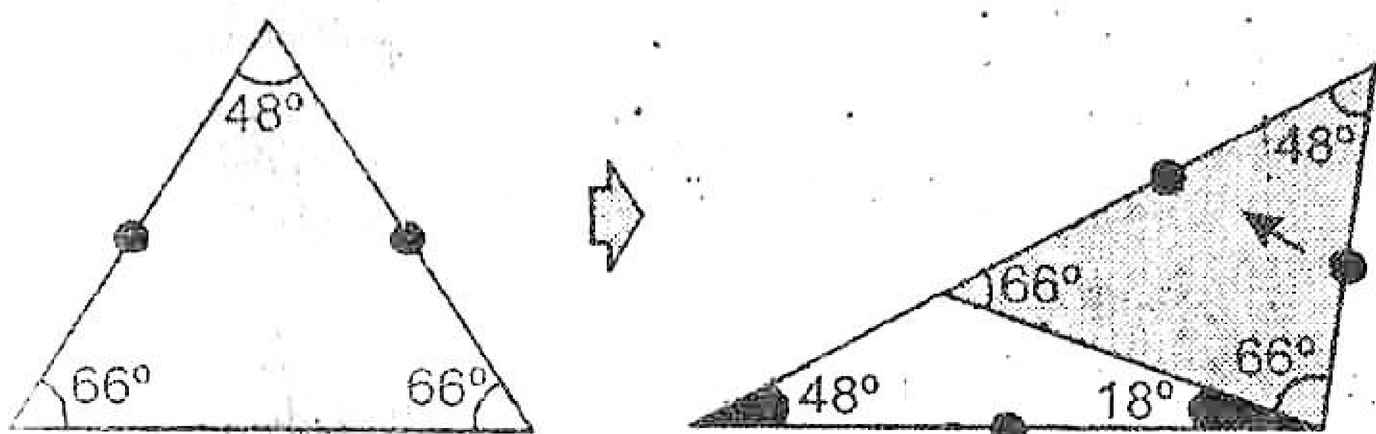
Solución: Se observa en la figura.



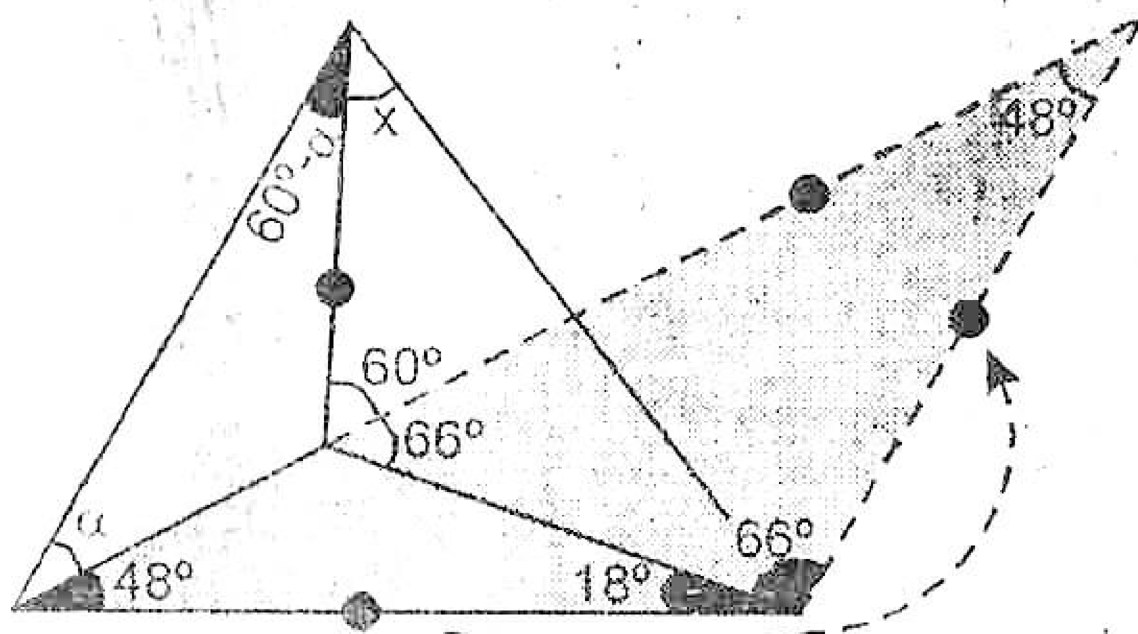
Paso Nº 1: En la figura sombreada se tiene:



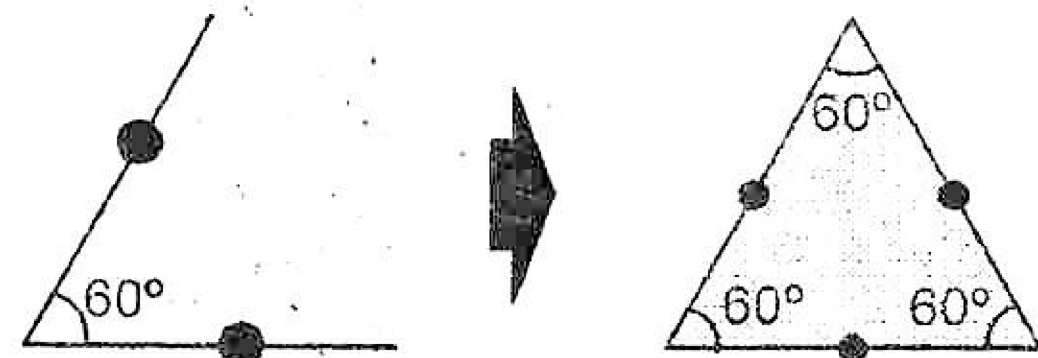
Realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la siguiente manera:

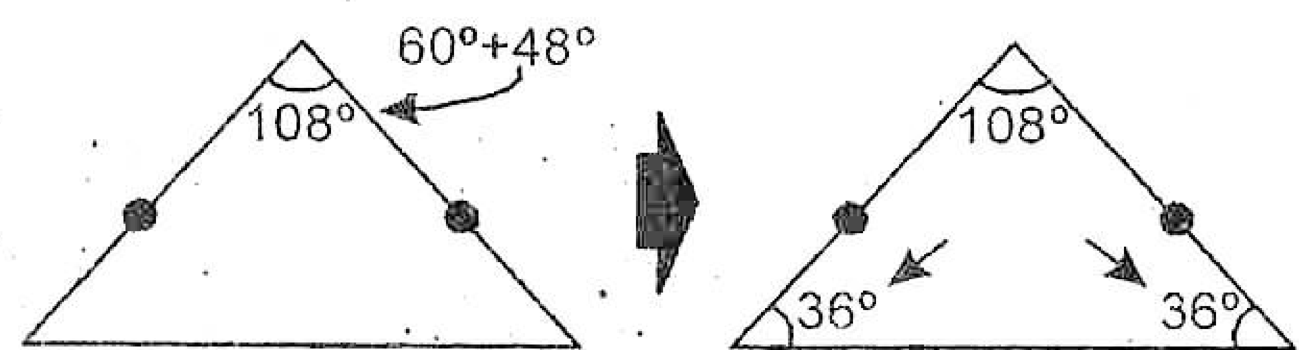


Luego en la figura:

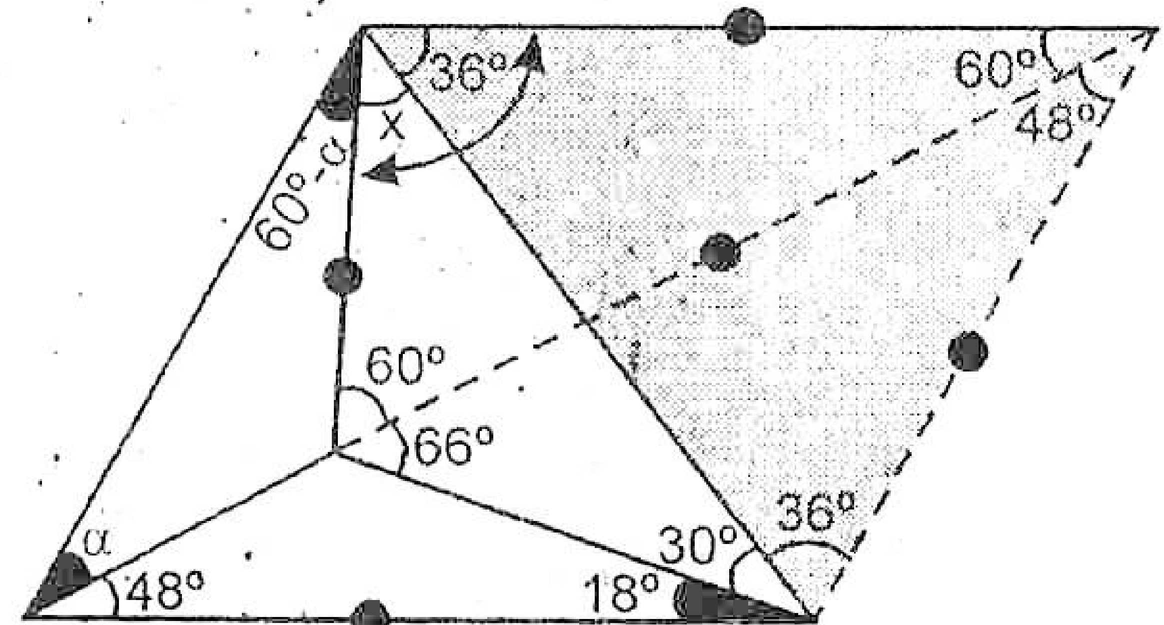


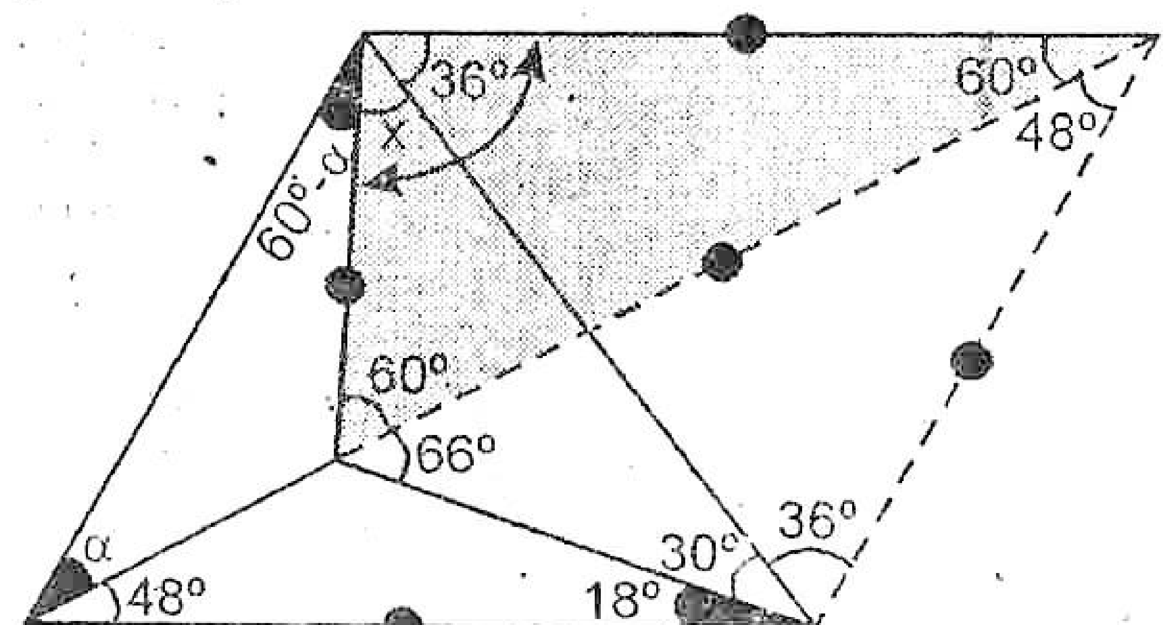
Paso Nº 2: Luego se observa un triángulo equilátero.





Paso Nº 3: Luego vemos un nuevo triángulo isósceles.





Paso Nº 4:

Finalmente se observa en la figura un nuevo triángulo equilátero.

$$\Rightarrow \quad x + 36° = 60°$$

$$x = 24°$$

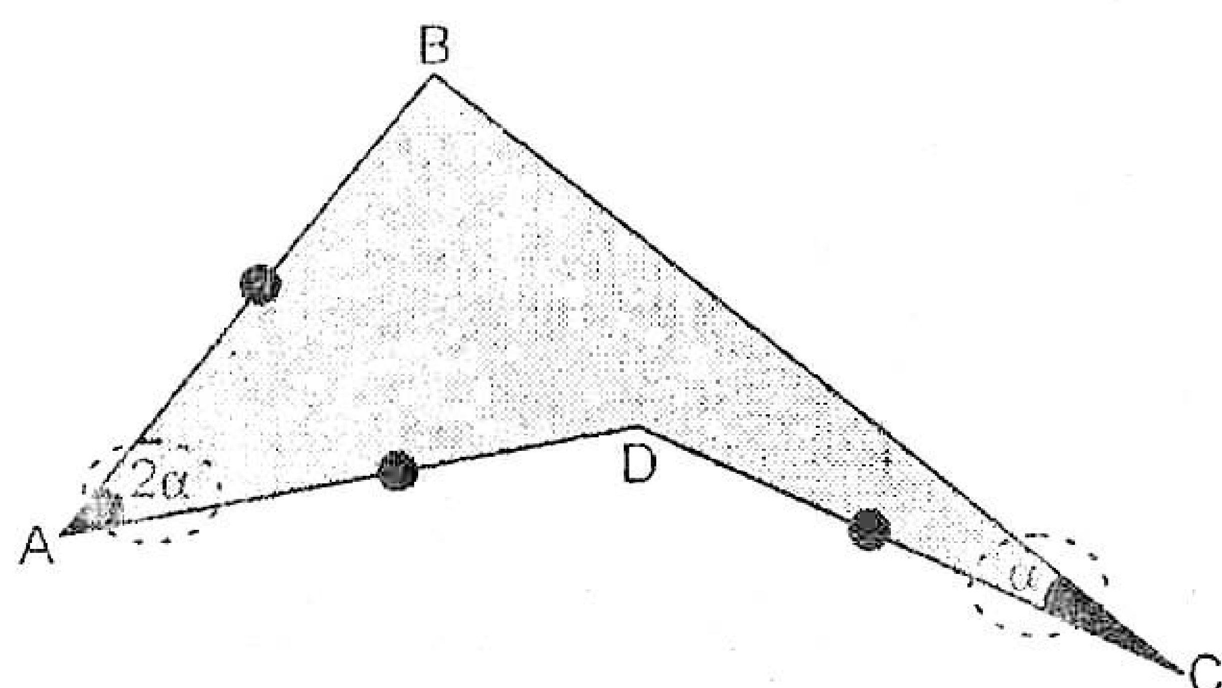
La matemática posee una fuerza maravillosa capaz de hacernos comprender muchos misterios de nuestra Fe. (San Jerónimo)

7mo Criterio

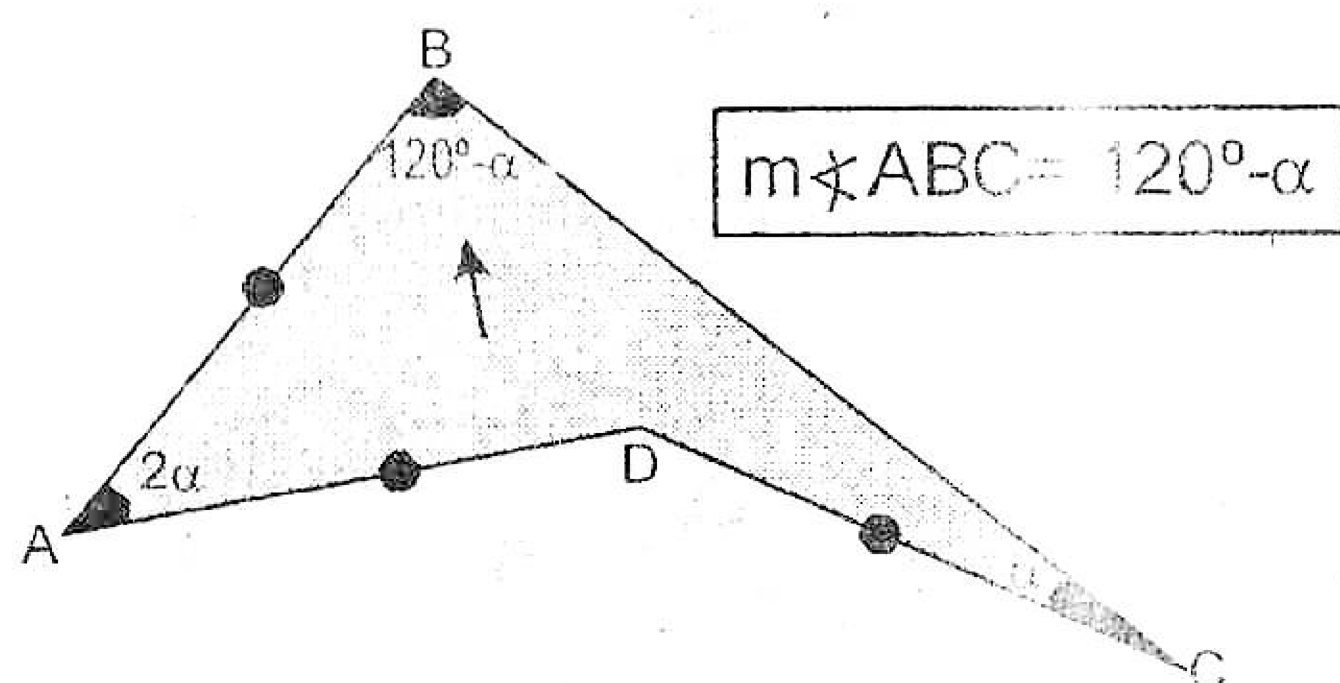
"BUSCANDO CUADRILÁTEROS CÓNCAVOS"

Con ayuda del tema de congruencia, se buscará obtener en las figuras dadas, cuadriláteros cóncavos tanto interiormente como exteriormente, teniendo en cuenta obtener tres lados iguales con sus ángulos internos que estén en la relación de dos a uno; de la siguiente manera:

CASO I: Si tenemos:

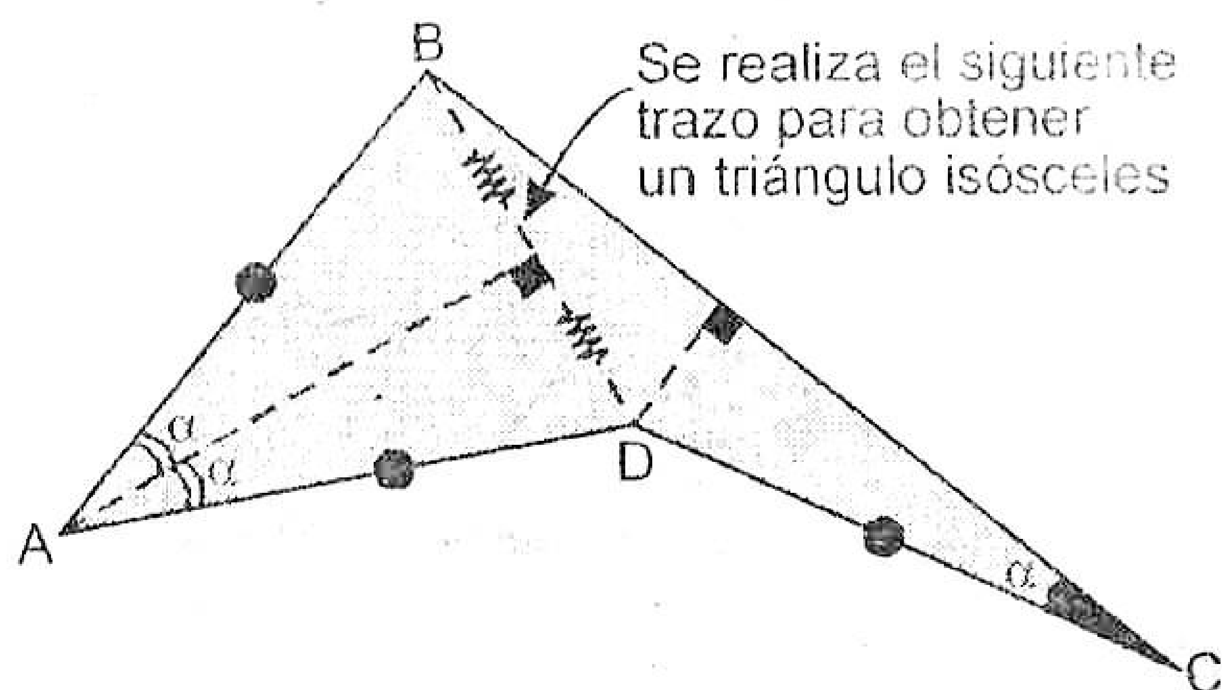


Se cumple

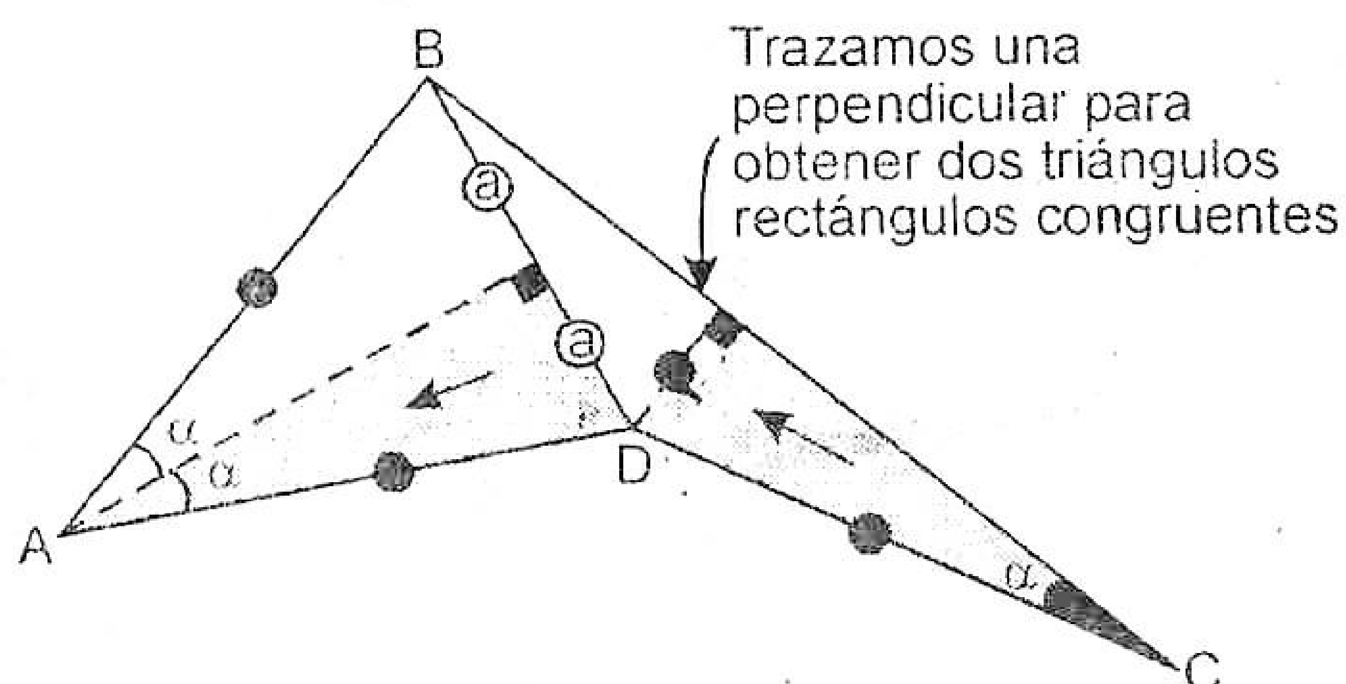


m∢ABC = 120°-α

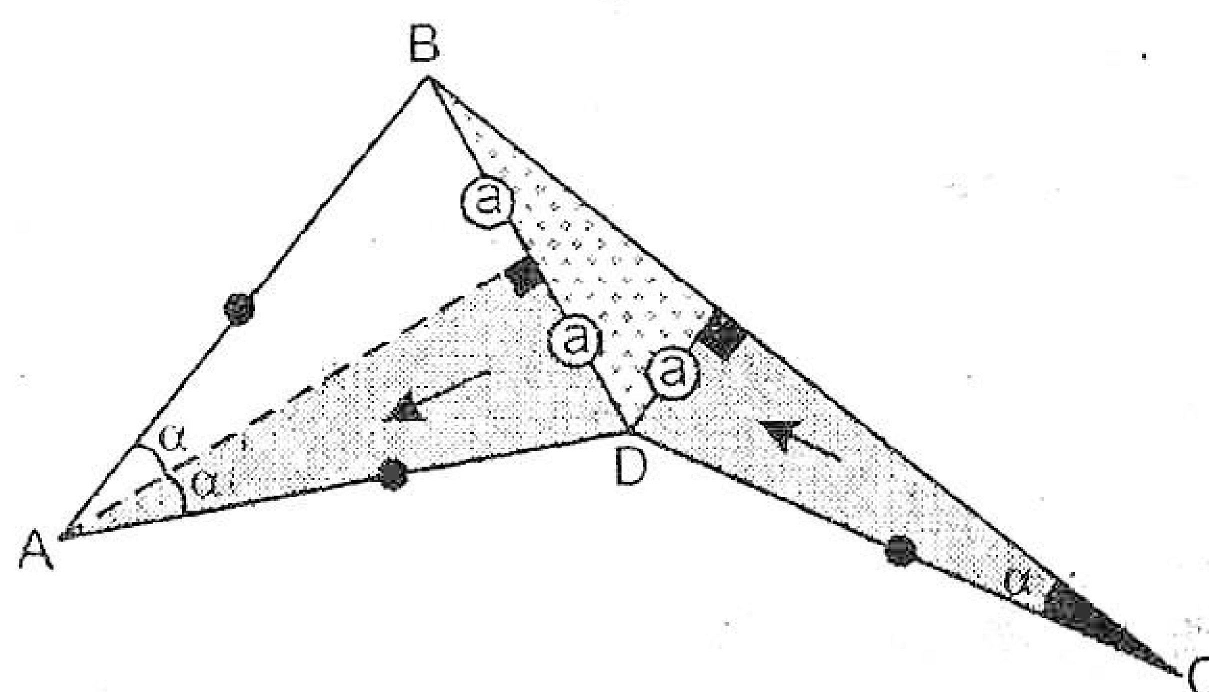
Demostración



También se obtiene

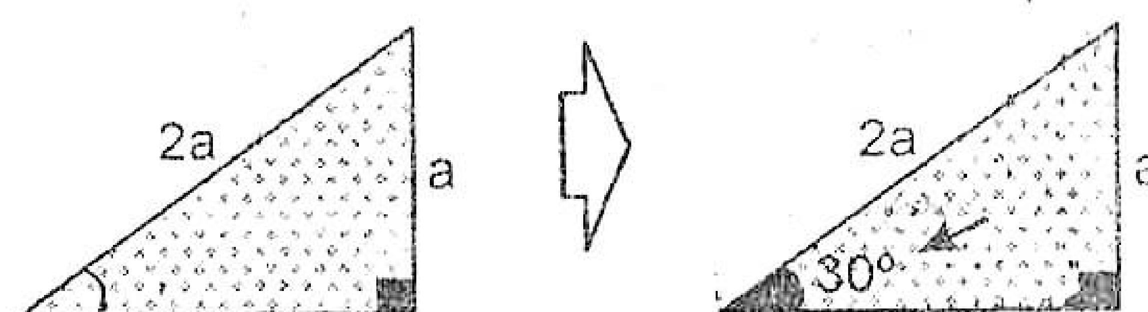


Luego se tiene

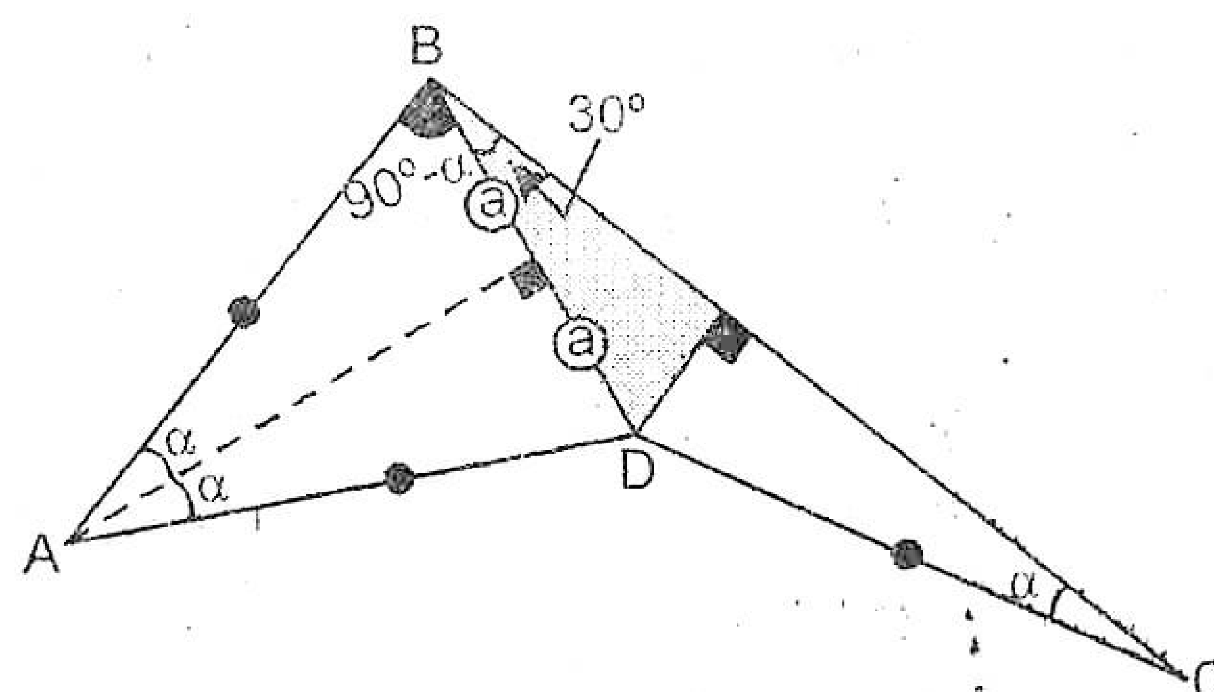


Se observa

Un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°.



Ahora

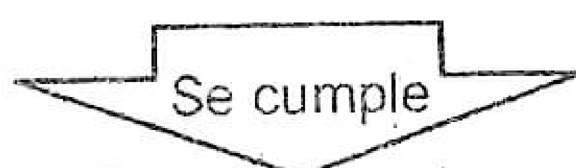


m∢ABC = 120°- α

CASO II

Si tenemos una figura con las siguientes características.

2α α



B

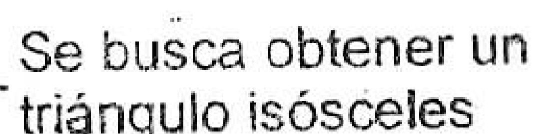
$m\measuredangle ABC = 120^{\circ}-2\alpha$

$120^{\circ}-2\alpha$ A 2α C α



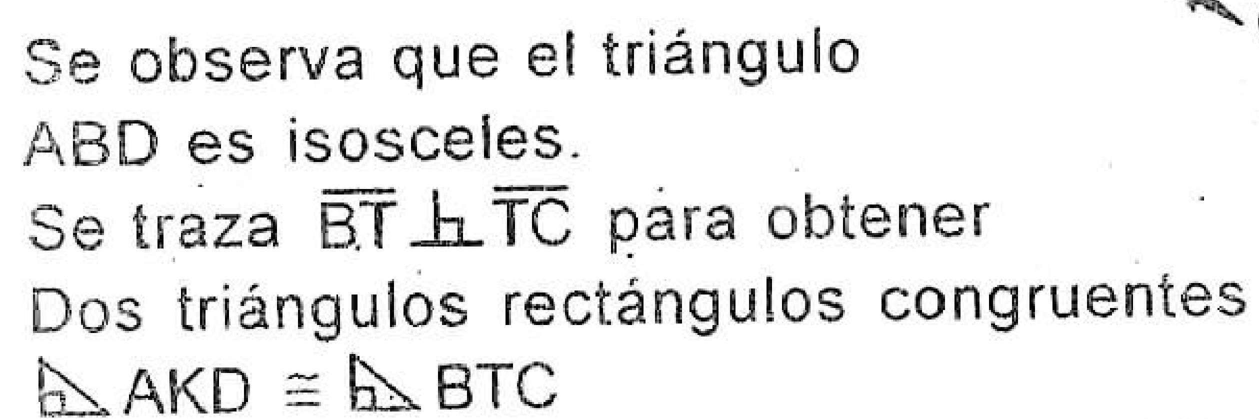
Demostración

B $90^{\circ}-\alpha$ K D A α α C α





B (a) K T (a) D A α α C α



Se observa que el triángulo ABD es isosceles.
Se traza $\overline{BT} \perp \overline{TC}$ para obtener
Dos triángulos rectángulos congruentes
⊿AKD ≅ ⊿BTC

B (a) (a) K T (a) D A α α C α



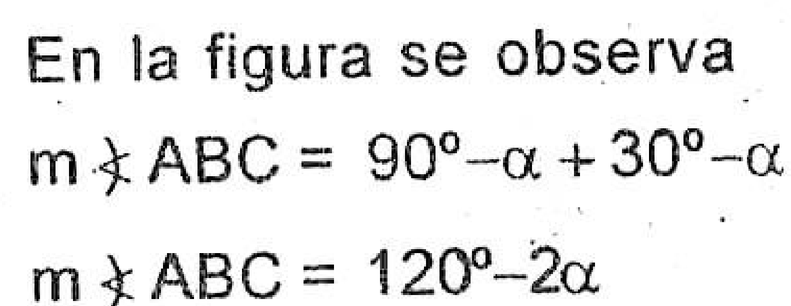
Como ⊿AKD ≅ ⊿BTC
$\Rightarrow$ BT = KD = a

Luego se observa: ⊿BTD es notable de 30° y 60°

a 2a a 2a 30°



B $90^{\circ}-\alpha$ $30^{\circ}-\alpha$ (a) (a) K (a) 30° D A α α C α



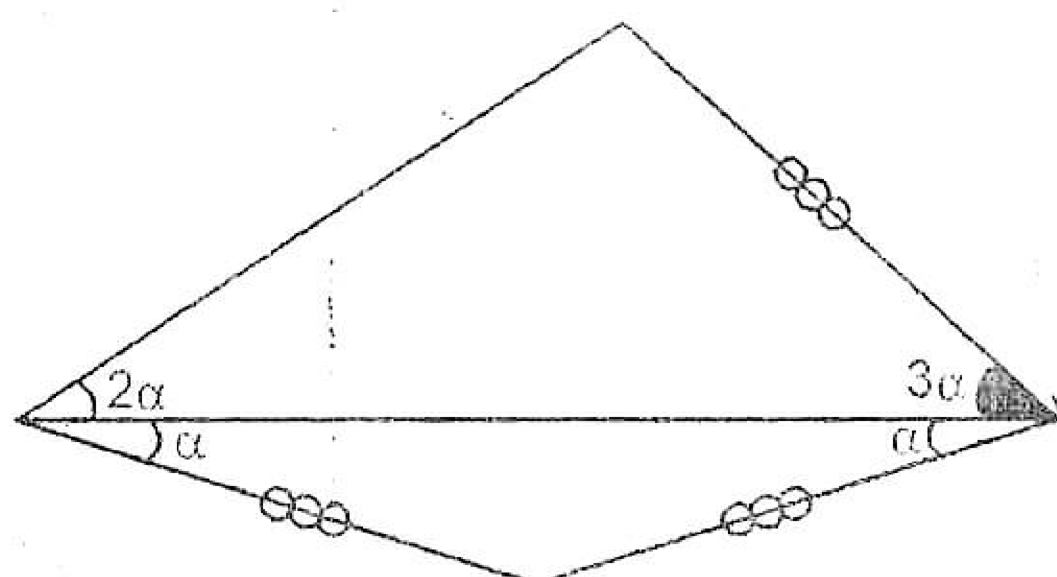
En la figura se observa

$m\measuredangle ABC = 90^{\circ}-\alpha+30^{\circ}-\alpha$

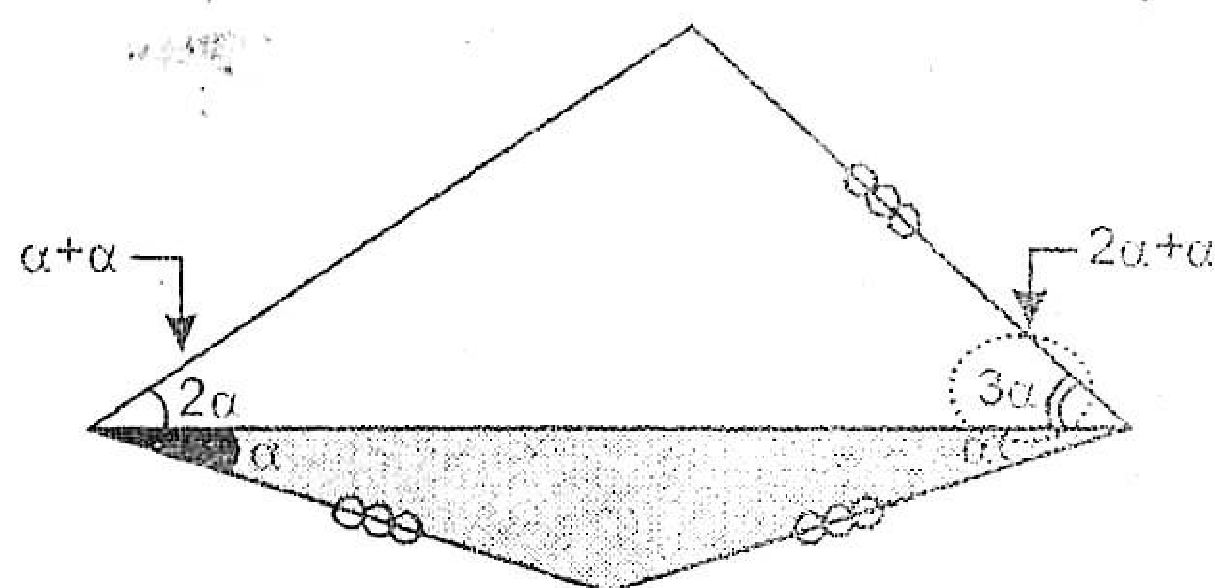
$m\measuredangle ABC = 120^{\circ}-2\alpha$

EJEMPLO Nº 1

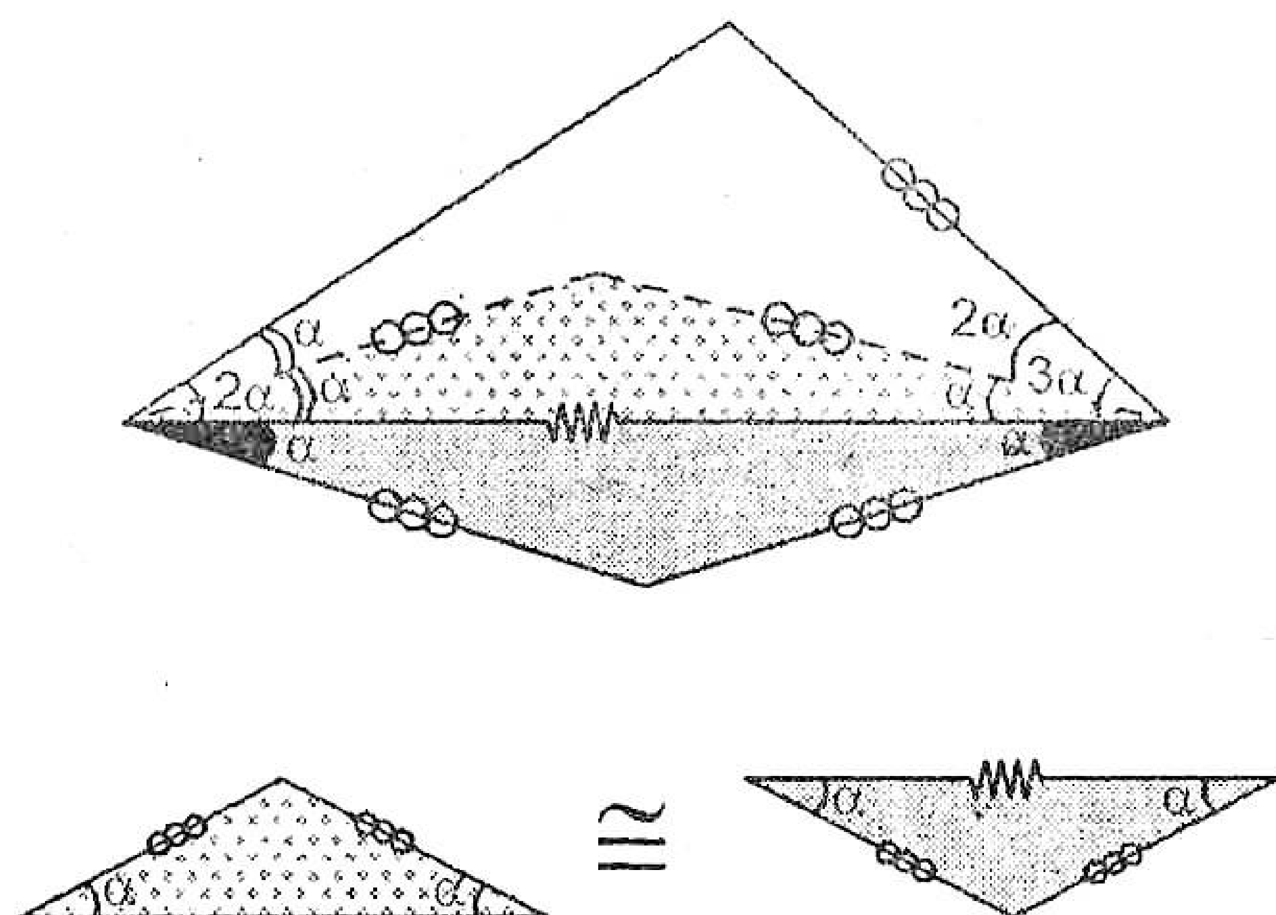
Hallar α



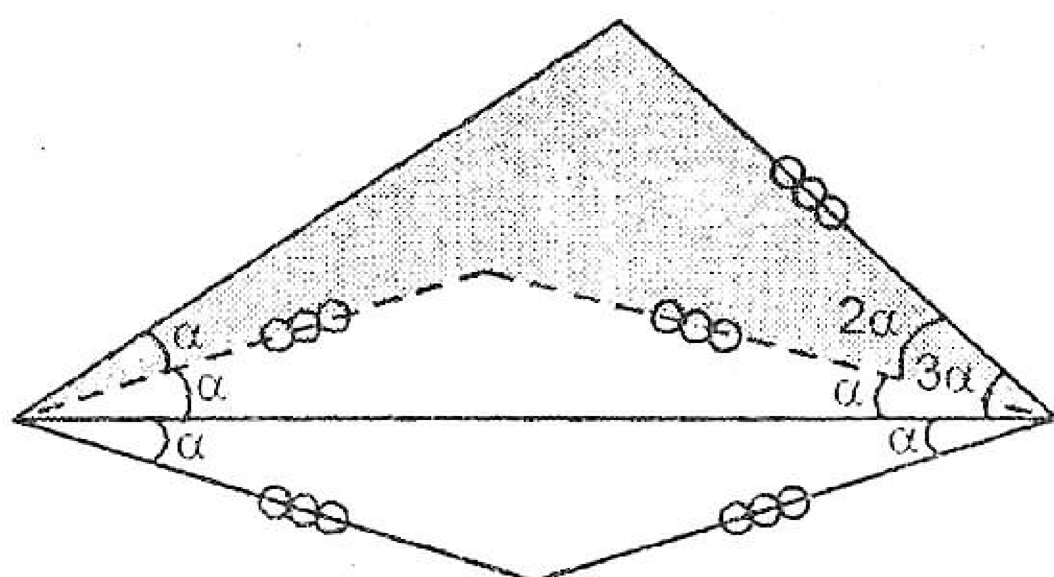
Solución: Observamos la figura y se obtiene:



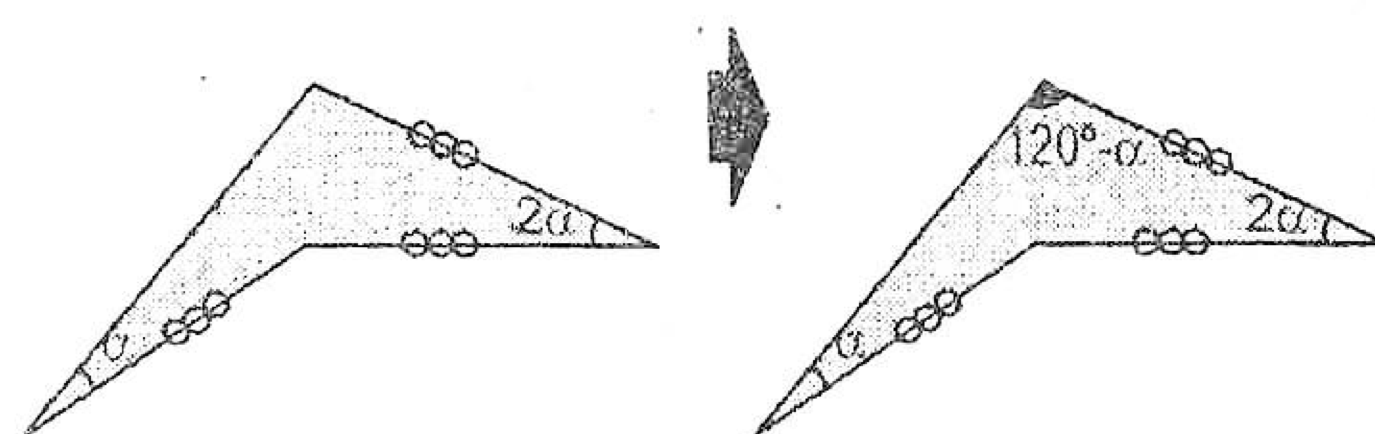
Paso Nº 1: Construimos un triángulo congruente interiormente de la siguiente manera.



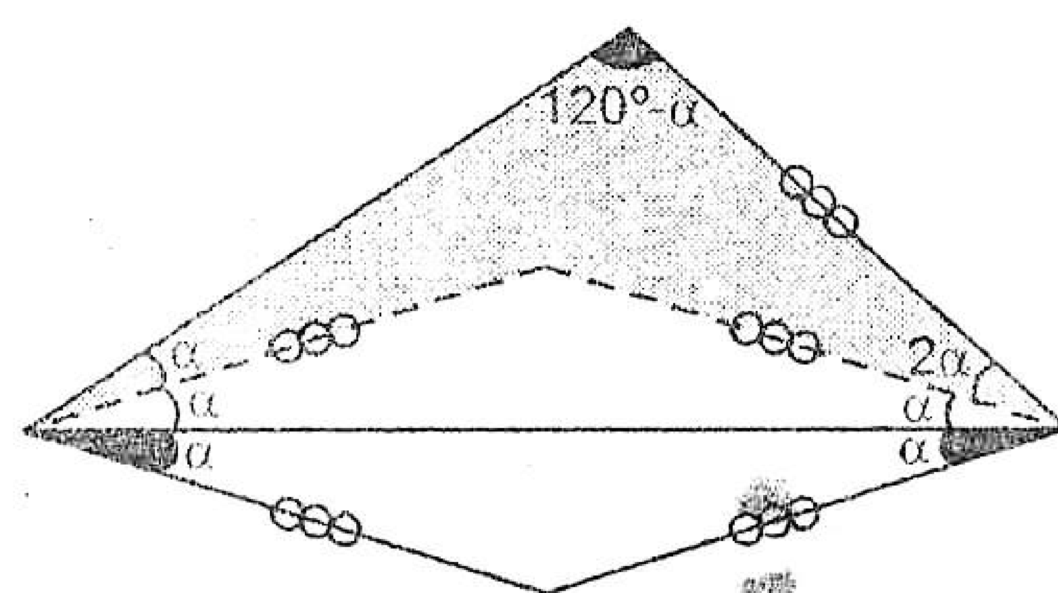
Paso Nº 2: Ahora observamos un cuadrilátero concavo y con ello aplicamos el septimo criterio de construcción



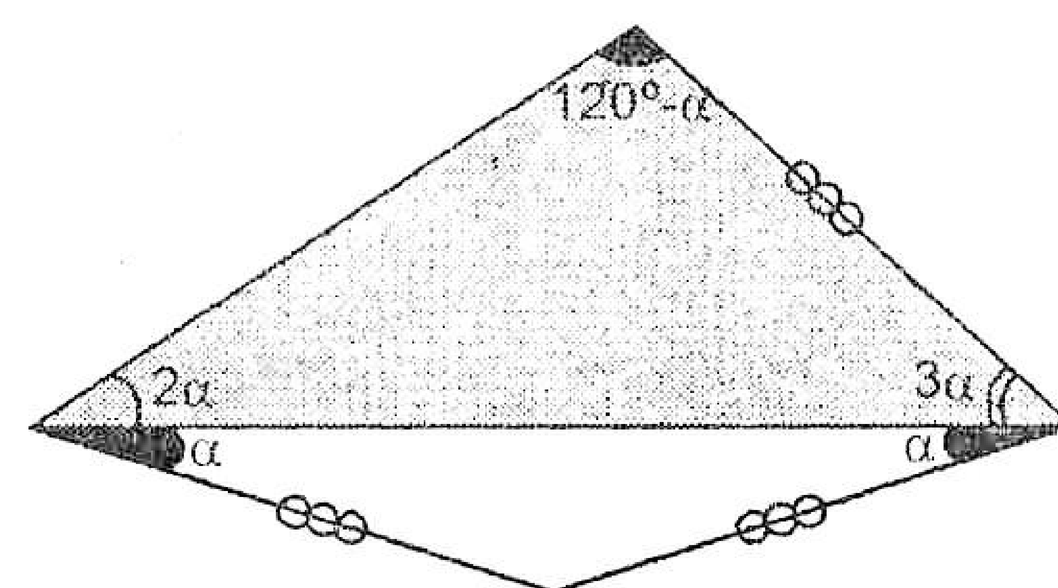
Aqui podemos observar que se cumple:







Paso Nº 3: Finalmente observamos en la figura sombreada se cumple:



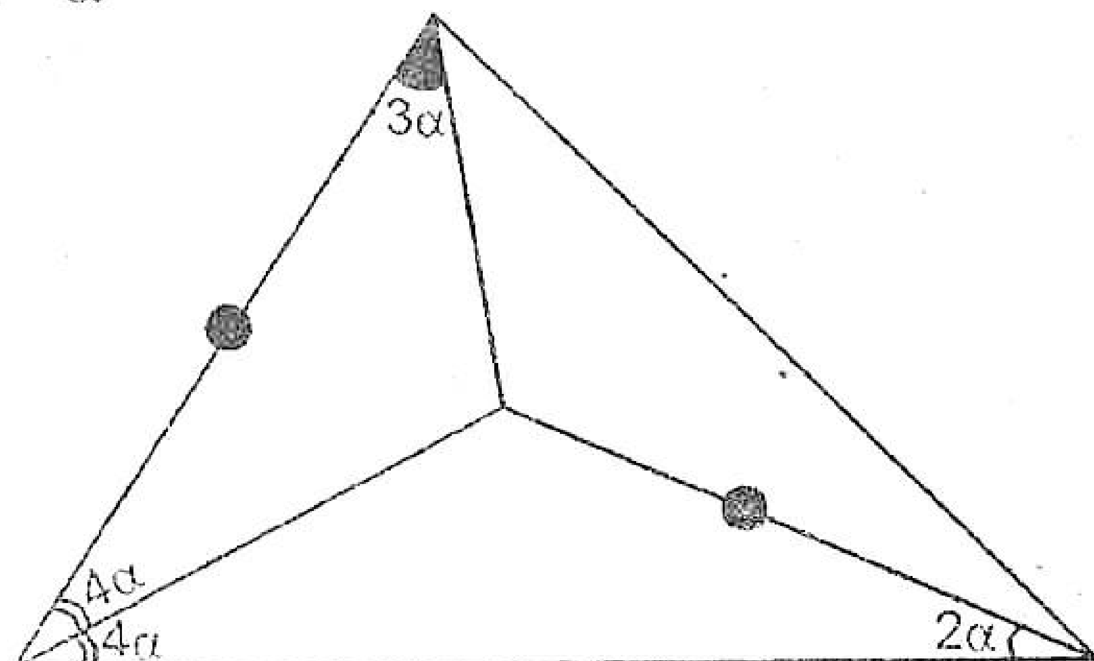
$$120° - \alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180°$$

$$4\alpha = 60°$$

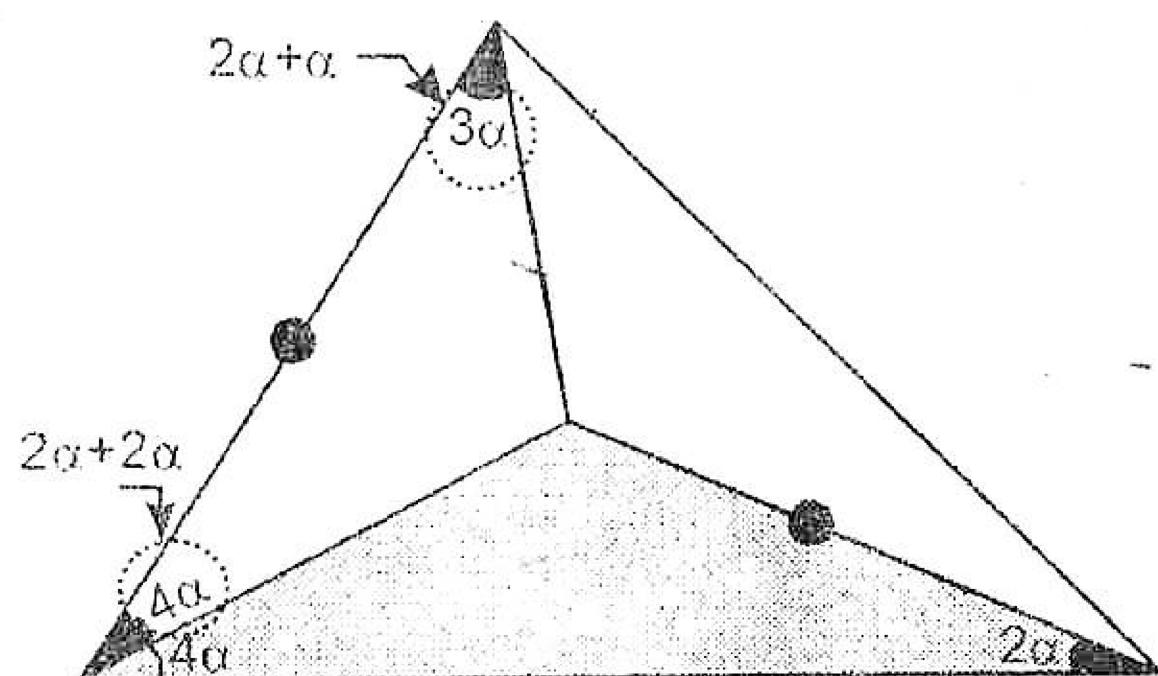
$$\alpha = 15°$$

EJEMPLO Nº 2

Hallar "α"

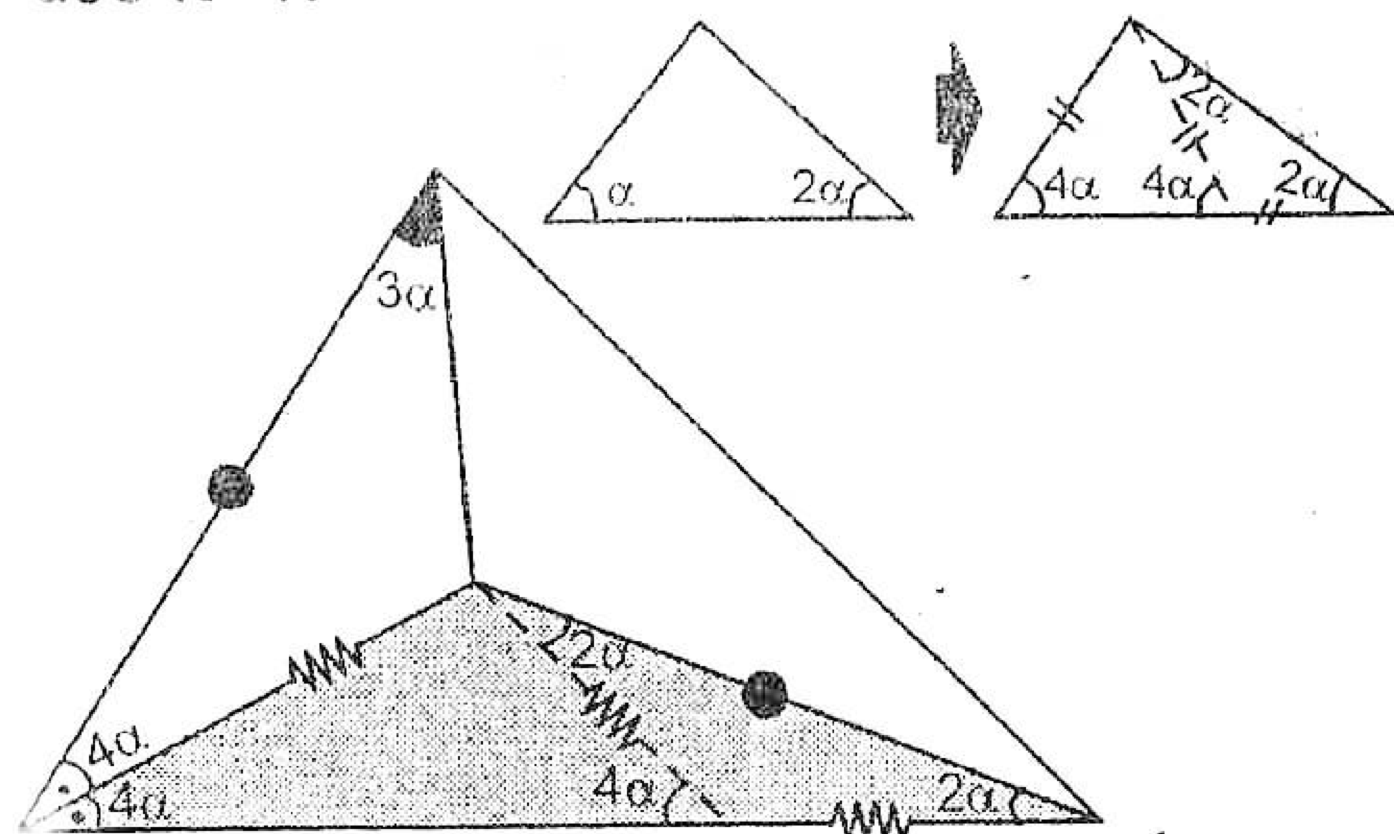


Solución:

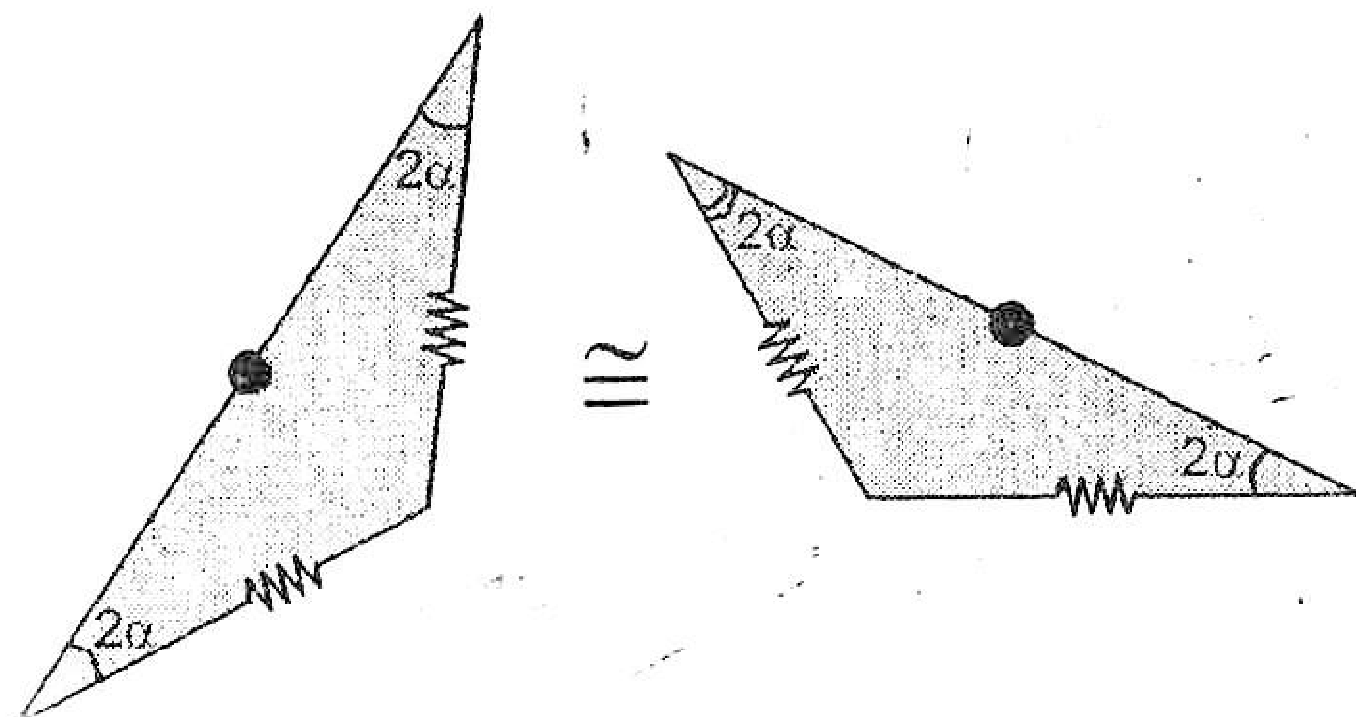


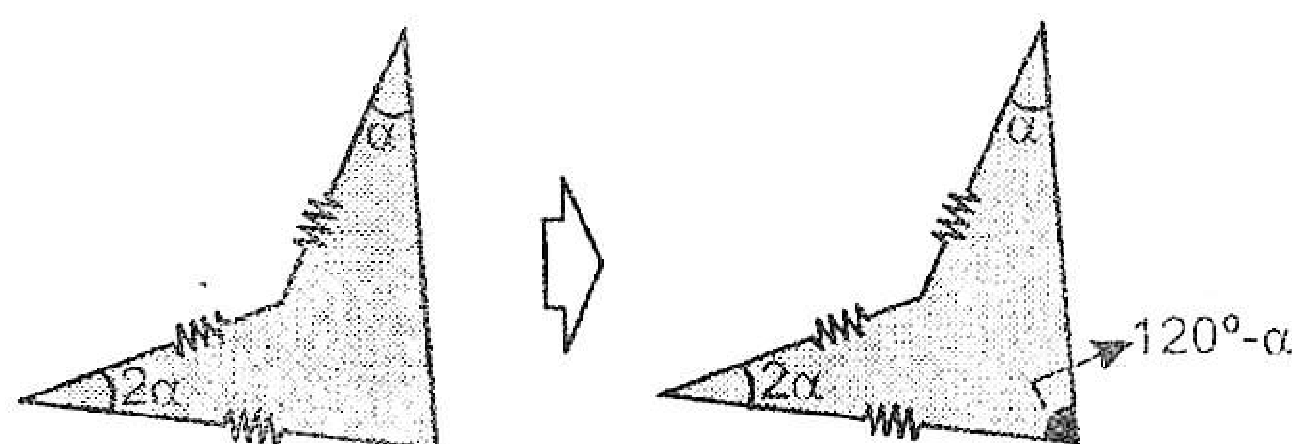
Se observa un triángulo donde se puede usar el primer criterio de construcción

Paso Nº 1:

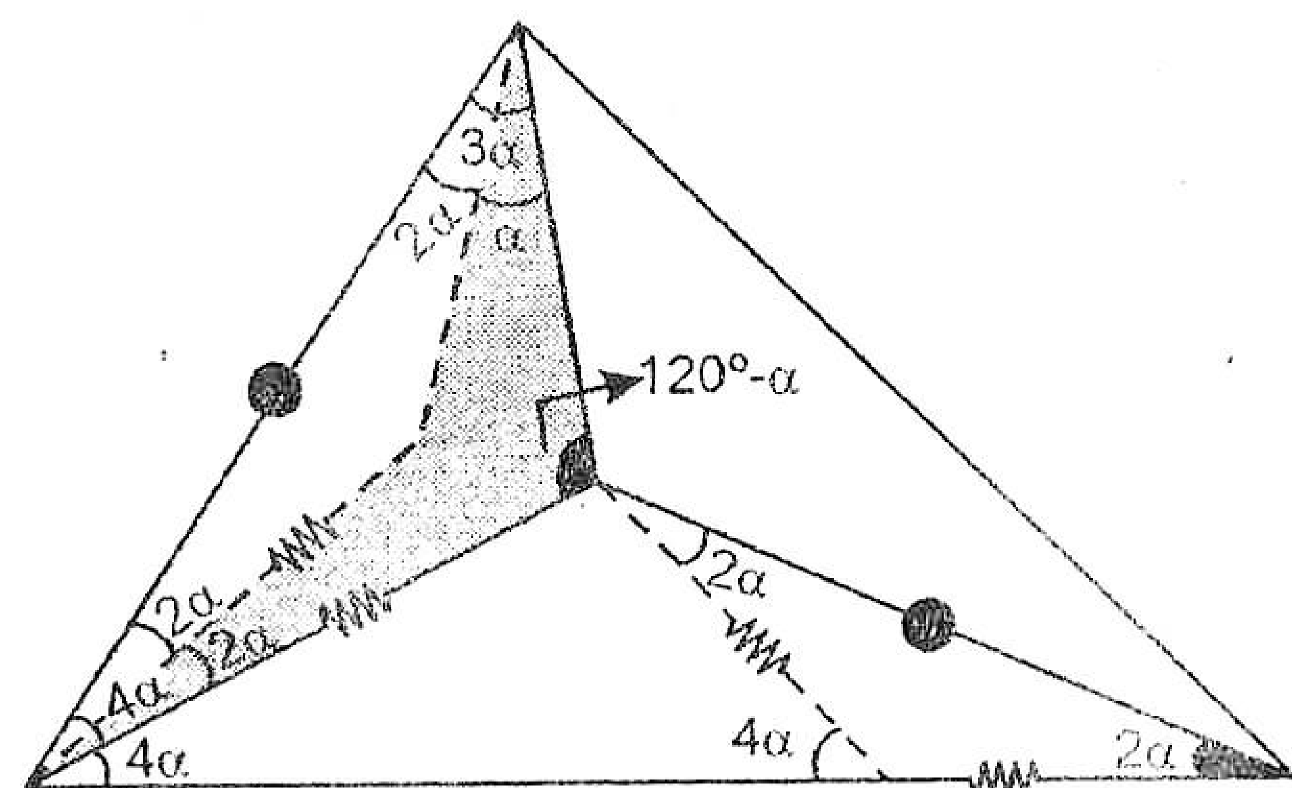


Paso Nº 2: Construimos un triángulo congruente interiormente en la figura, de la siguiente manera y se obtiene:

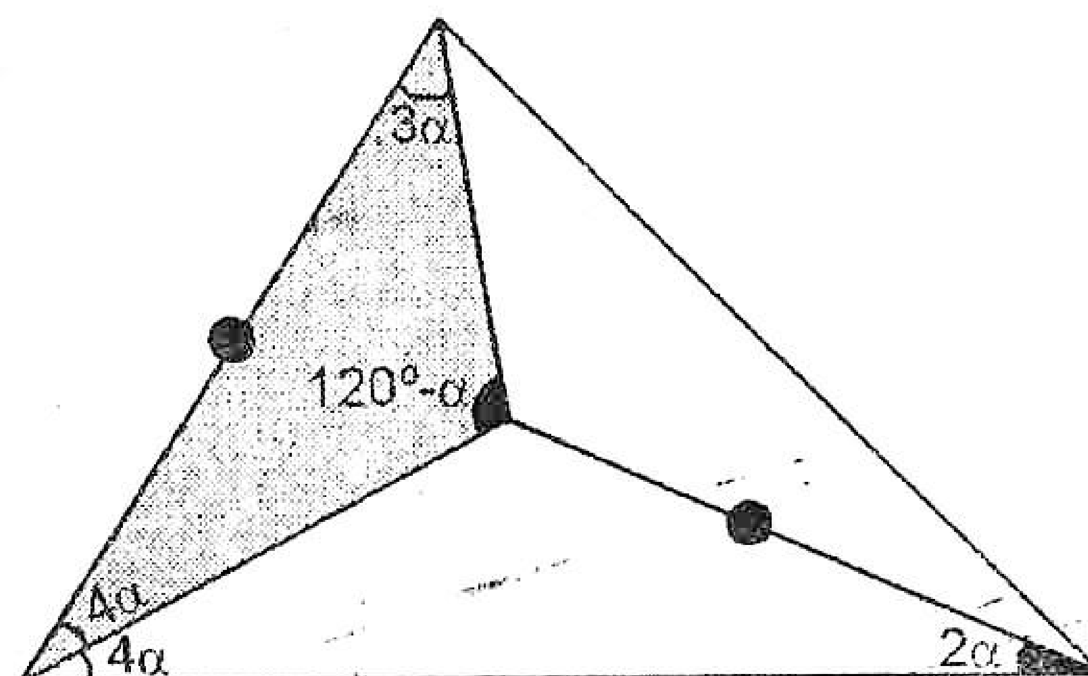




Paso Nº 3: En la figura observamos un cuadrilátero concavo donde se cumple:



Paso Nº 4: Luego en la figura sombreada, se tiene:

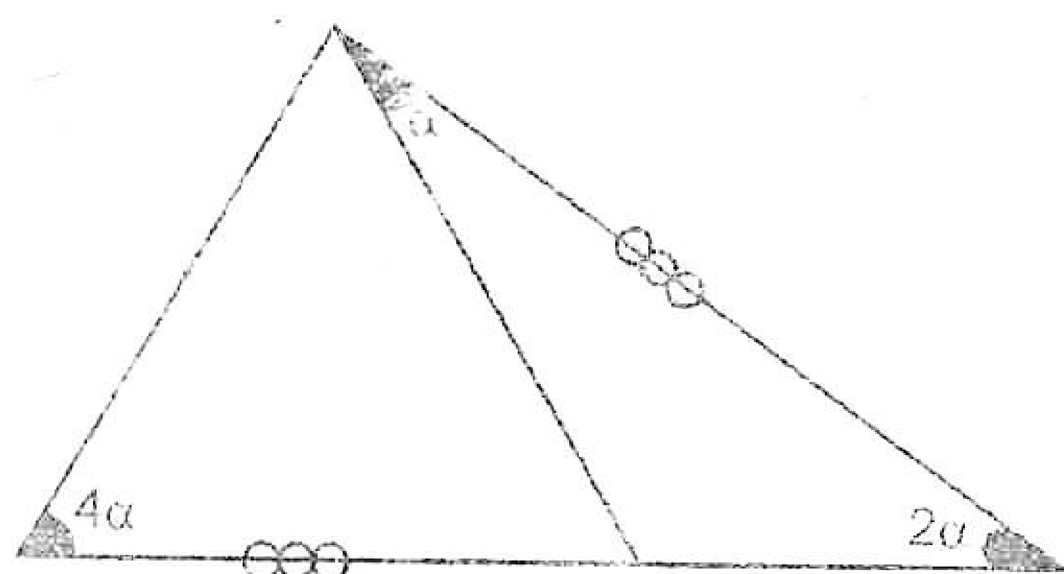


$$4\alpha + 120^\circ - \alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

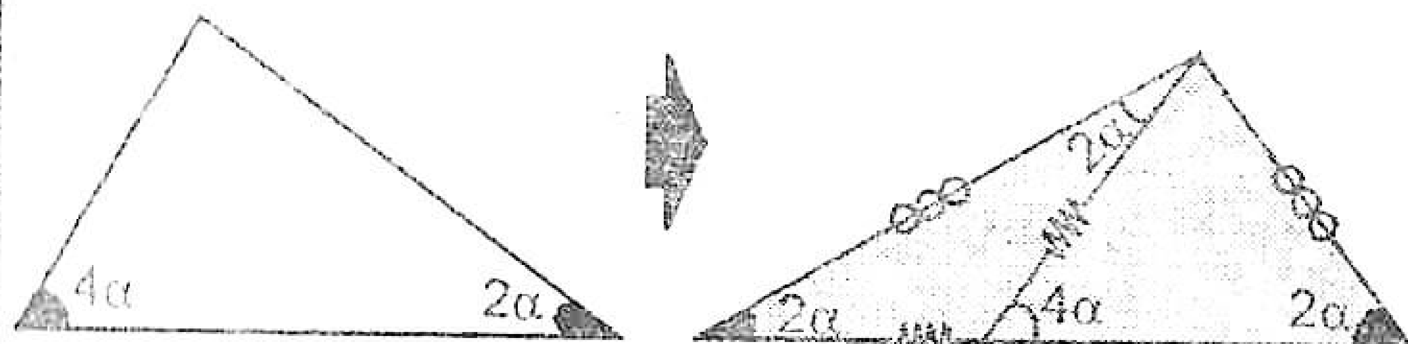
$$6\alpha = 60^\circ$$

$$\alpha = 10^\circ$$

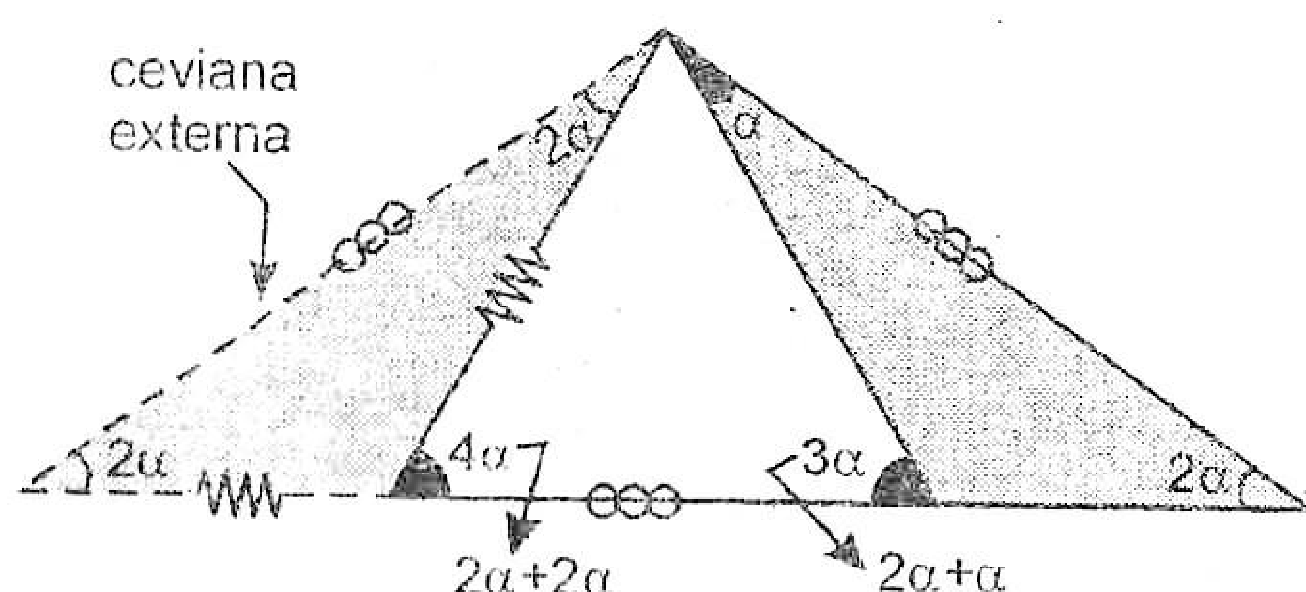
EJEMPLO Nº 3
Hallar " α "



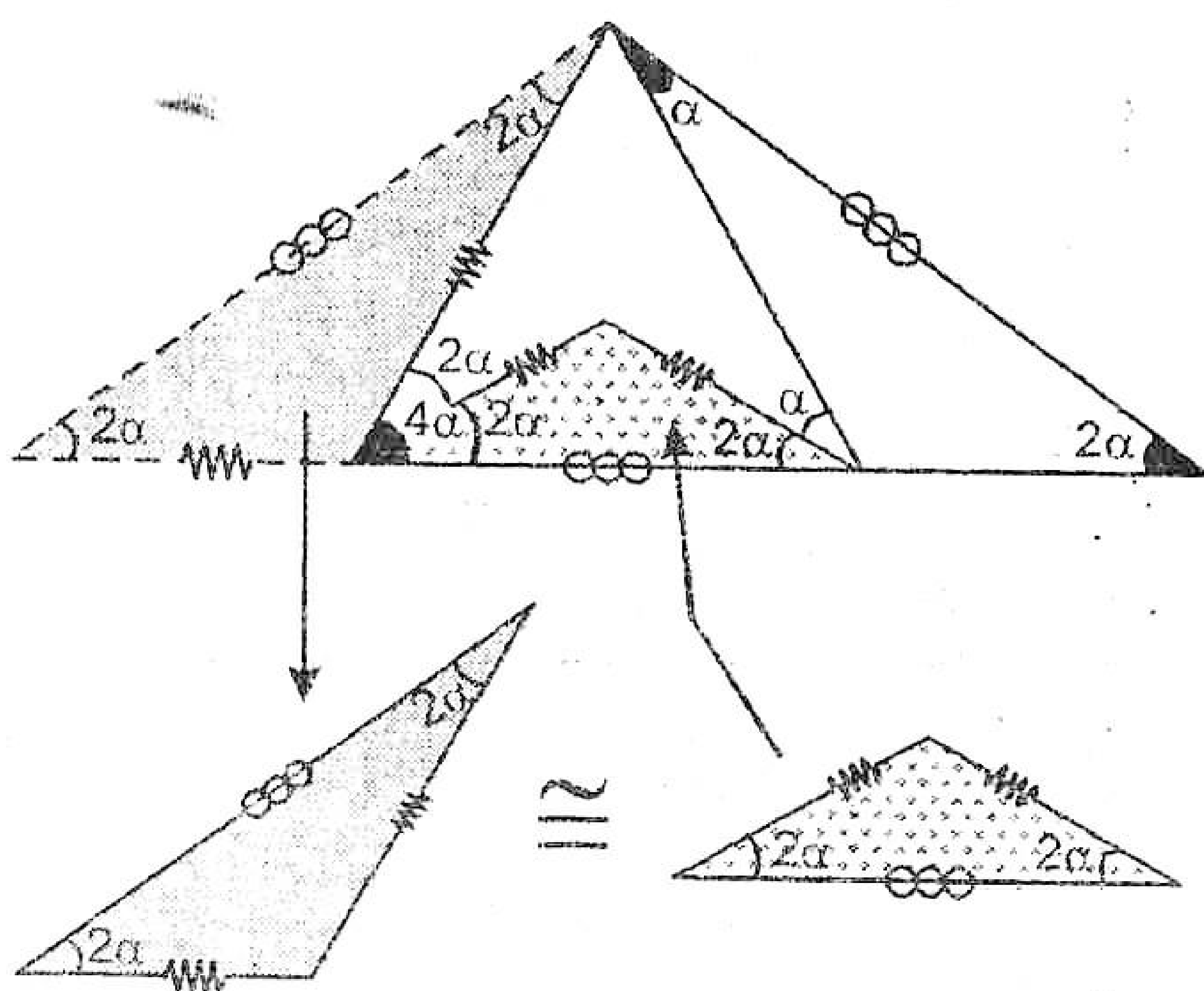
Solución: Observamos en la figura



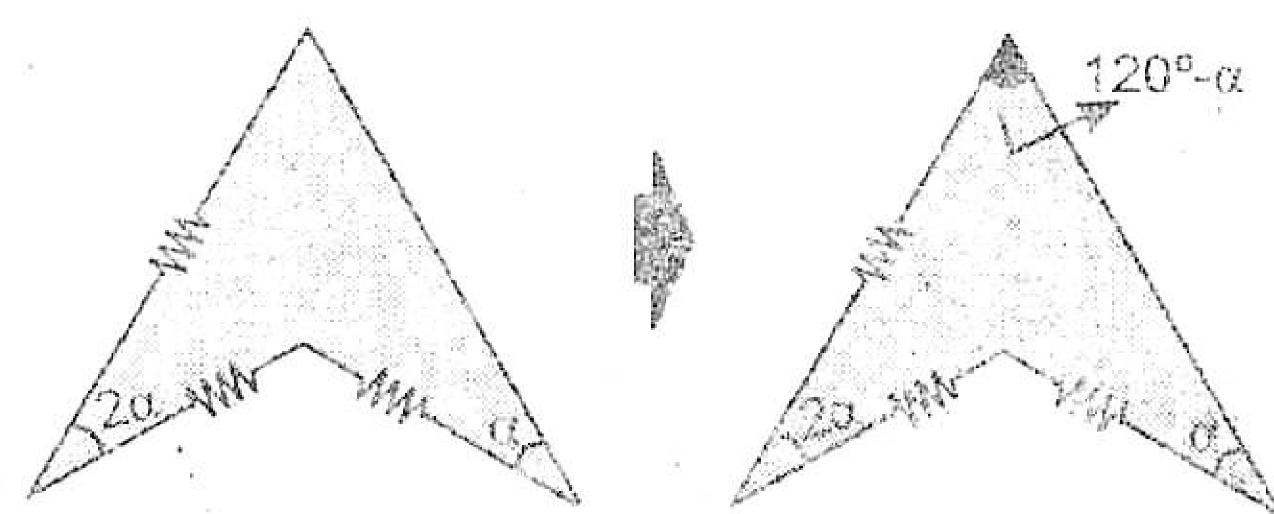
Paso Nº 1: Primero aplicamos el primer criterio de construcción, trazando una ceviana externa.

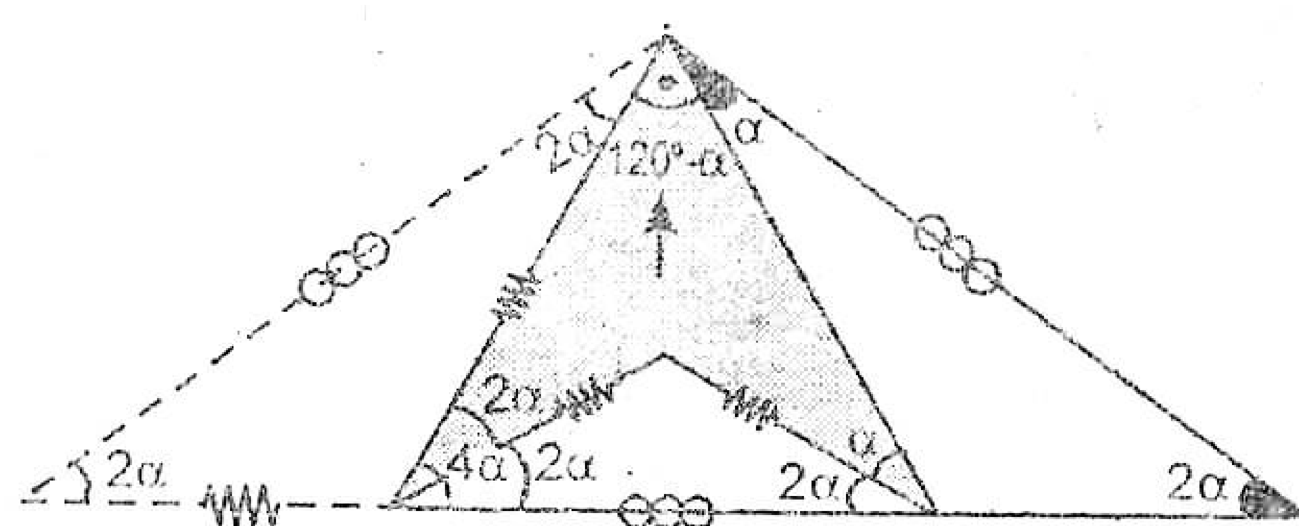


Paso Nº 2: Ahora construimos un triángulo congruente interiormente para obtener dos triángulos congruentes de la siguiente forma. caso (A.L.A.)

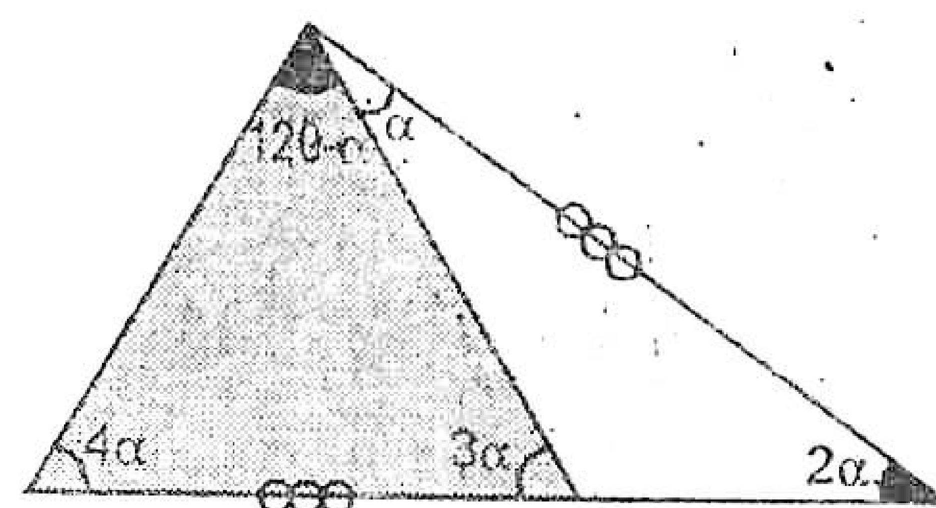


Paso Nº 3: Luego en la nueva figura observamos un cuádrilatero concavo donde se cumple:





Paso Nº 4: Finalmente se obseva en el figura sombreada que se cumple:



$$\therefore \quad 4\alpha + 120^\circ - \alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

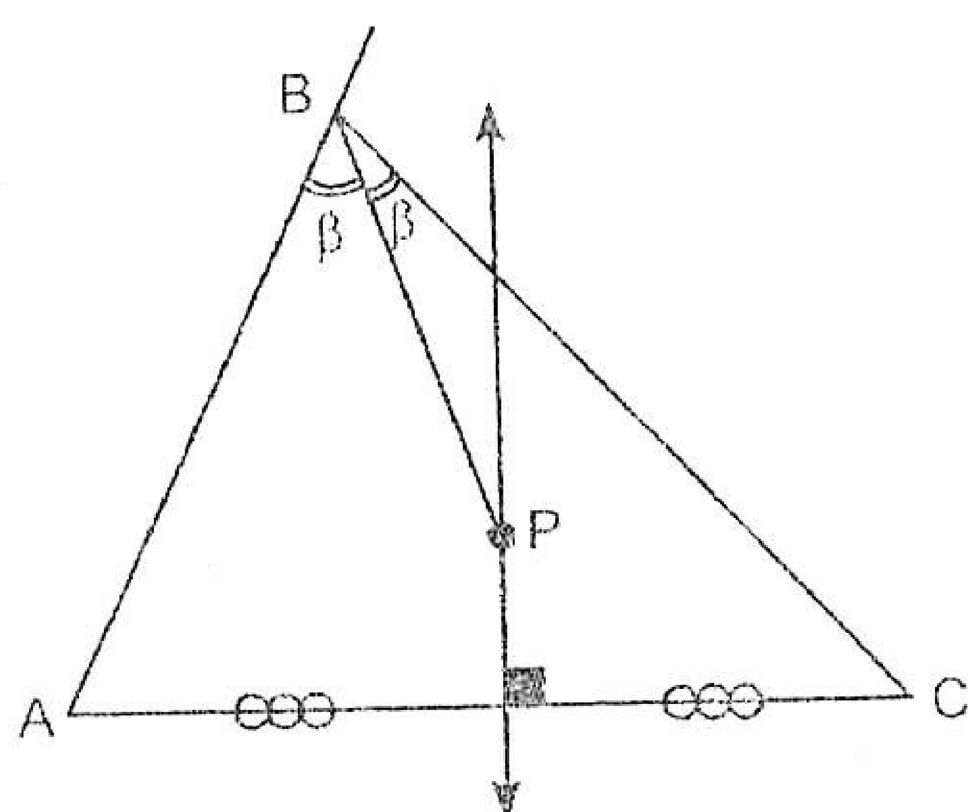
$$6\alpha = 60^\circ$$

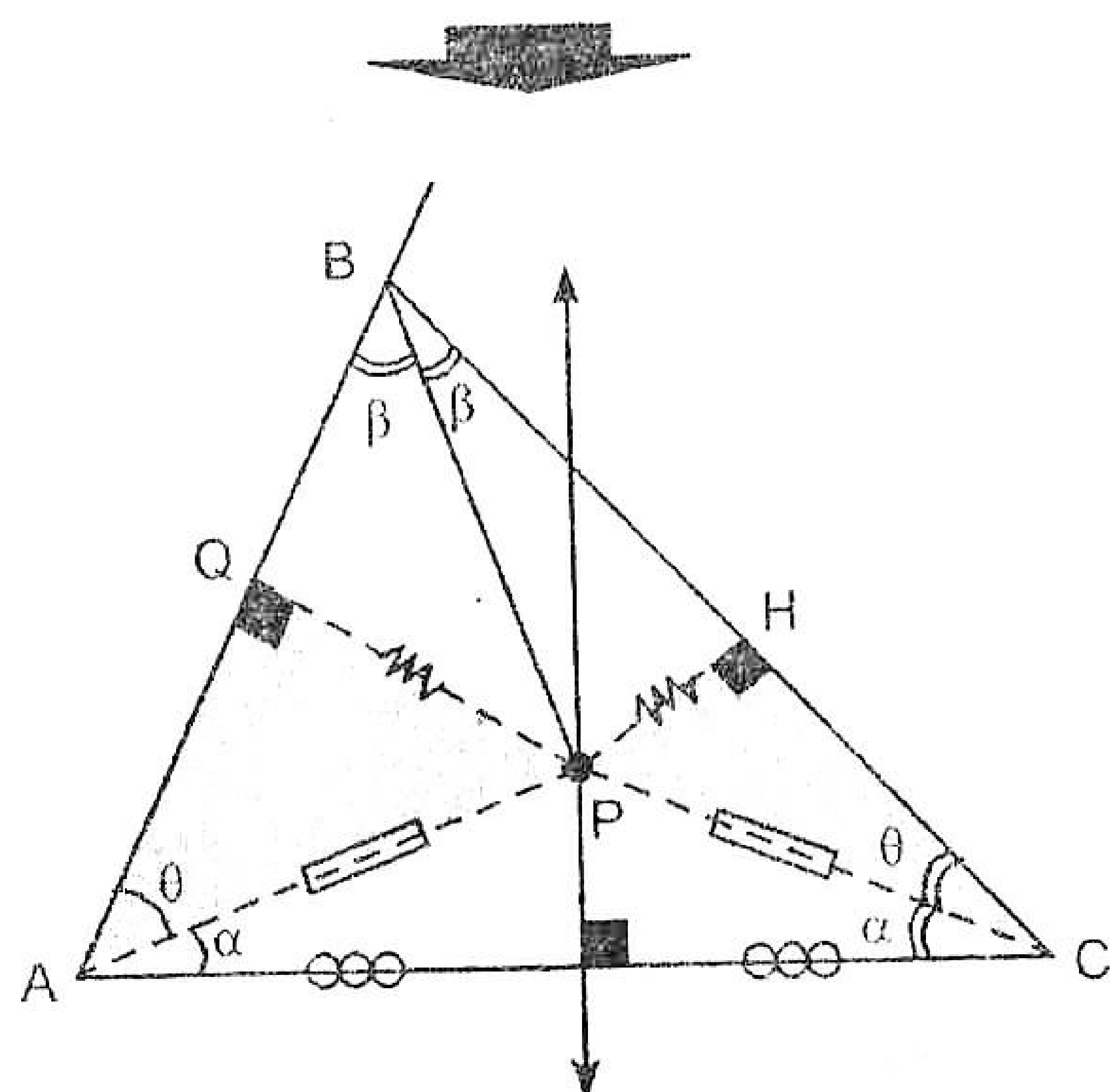
$$\alpha = 10^\circ$$

Curiosidad Matemática

¿ TODO TRIÁNGULO ES ISÓSCELES ?

continuación el autor de esta obra realizará unas consideraciones geometricas para demostrar ue todo triángulo es isósceles, lo cual por supuesto no es cierto, quedará pues para el lector veriguar cual o cuales de estas consideraciones se hizo en forma erronea.





Demostración:

Paso Nº 1: Partimos de un triángulo cualquiera ABC.

Paso Nº 2: Intersectamos la bisectriz del ángulo B con la mediatriz de $\overline{AC}$ en un punto interior P.

Paso Nº 3: Trazamos $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ y $\overline{PH} \perp \overline{BC}$

Paso Nº 4: Se observa que cumple el teorema de bisectriz: PQ = PH

Paso Nº 5: Trazamos AP y PC donde se observa que se cumple el teorema de la mediatriz: PA = PC, además: m∡PAC = m∡PCA = α

Paso Nº 6: Se observa dos triángulos rectángulos congruentes ◺AQP ≅ ◺PHC

$\Rightarrow$ m∡QAP = m∡PCH = θ

Paso Nº 7: Finalmente se observa en el triángulo ABC: m∡A = $\theta + \alpha$ = m∡C

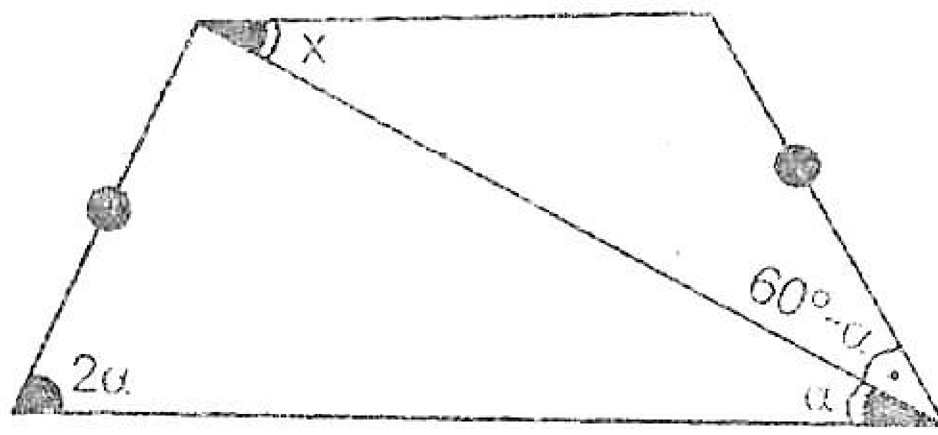
$\therefore$ $\triangle$ABC es isósceles

Extraído del Texto "Geometría Plana" de Ernesto Quispe

Problemas Resueltos

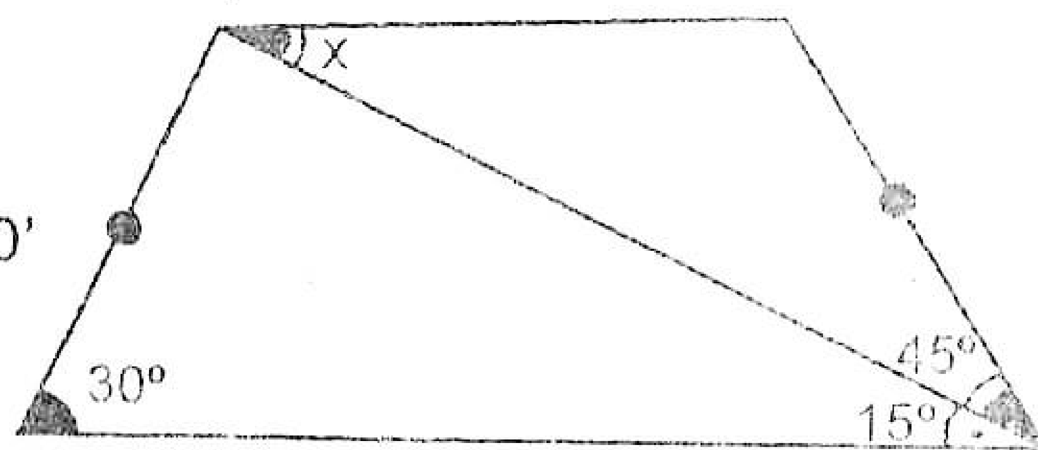
01. Calcular "x"

A) 18°
B) 20°
C) 30°
D) 37°
E) 45°



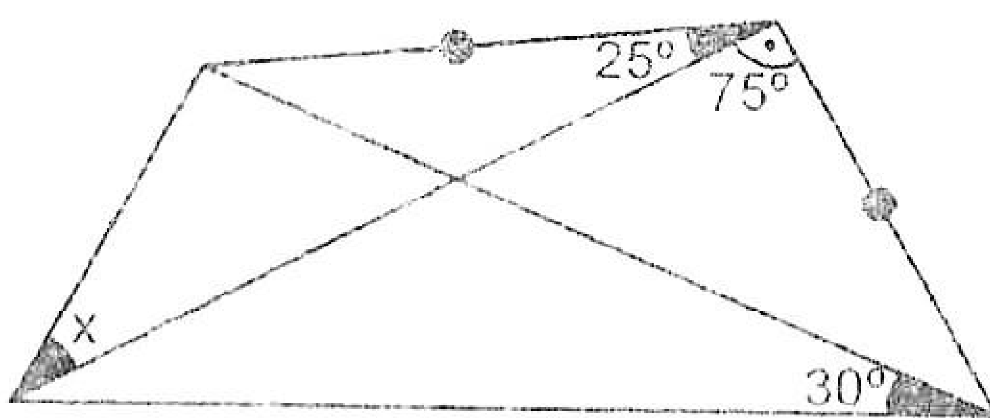
02. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 22°30'
D) 30°
E) 40°



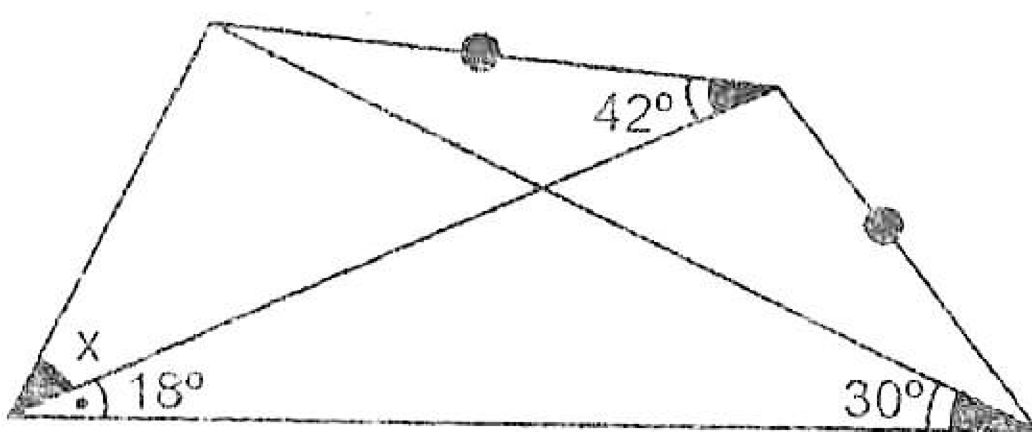
03. Calcular "x"

A) 18°
B) 20°
C) 25°
D) 30°
E) 45°



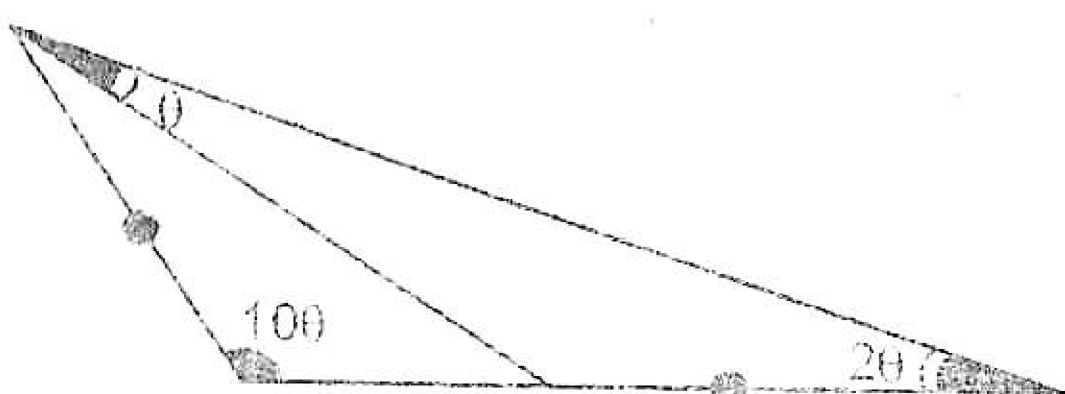
04. Calcular "x"

A) 15°
B) 22°
C) 28°
D) 30°
E) 36°



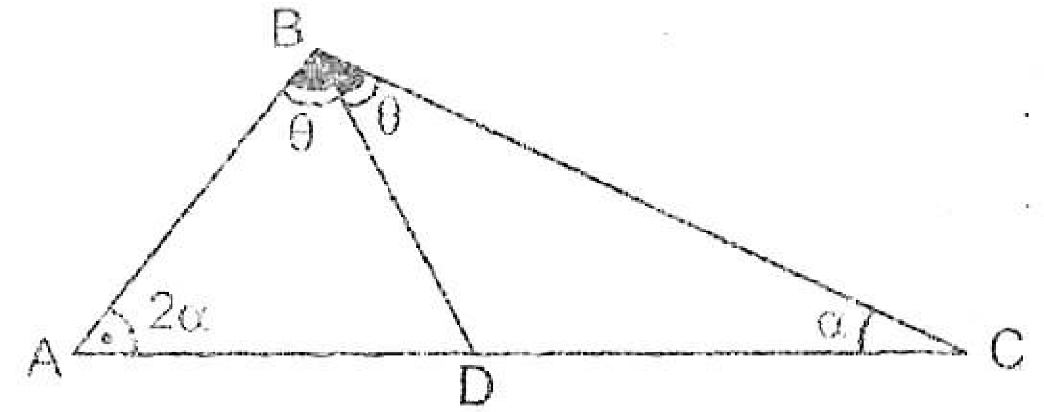
05. Calcular "θ"

A) 5°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 14°



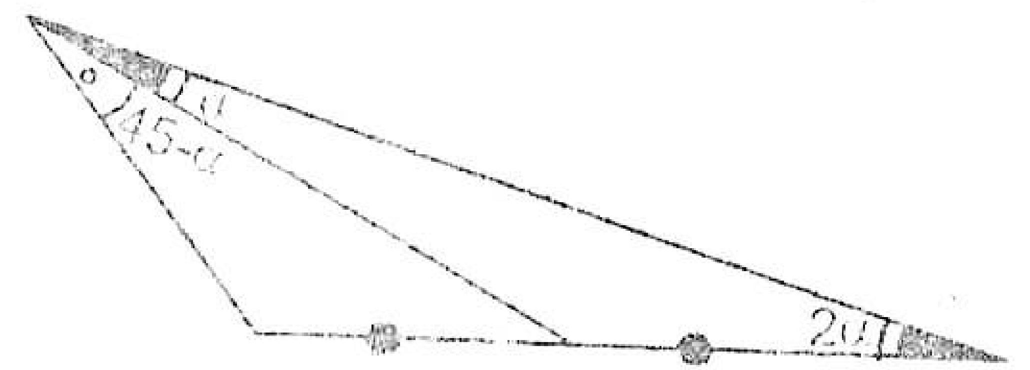
06. Calcular el máximo valor de "CD" si AB =8

A) 4
B) 7
C) 16
D) 15
E) 8



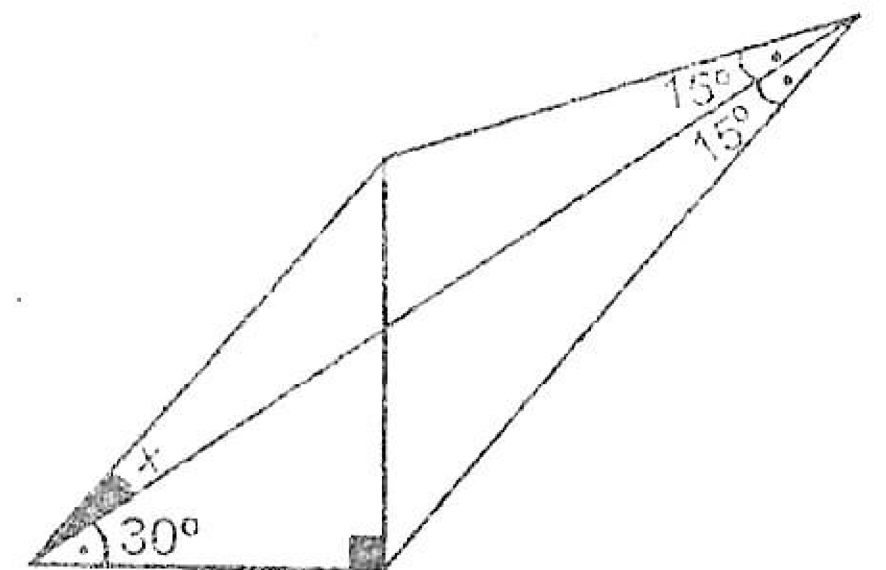
07. Calcular "α"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



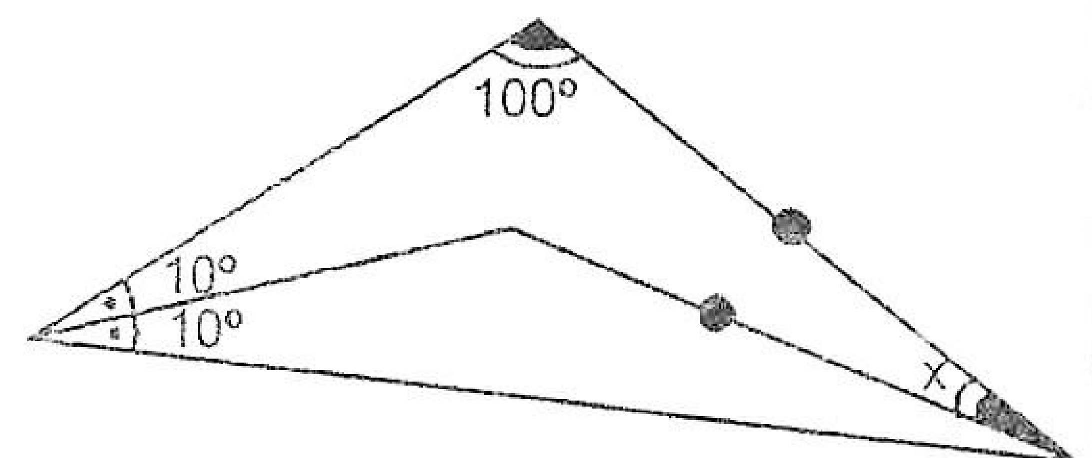
08. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 22°30'



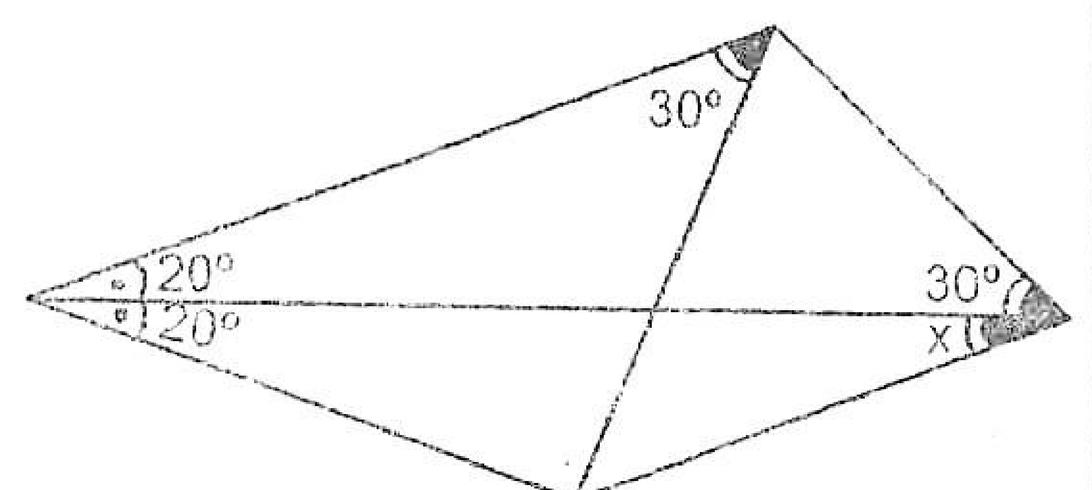
09. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 60°



10. Calcular "x"

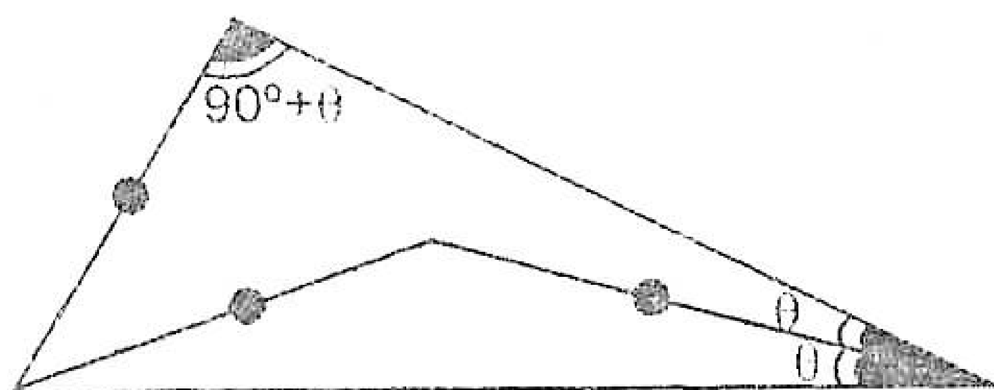
A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



La matemática, de un modo original, es fundamentalmente la ciencia de las cosas que son evidentes por sí mismas (Felix Klein)

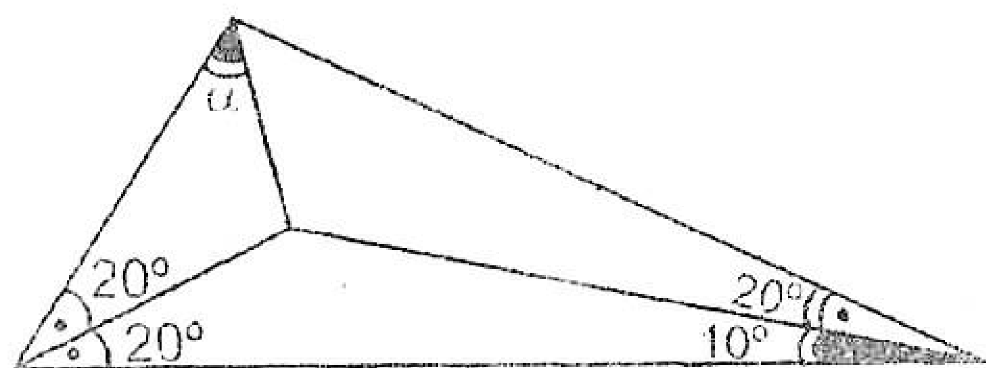
11. Calcular "θ"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



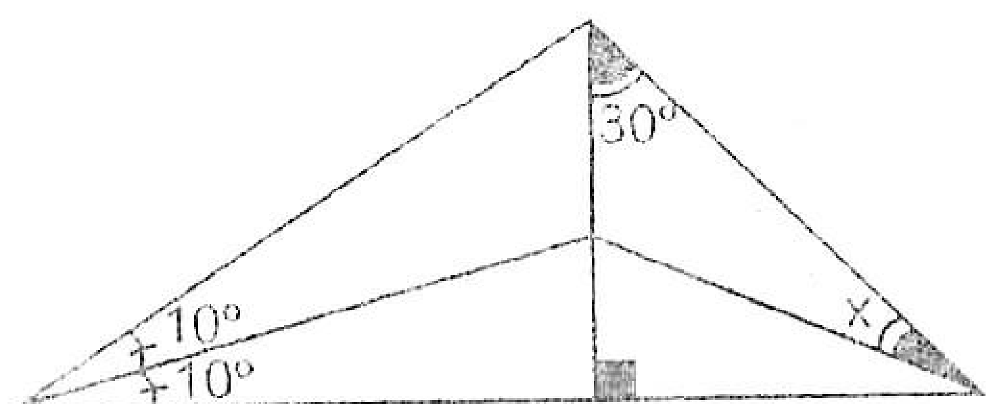
12. Calcular "α"

A) 20°
B) 30°
C) 32°
D) 37°
E) 60°



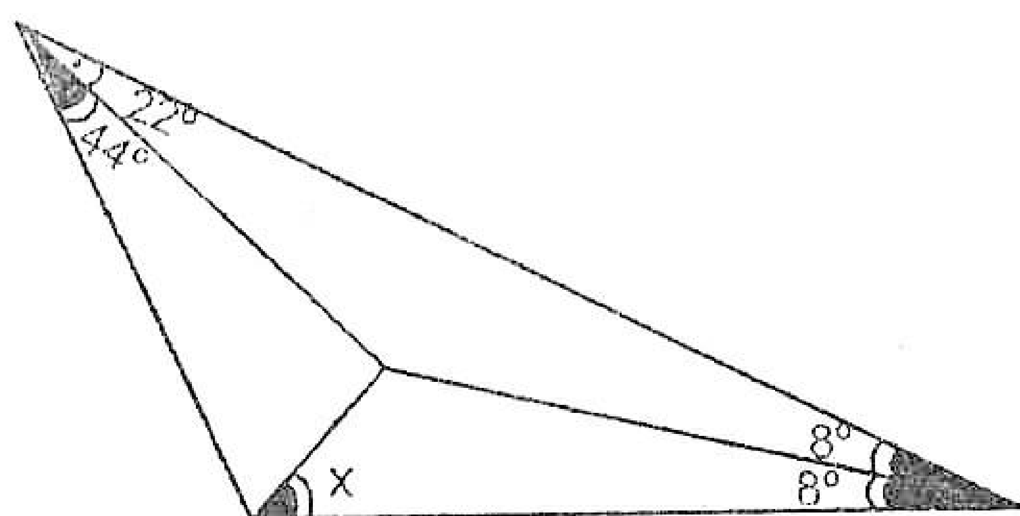
13. Calcular "x"

A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25°



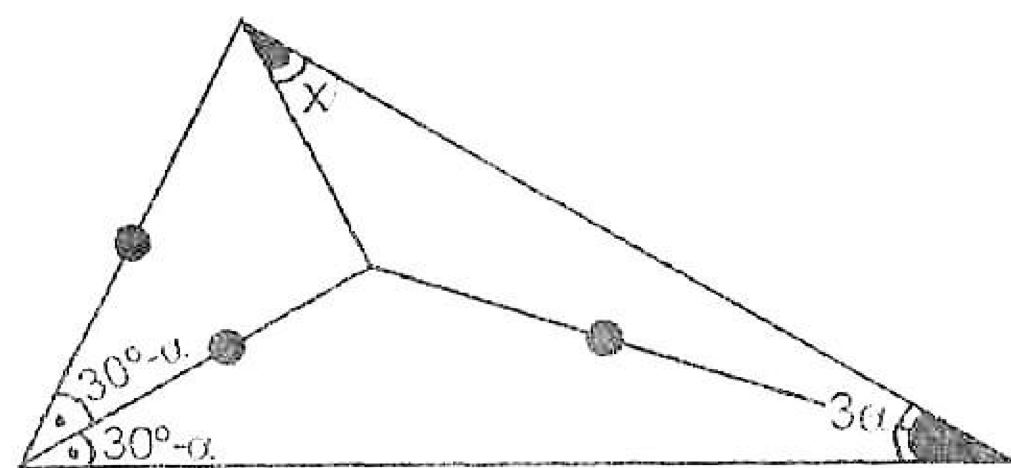
14. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 37°
D) 45°
E) 60°



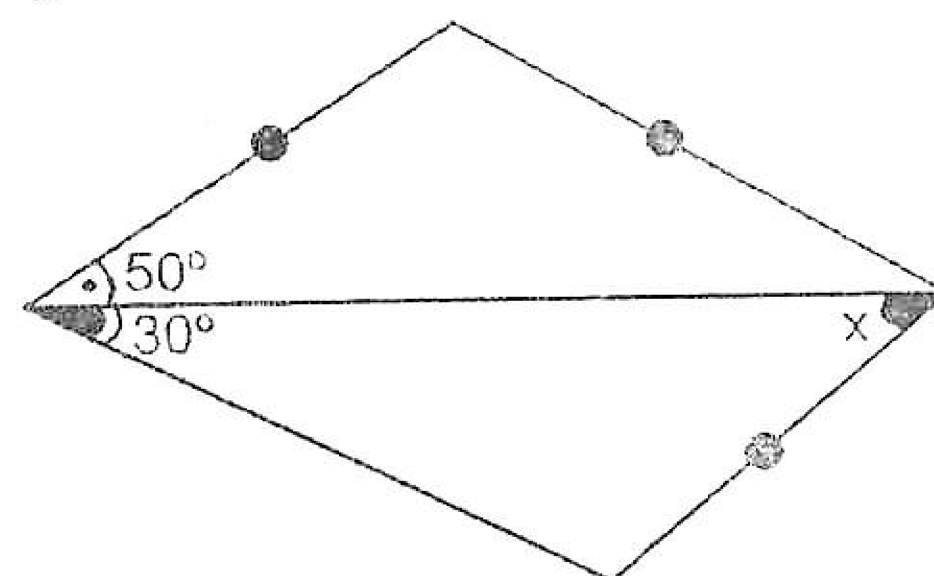
15. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 45°
D) 30°
E) 60°



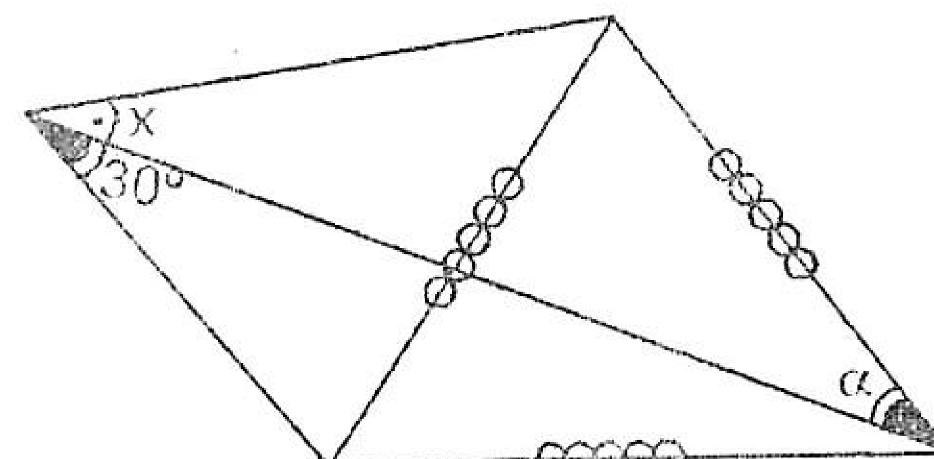
16. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 30°



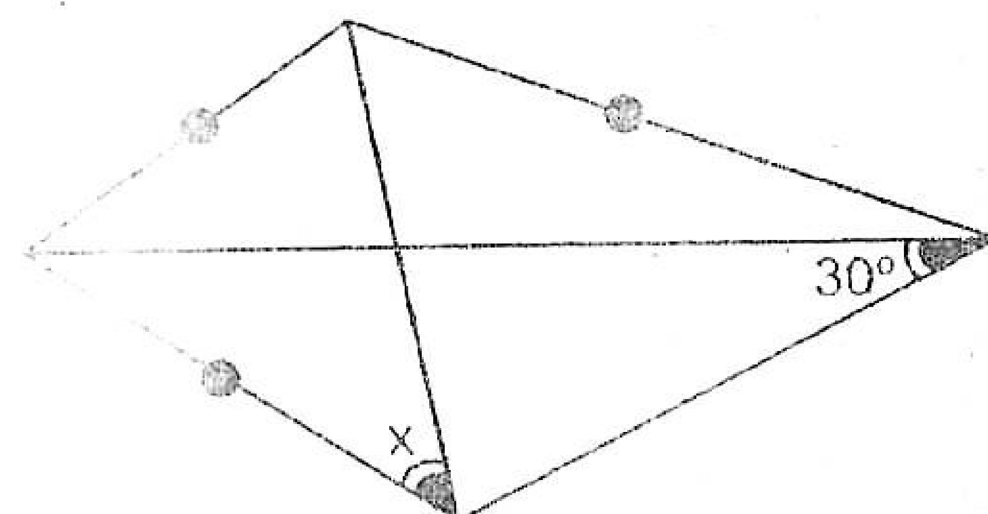
17. Calcular "x"

A) α/2
B) α
C) 30 – α
D) 2α
E) 60 – α



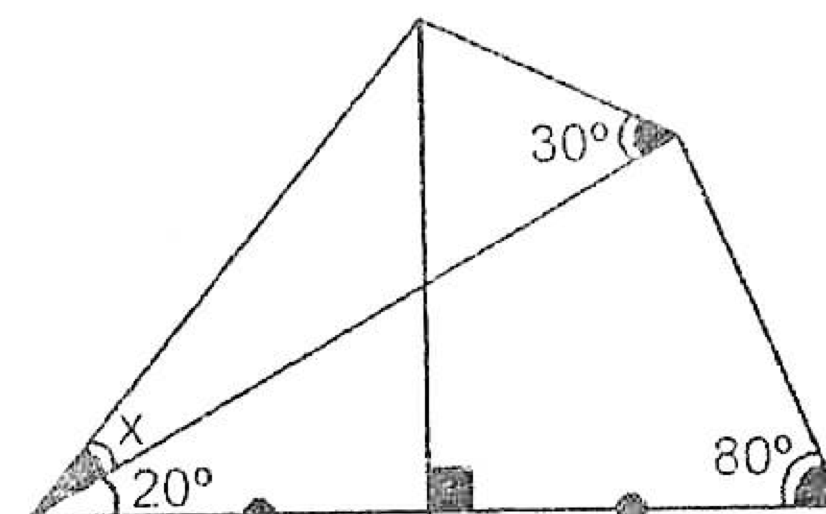
18. Calcular "x"

A) 30°
B) 37°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



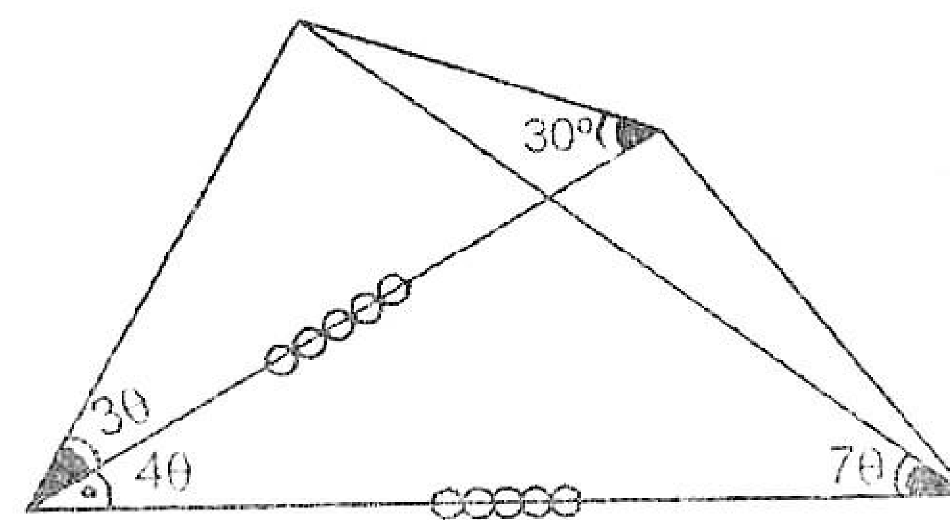
19. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 24°



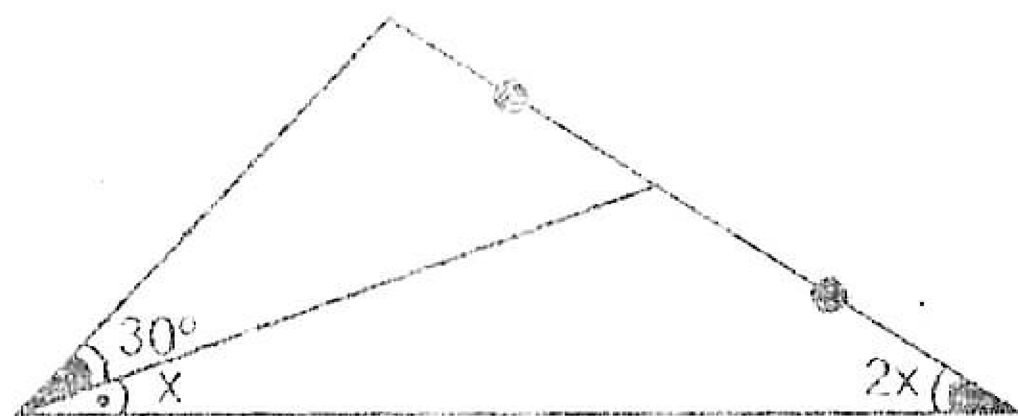
20. Calcular "θ"

A) 6°
B) 8°
C) 9°
D) 10°
E) 12°



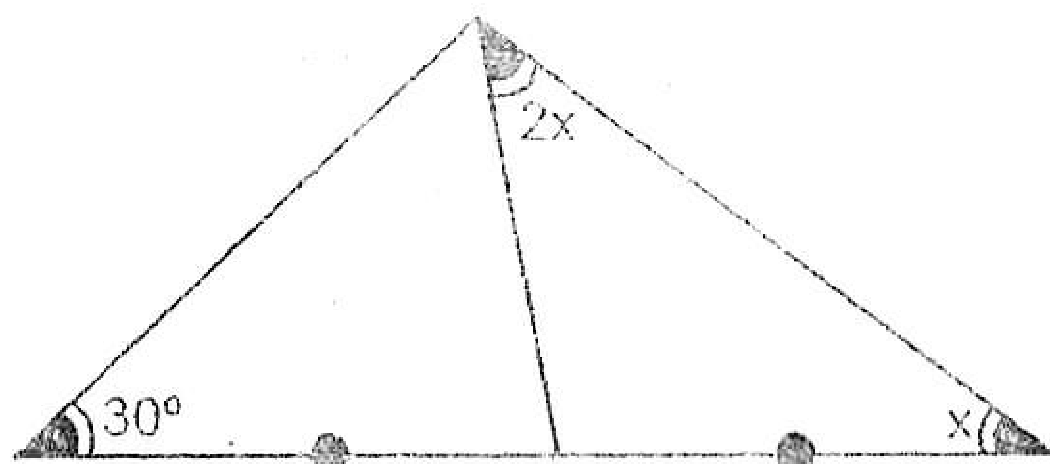
21. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 25°



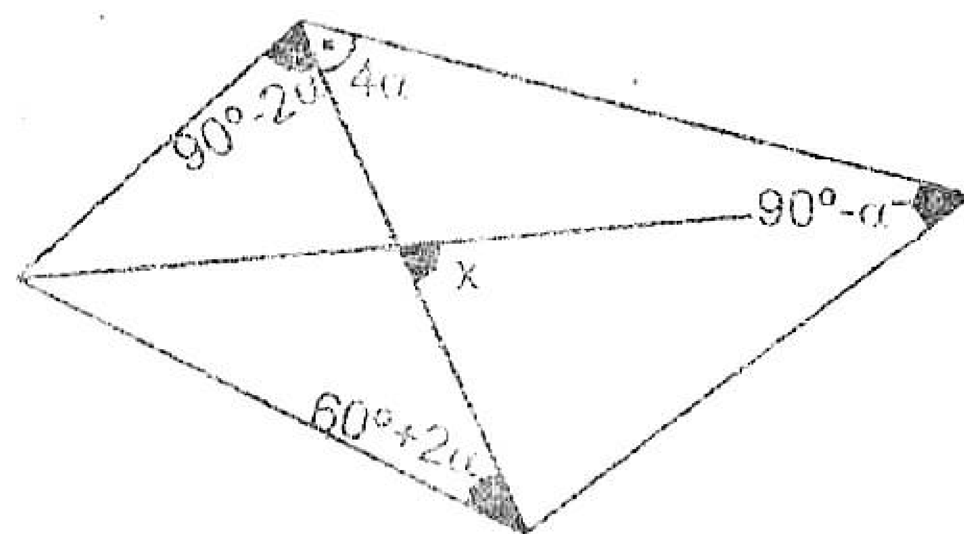
22. Calcular "x"

A) 5°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



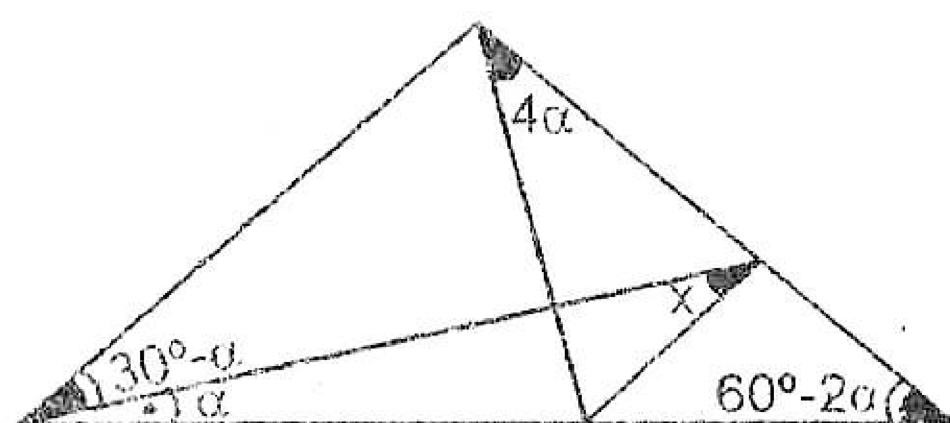
23. Calcular "x"

A) 90°
B) 90°– α
C) 90°+α
D) 60°+3α
E) 75°+2α



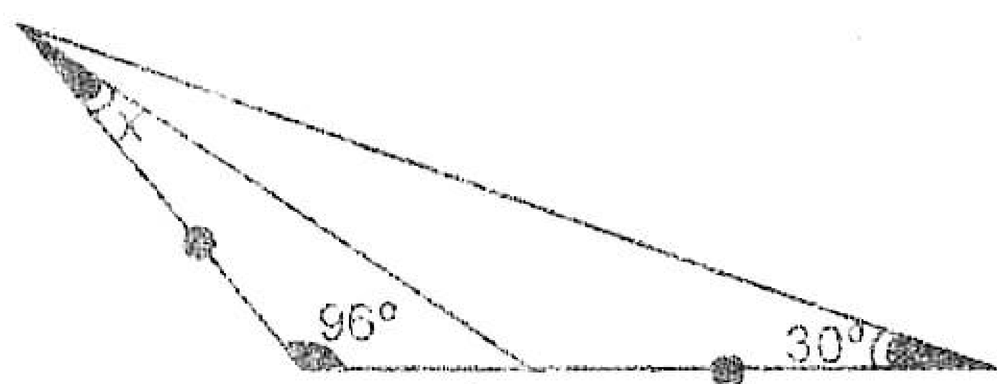
24. Calcular "x"

A) α
B) 30°+α
C) 3α
D) 30°
E) 30–α



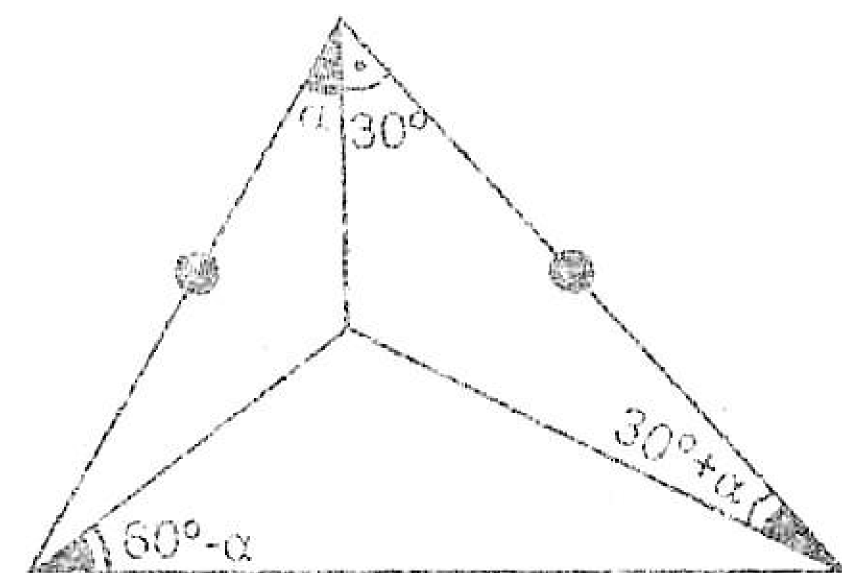
25. Calcular "x"

A) 18°
B) 24°
C) 30°
D) 37°
E) 45°



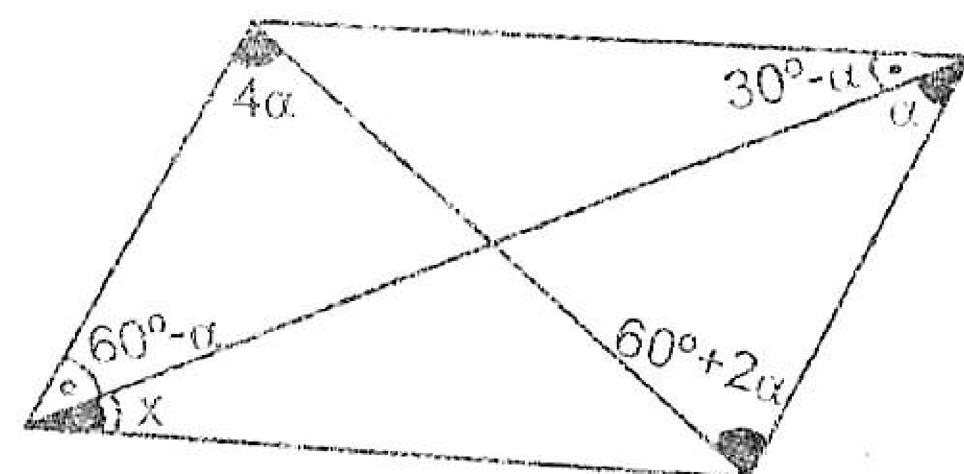
26. Calcular "α"

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



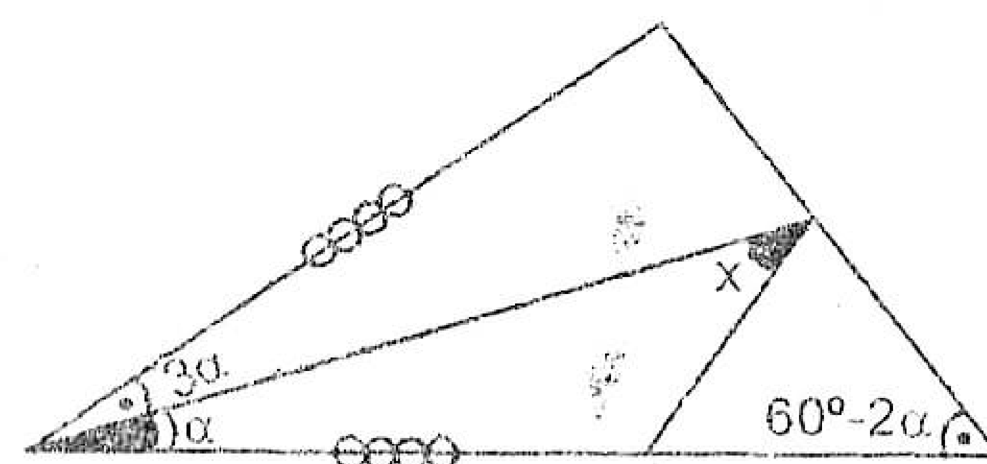
27. Calcular "x"

A) 18°
B) 24°
C) 36°
D) 30°
E) 45°



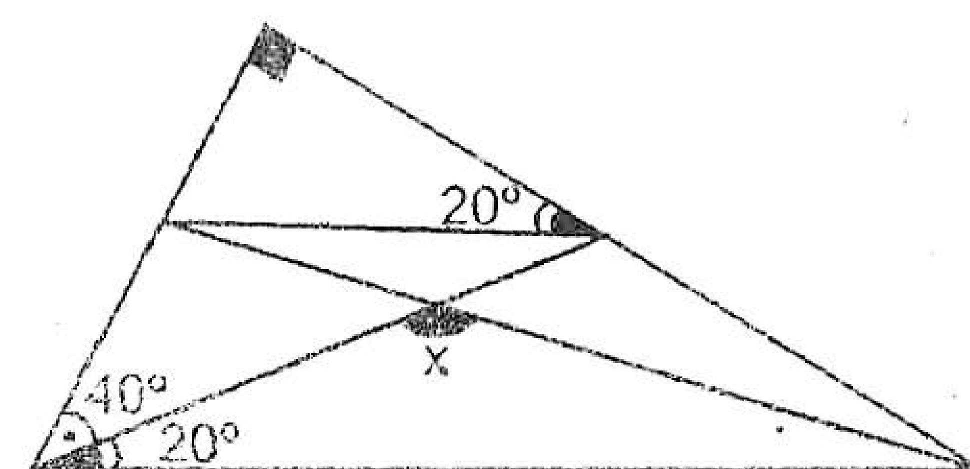
28. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



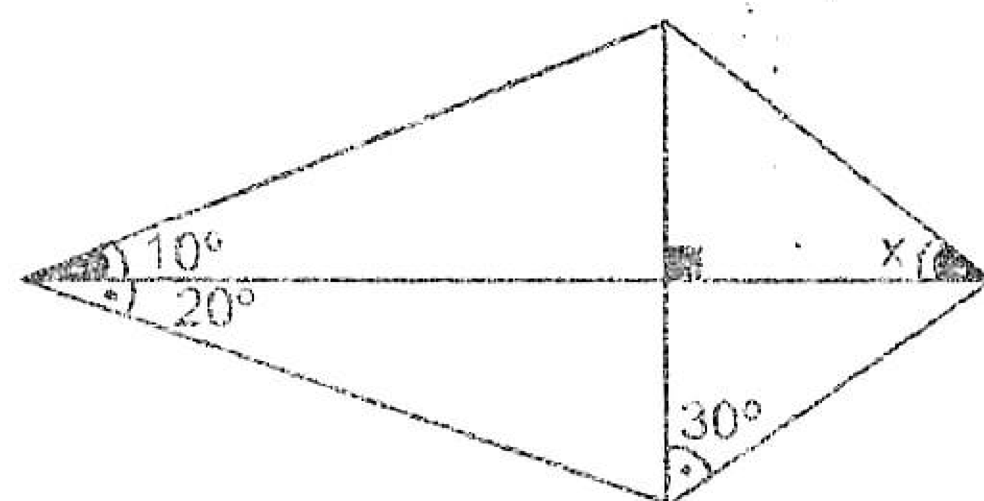
29. Calcular "x"

A) 120°
B) 140°
C) 130°
D) 135°
E) 150°



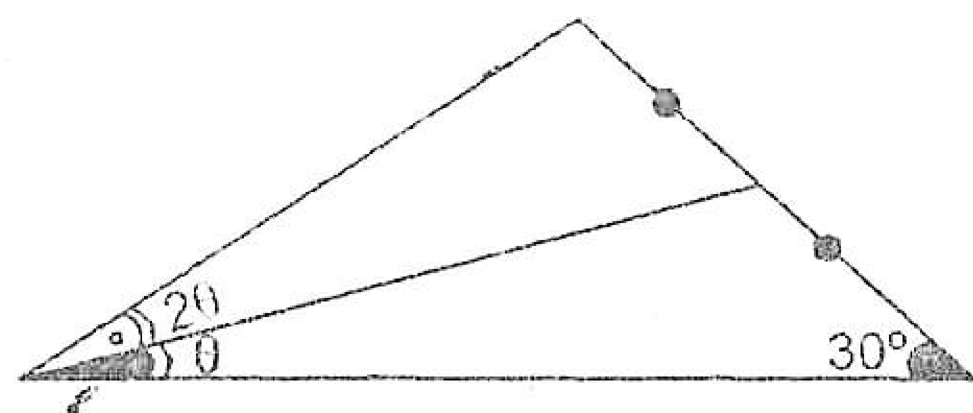
30. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°



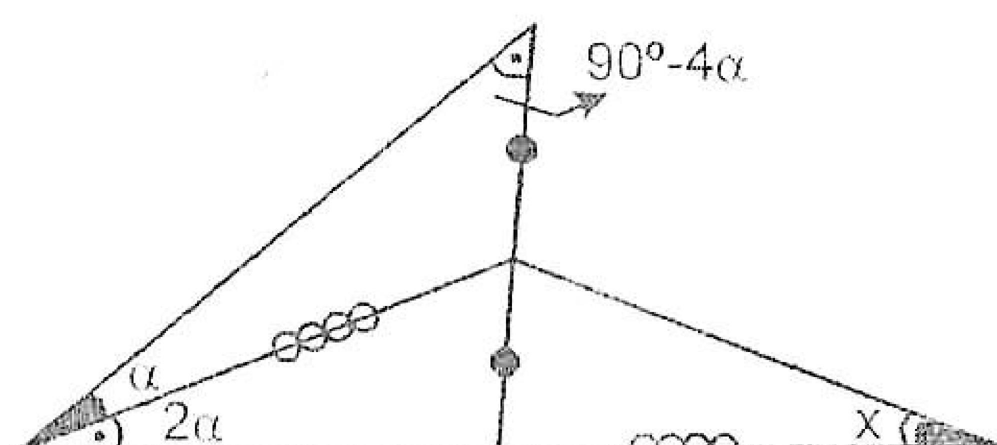
31. Calcular "θ"

A) 15°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 26°



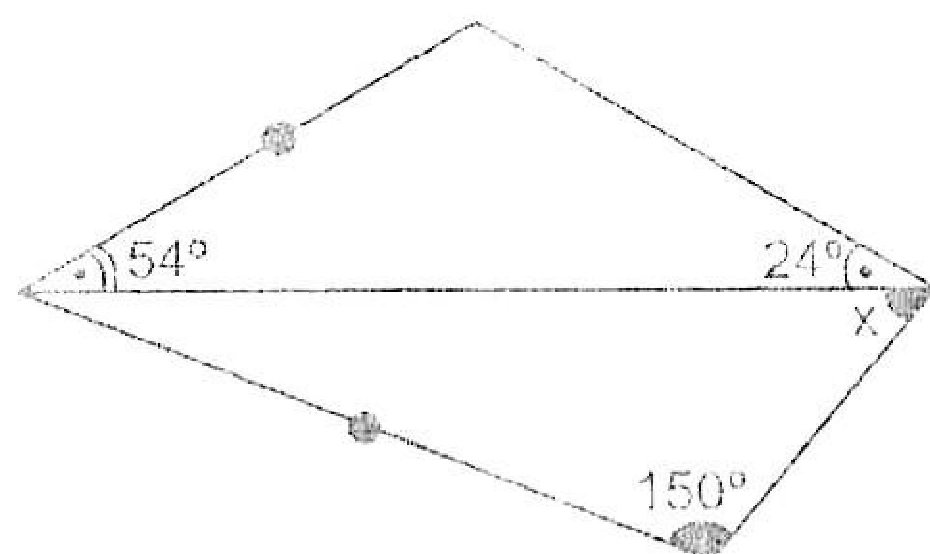
32. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 54°



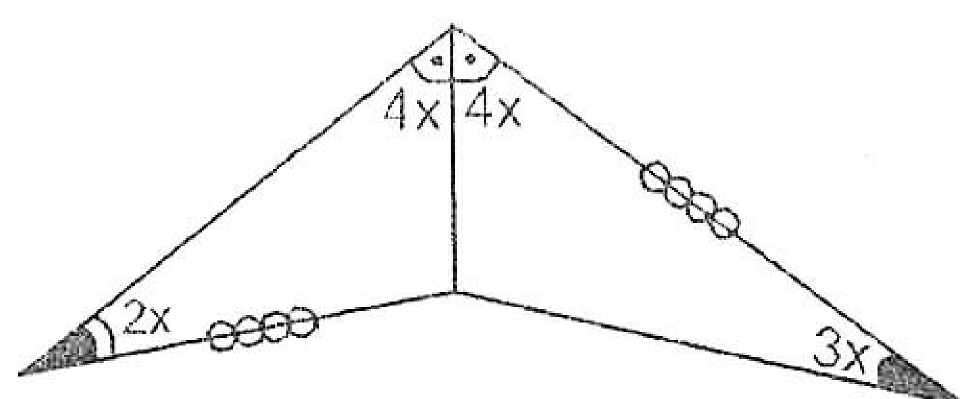
33. Calcular "x"

A) 9°
B) 10°
C) 11°
D) 12°
E) 15°



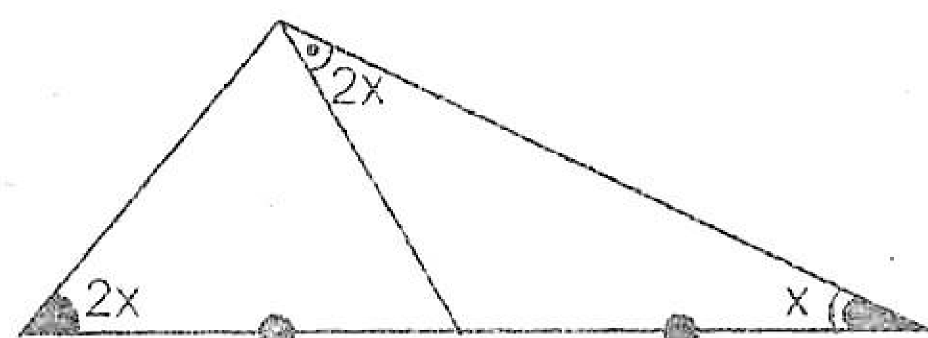
34. Calcular "x"

A) 8°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



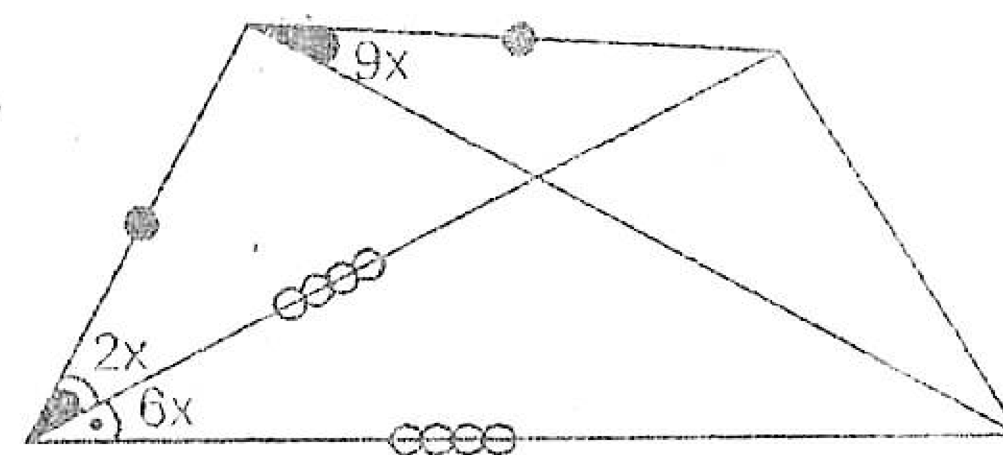
35. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



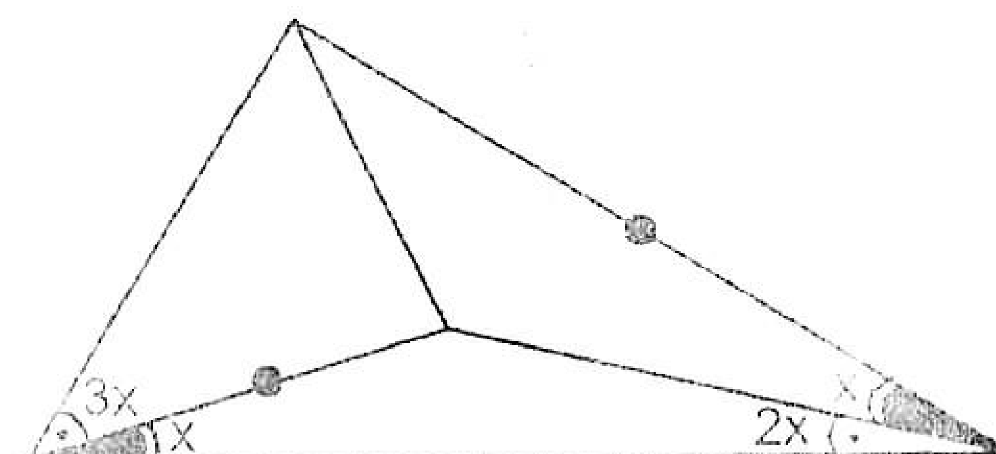
36. Calcular "x"

A) 3°
B) 6°
C) 9°
D) 10°
E) 12°



37. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



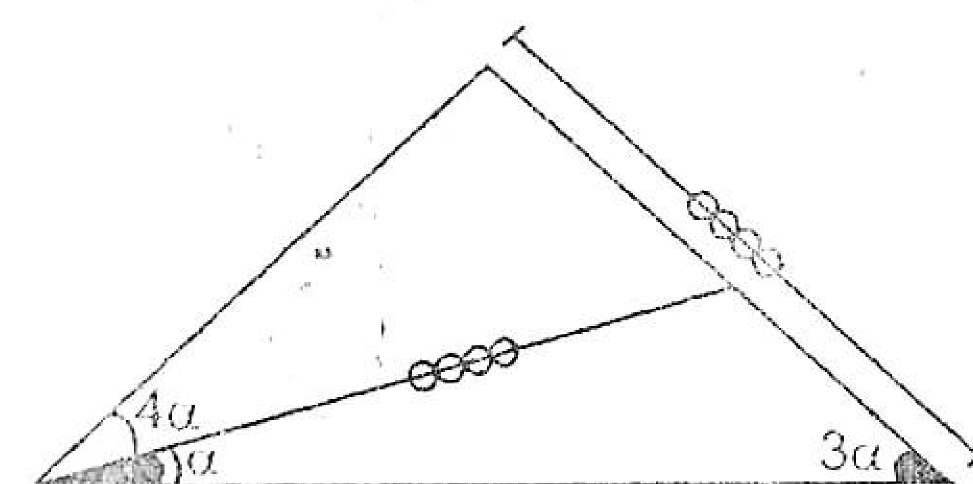
38. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



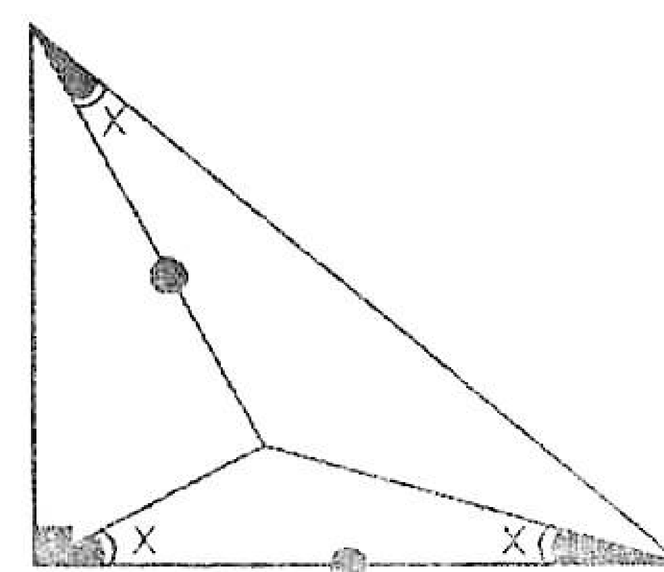
39. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



40. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 22°30'



41. Calcular "α"

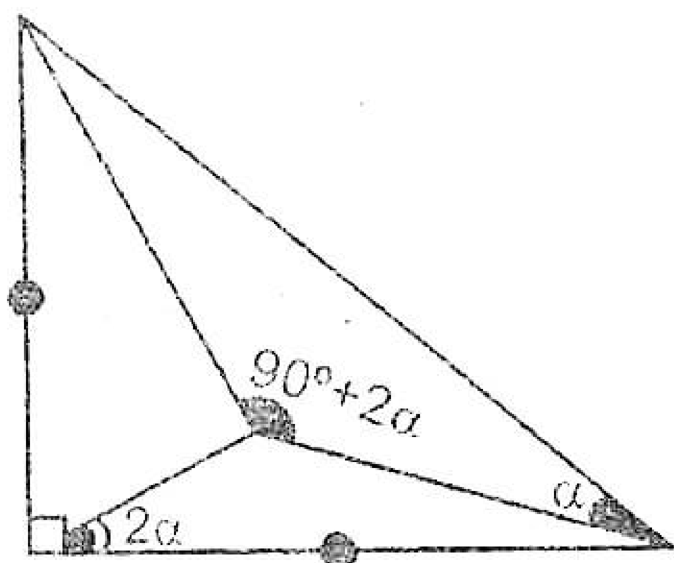
A) 10°

B) 22°30'

C) 15°

D) 18°

E) 20°



42. Calcular "x"

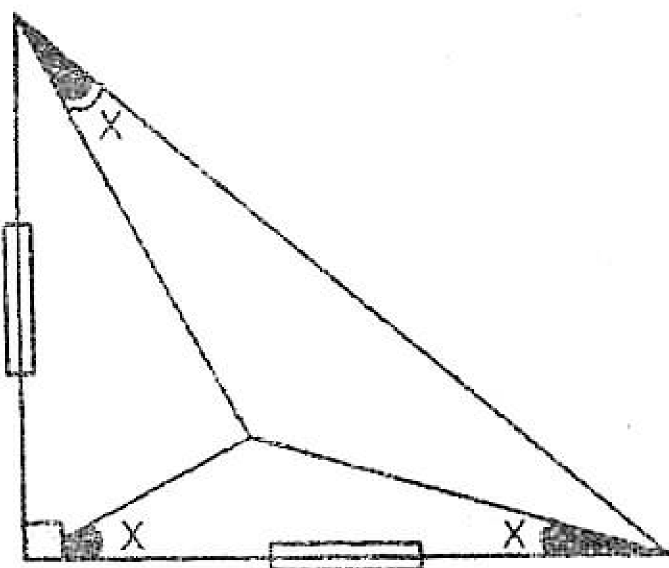
A) 10°

B) 12°

C) 15°

D) 20°

E) 24°



43. Calcular "α"

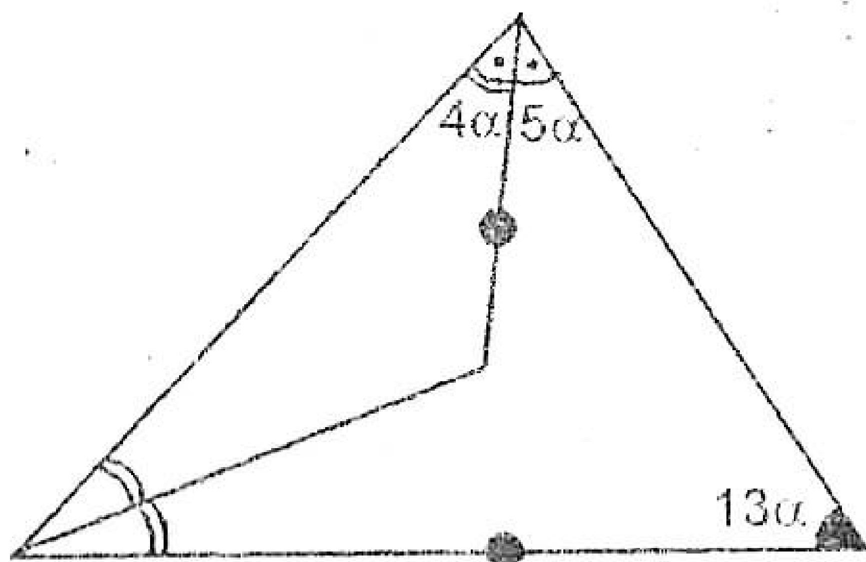
A) 4°

B) 4°30'

C) 5°

D) 6°30'

E) 9°



44. Calcular "x"

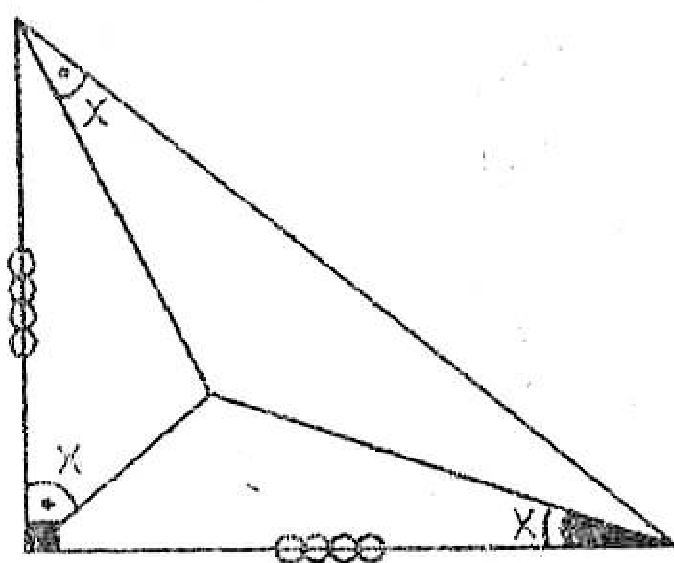
A) 39°/2

B) 53°/2

C) 30°

D) 37°

E) 53°



45. Calcular "x"

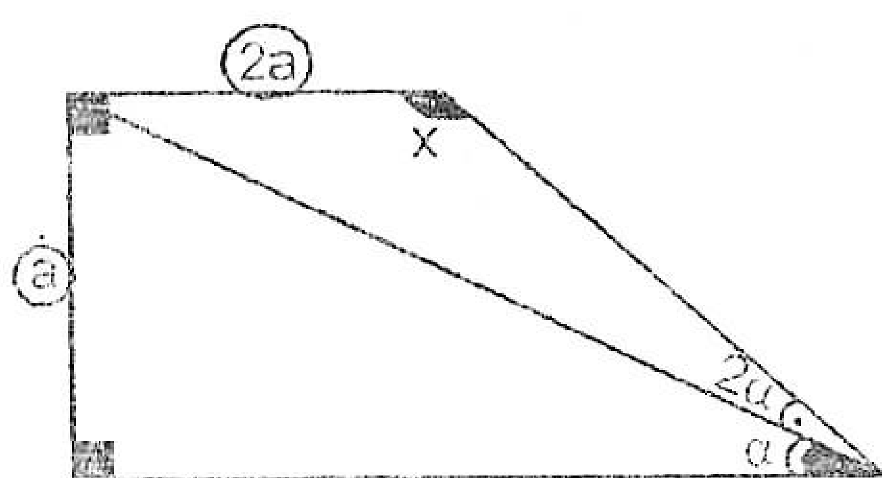
A) 108°

B) 112°

C) 112°30'

D) 120°

E) 135°



46. Calcular "x"

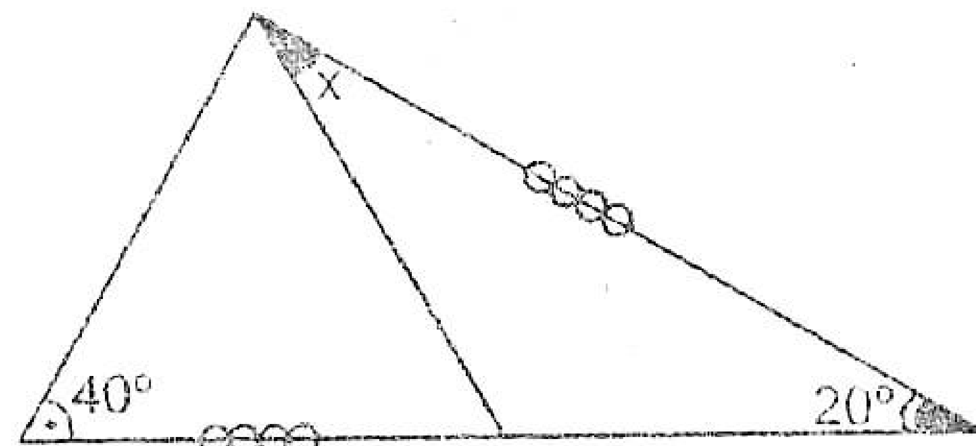
A) 9°

B) 10°

C) 12°

D) 15°

E) 18°



47. Calcular "x"

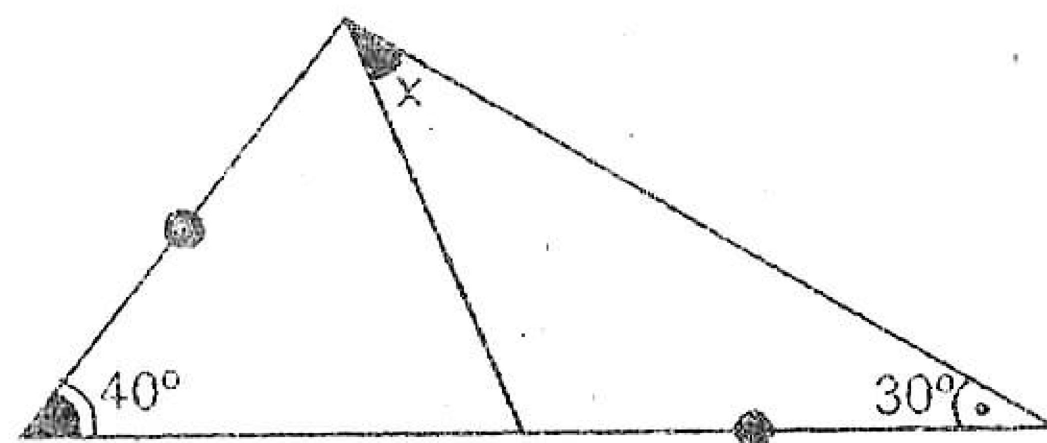
A) 30°

B) 40°

C) 45°

D) 50°

E) 54°



48. Calcular "x"

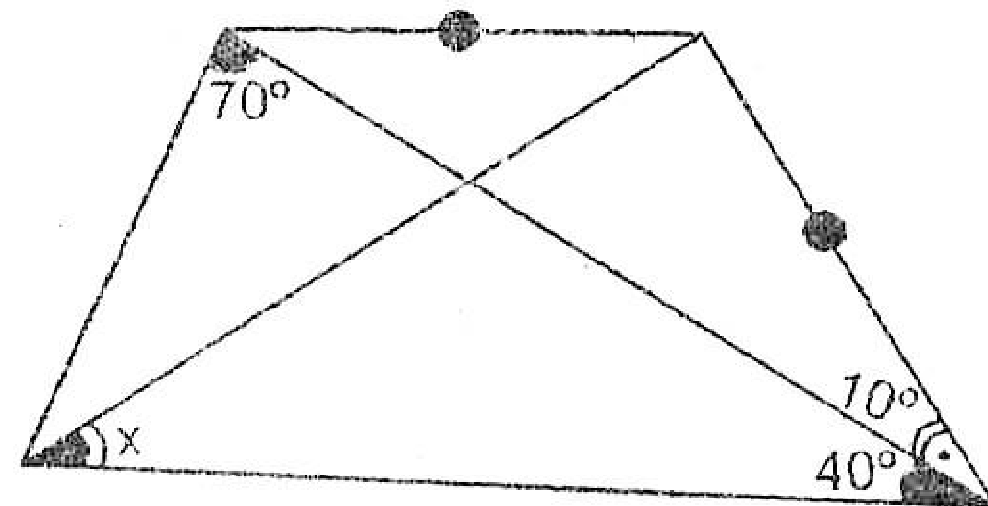
A) 20°

B) 24°

C) 40°

D) 30°

E) 36°



49. Calcular "α"

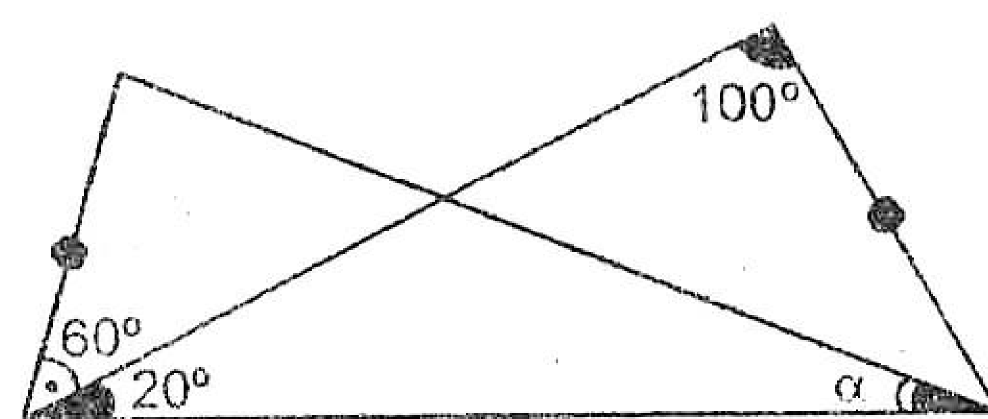
A) 10°

B) 15°

C) 20°

D) 25°

E) 30°



50. Calcular "α"

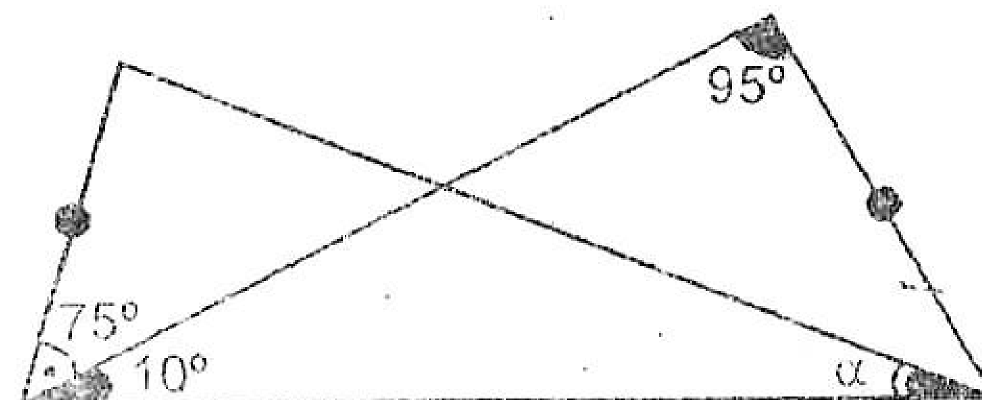
A) 10°

B) 15°

C) 20°

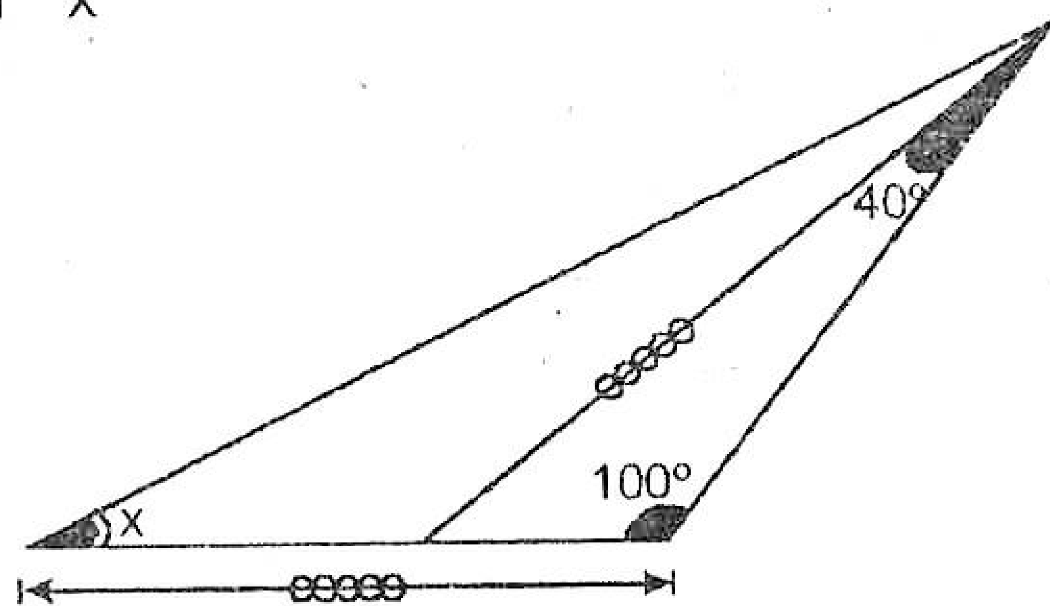
D) 30°

E) 40°



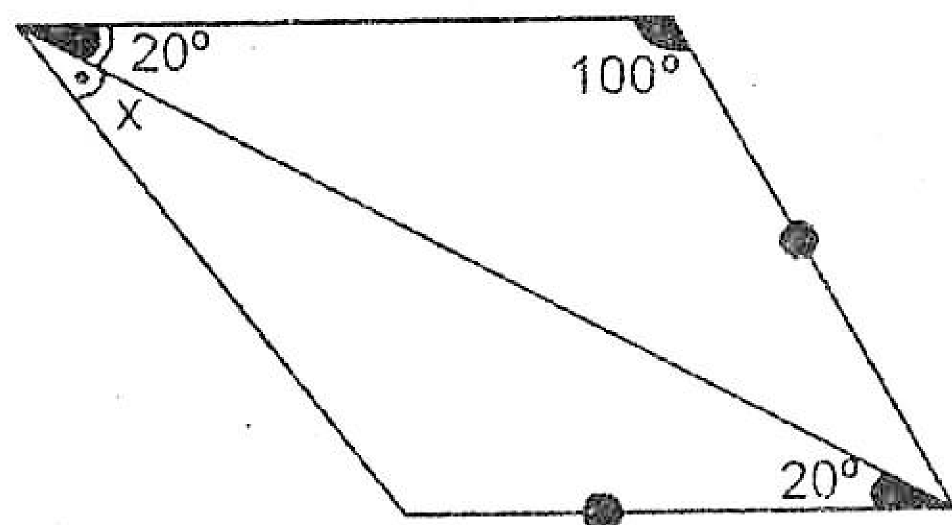
Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



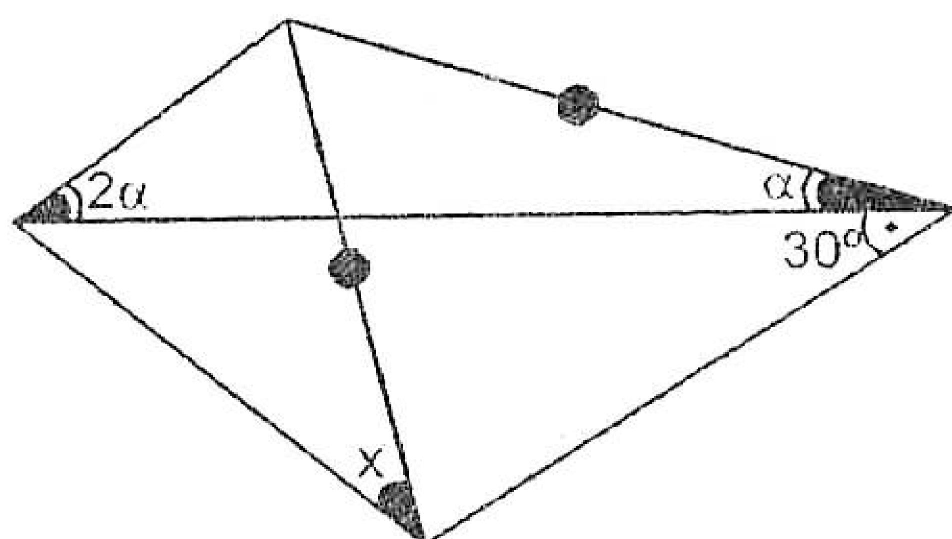
Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



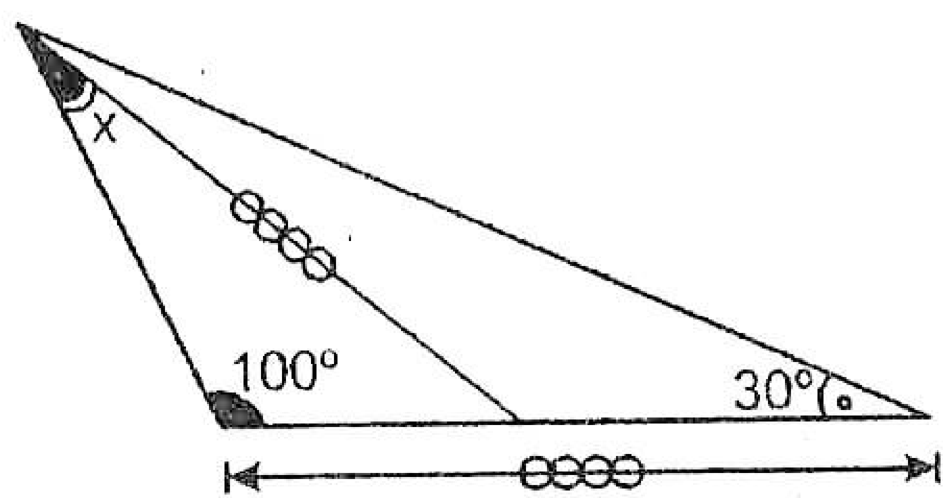
Calcular "x"

A) 18°
B) 24°
C) 26°
D) 30°
E) 36°



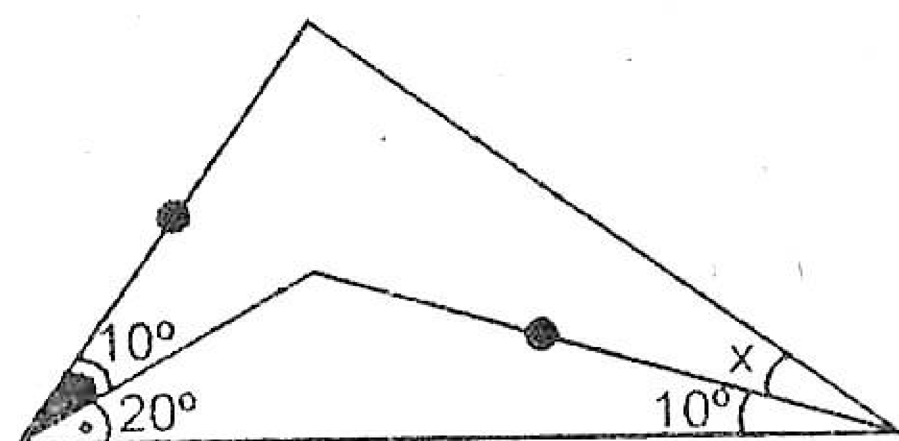
Calcular "x"

A) 30°
B) 32°
C) 37°
D) 15°
E) 40°



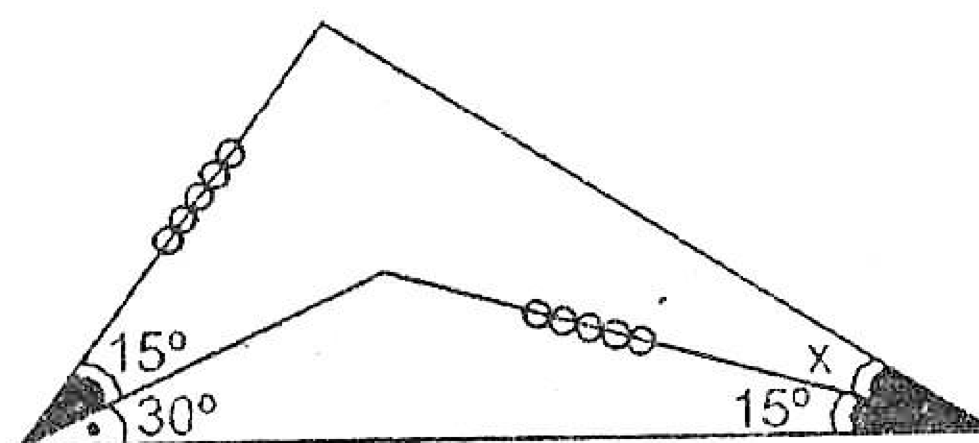
Calcular "x"

A) 5°
B) 8°
C) 10°
D) 15°
E) 30°



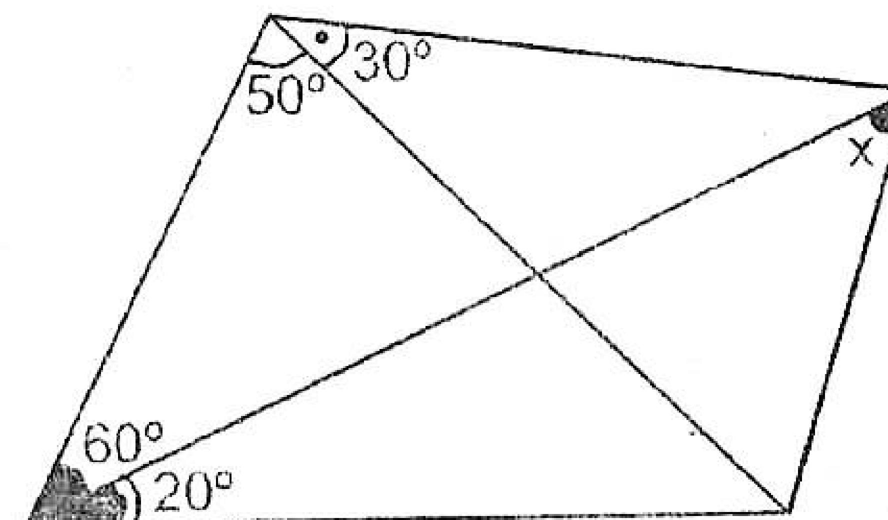
56. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 45°
E) 60°



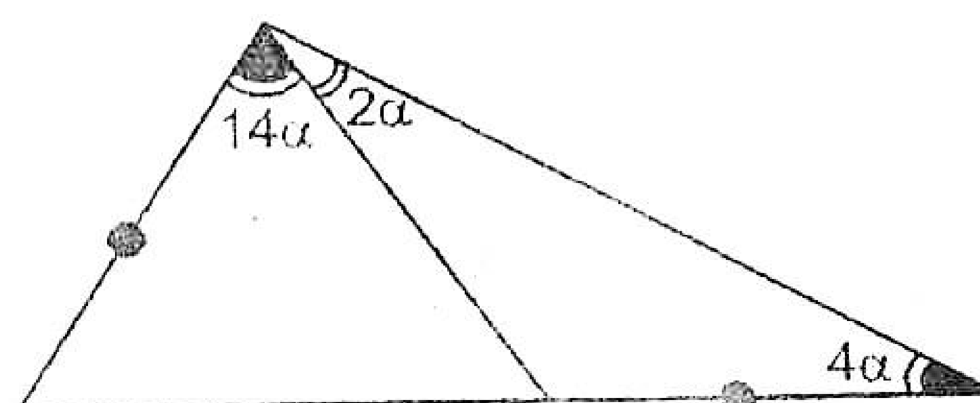
57. Calcular "x"

A) 15°
B) 20°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



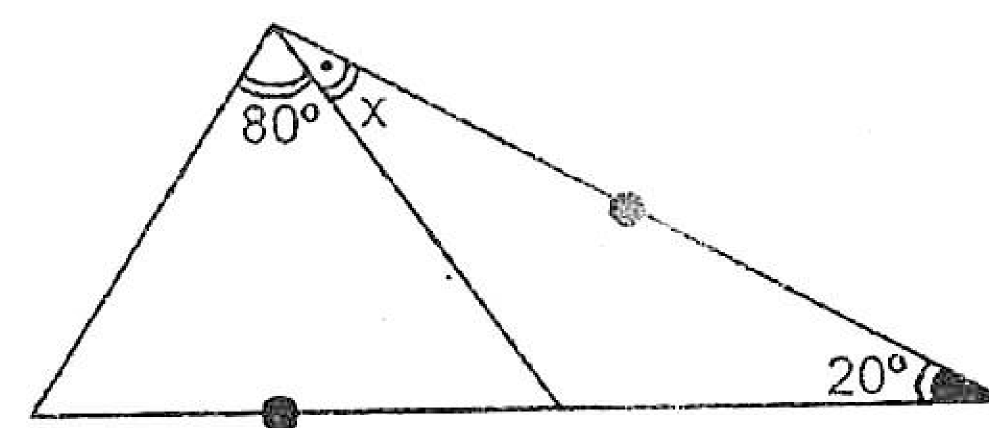
58. Calcular "α"

A) 4°
B) 5°
C) 6°
D) 7,5°
E) 8°



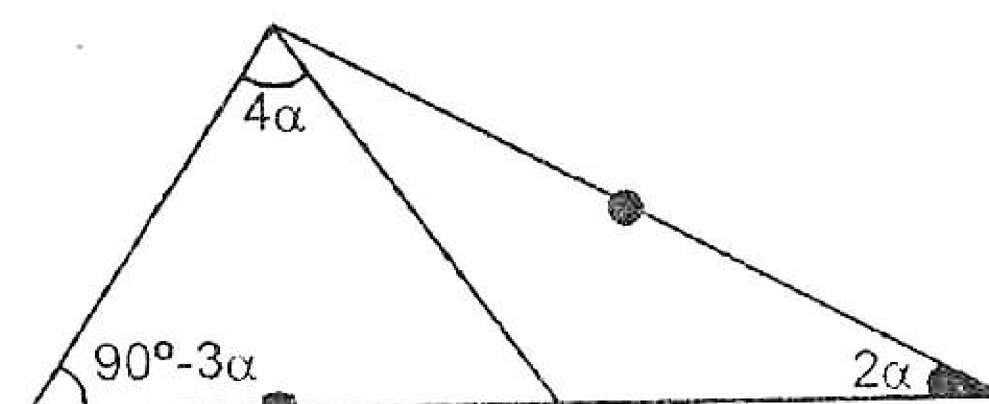
59. Calcular "x"

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 75°



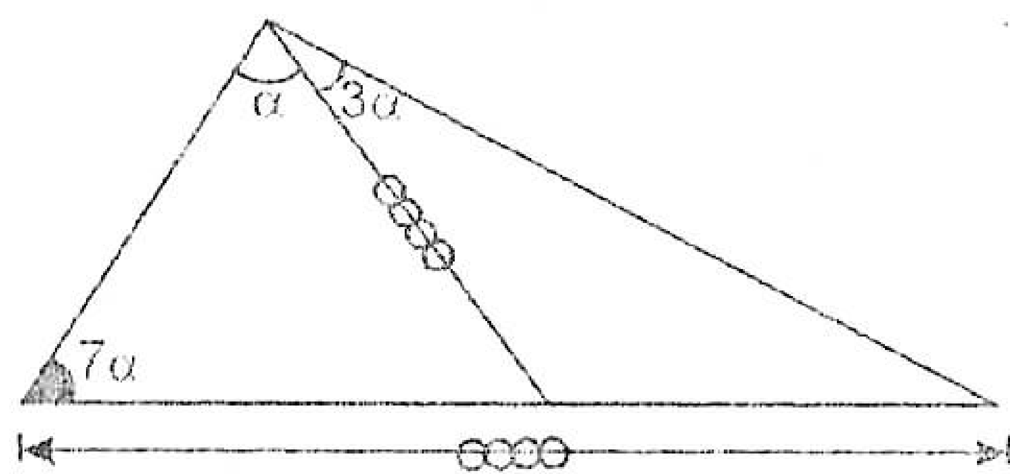
60. Calcular "α"

A) 18°
B) 16°
C) 20°
D) 22°
E) 24°



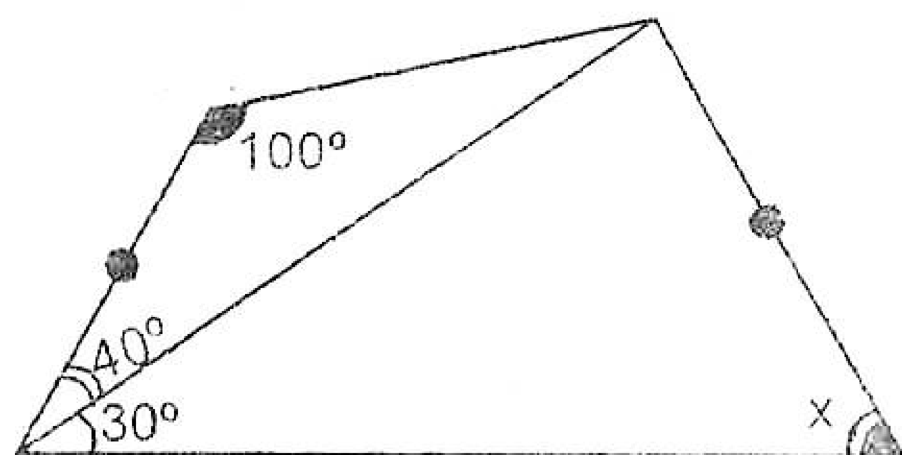
61. Calcular "α"

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



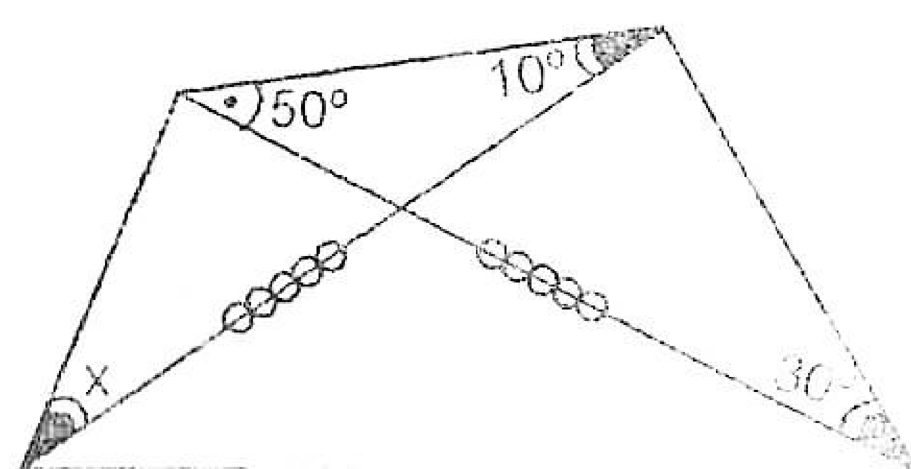
62. Calcular "x"

A) 30°
B) 45°
C) 50°
D) 55°
E) 60°



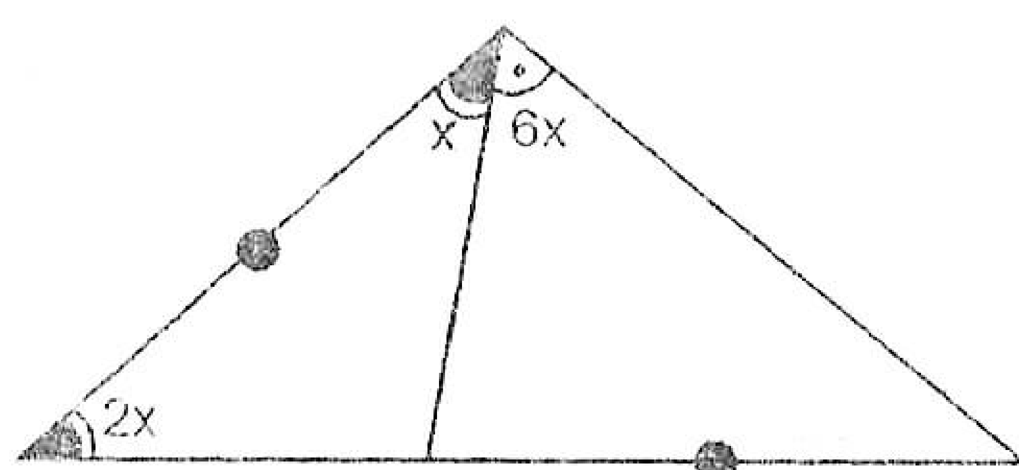
63. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



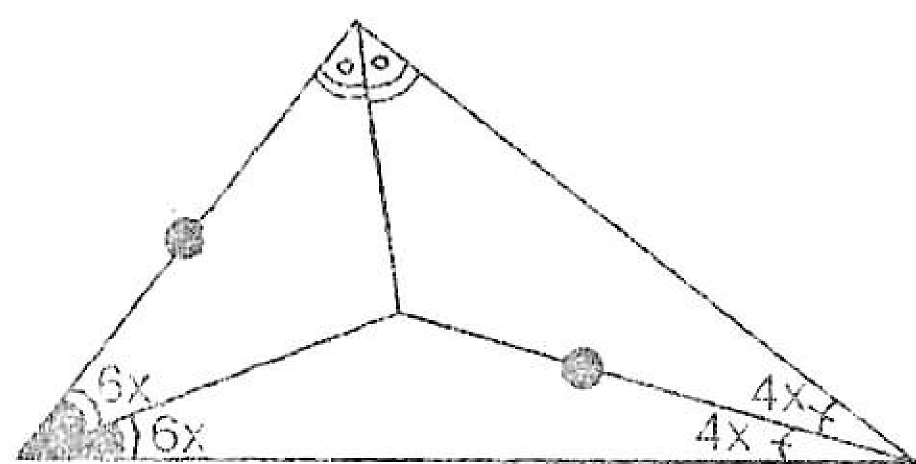
64. Calcular "x"

A) 15°
B) 8°
C) 10°
D) 12°
E) 6°



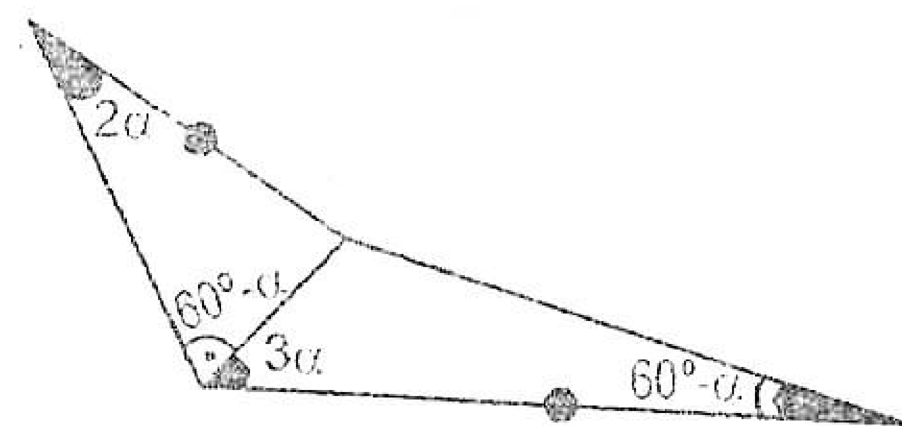
65. Calcular "x"

A) 4°
B) 5°
C) 4,8°
D) 5,5°
E) 6°



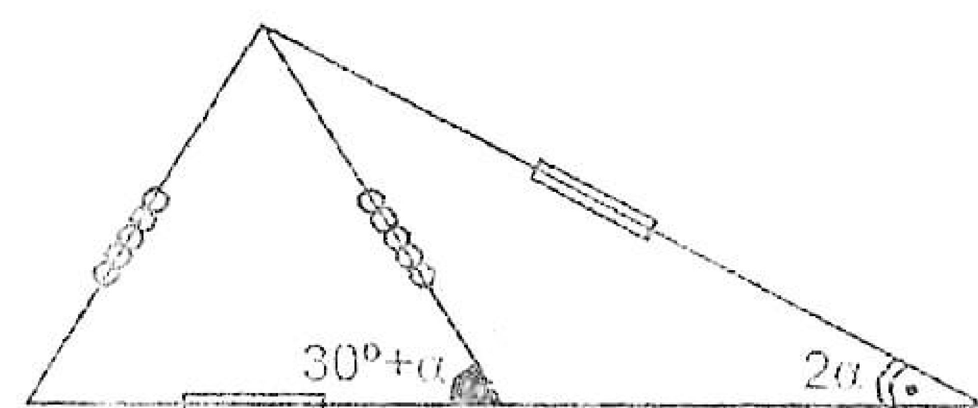
66. Calcular "α"

A) 7°30'
B) 10°
C) 15°
D) 5°
E) 30°



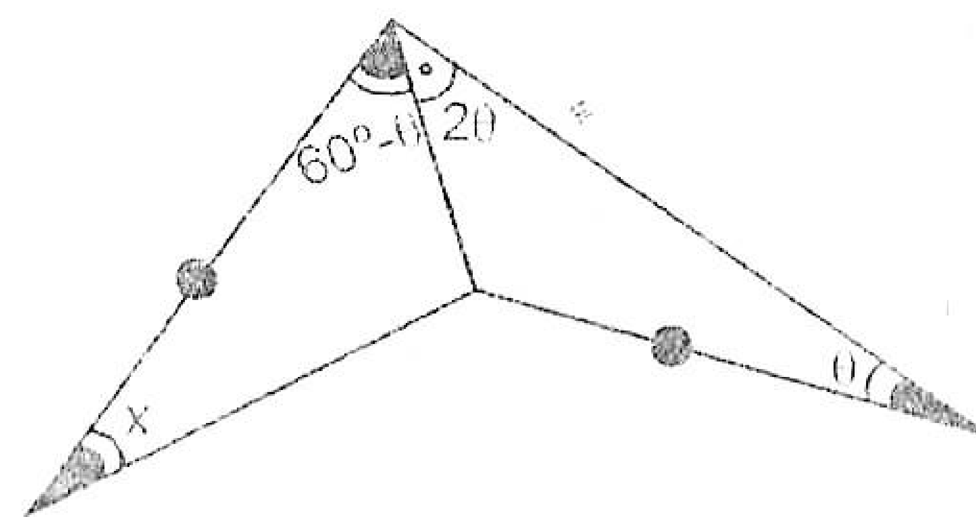
67. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



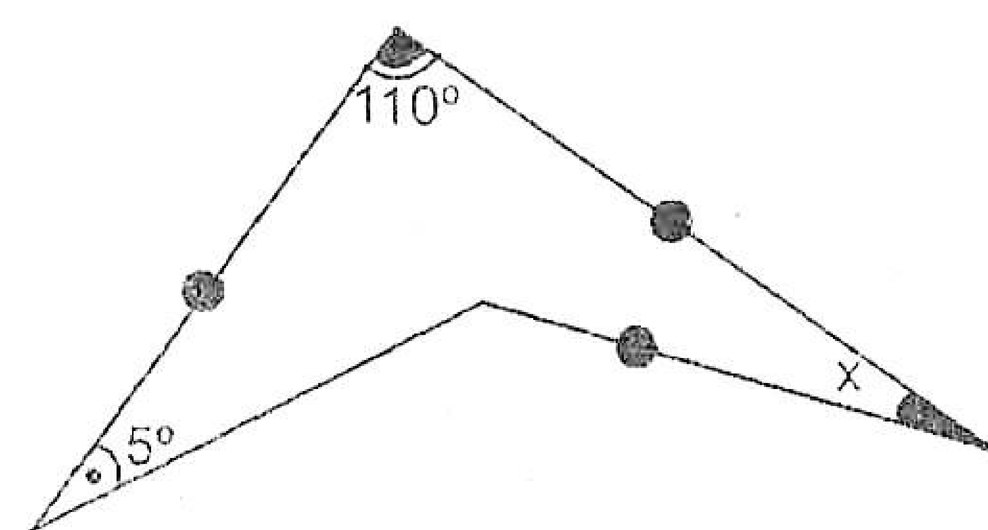
68. Calcular "x"

A) 30°-θ
B) 30°
C) 30°+θ
D) 20°
E) 40°



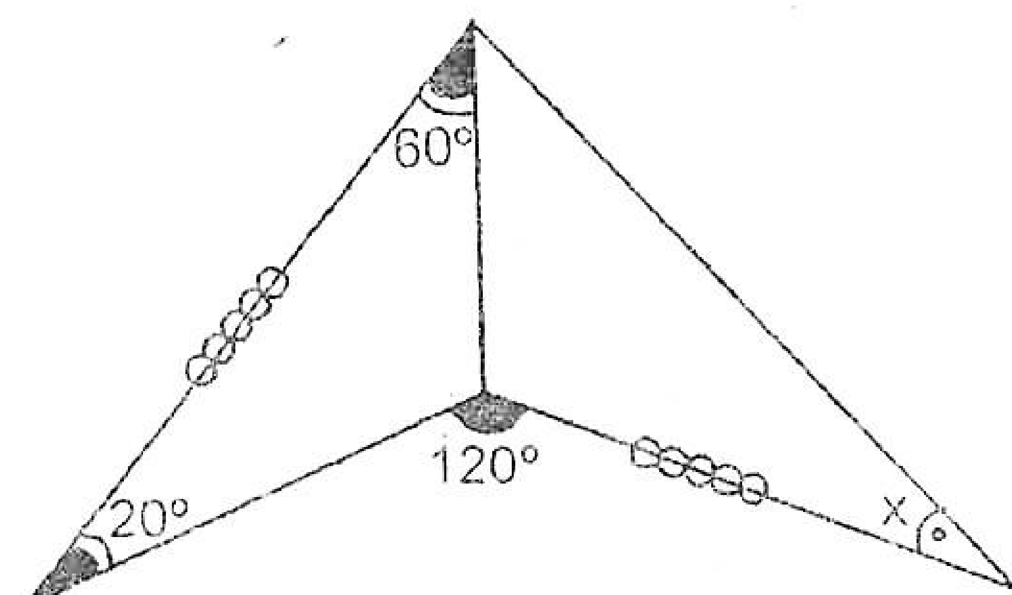
69. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



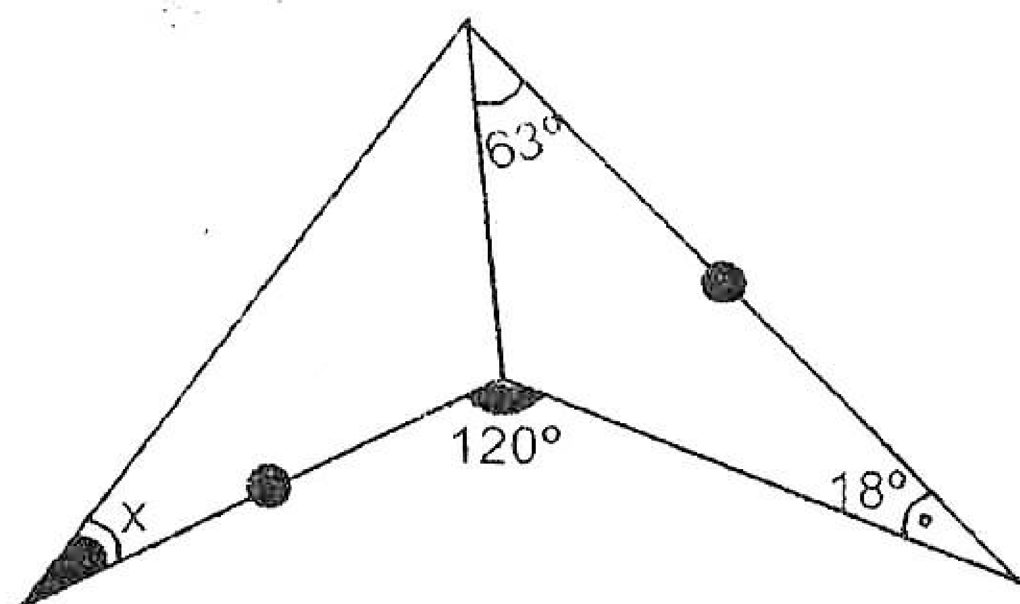
70. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 5°
E) 15°



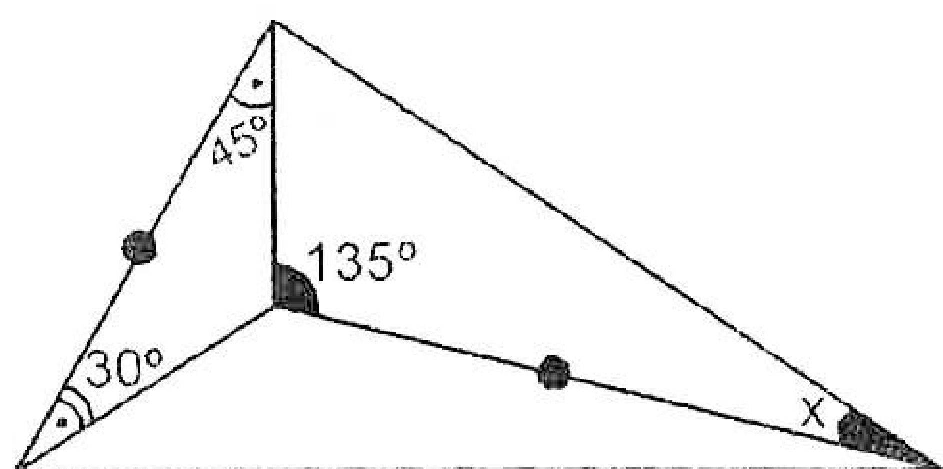
71. Calcular "x"

A) 6°
B) 7°
C) 8°
D) 9°
E) 10°



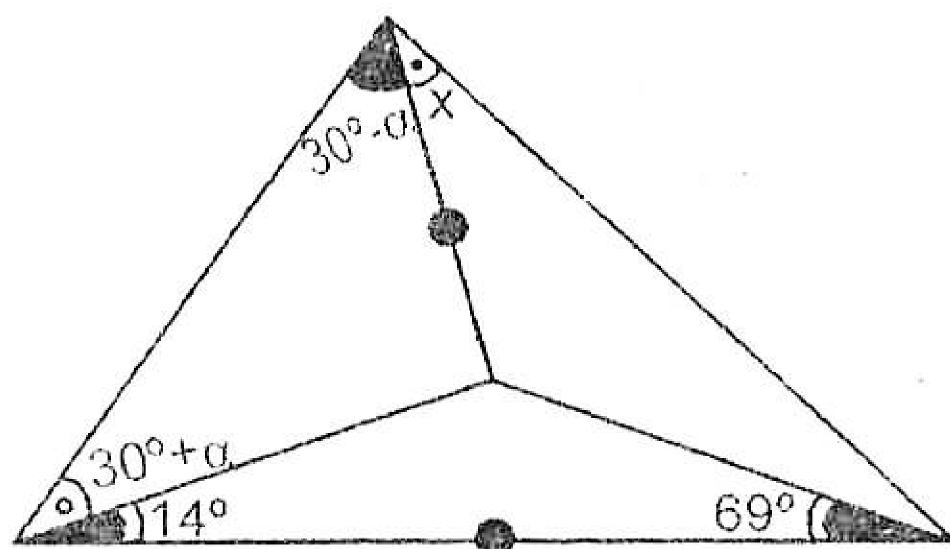
72. Calcular "x"

A) 15°
B) 12°30'
C) 22°30'
D) 18°30'
E) 30°



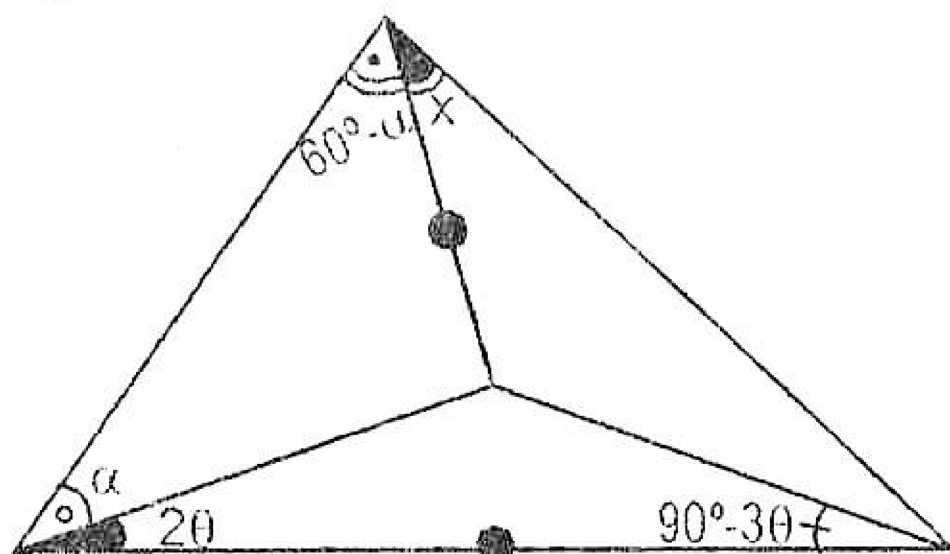
73. Calcular "x"

A) 3°
B) 6°
C) 7°
D) 9°
E) 13



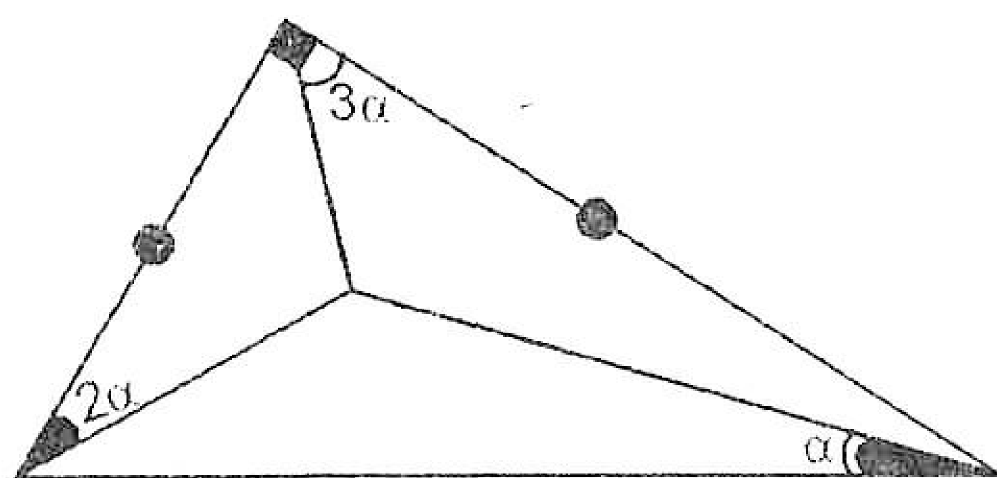
74. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) α
E) θ



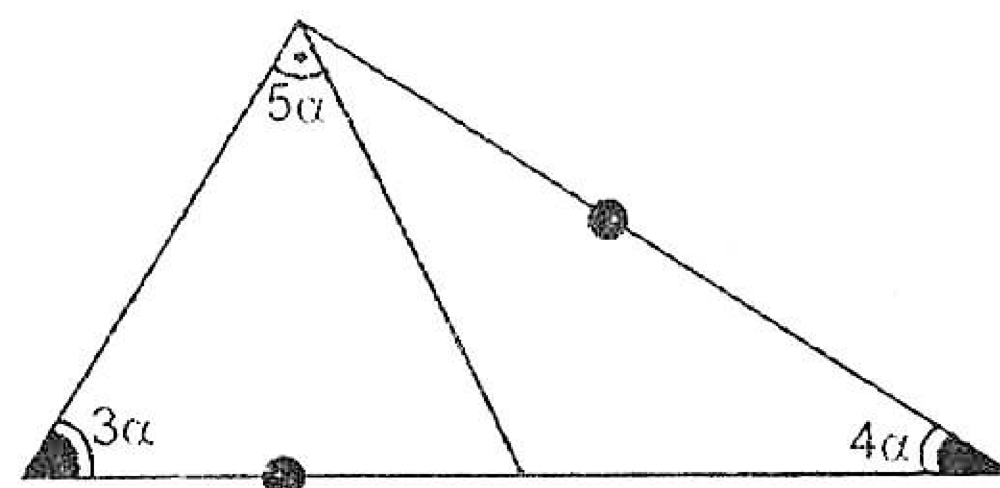
75. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



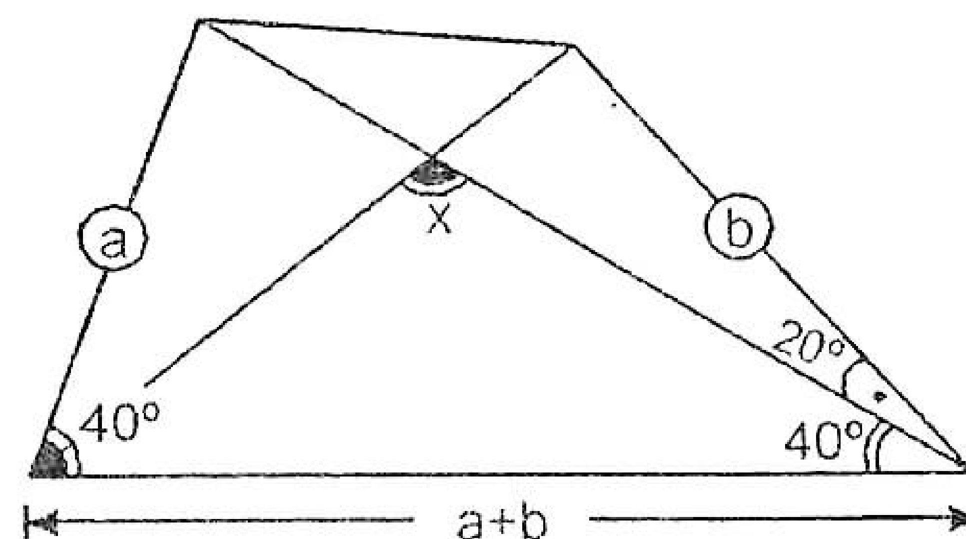
76. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



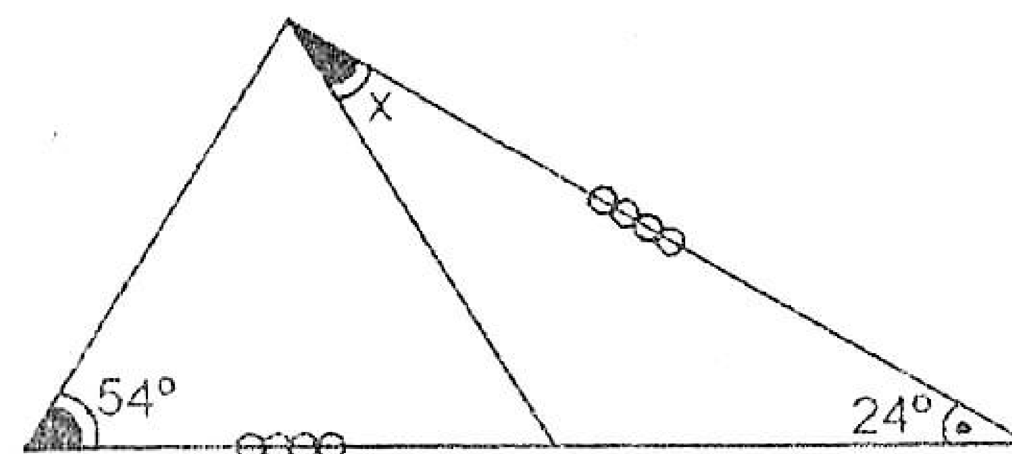
77. Calcular "α"

A) 100°
B) 110°
C) 120°
D) 130°
E) 135°



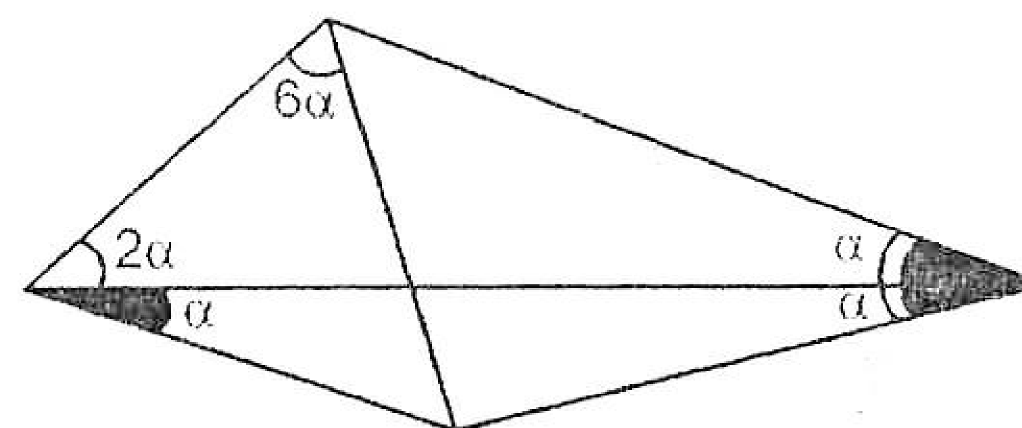
78. Calcular "x"

A) 5°
B) 6°
C) 12°
D) 16°
E) 18°



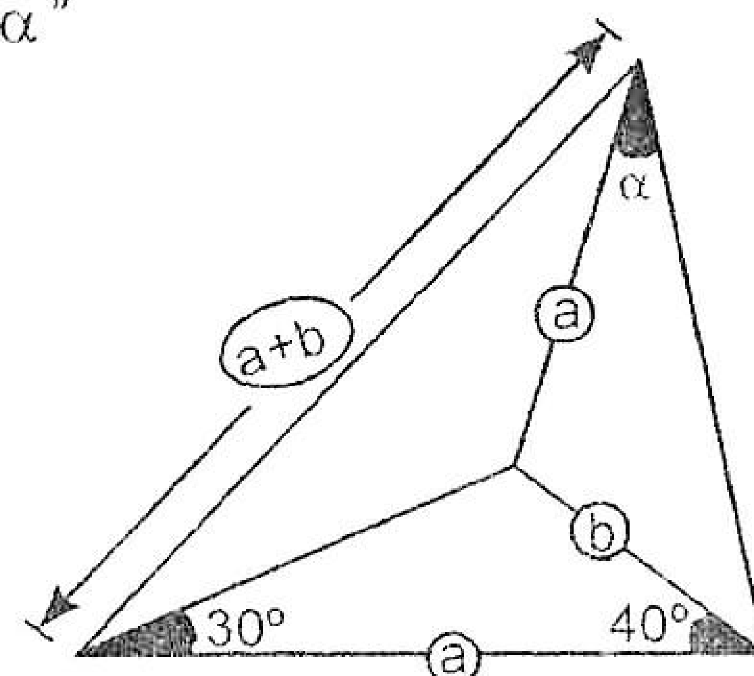
79. Calcular "α"

A) 10°
B) 12
C) 15°
D) 16°
E) 18°



80. Calcular "α"

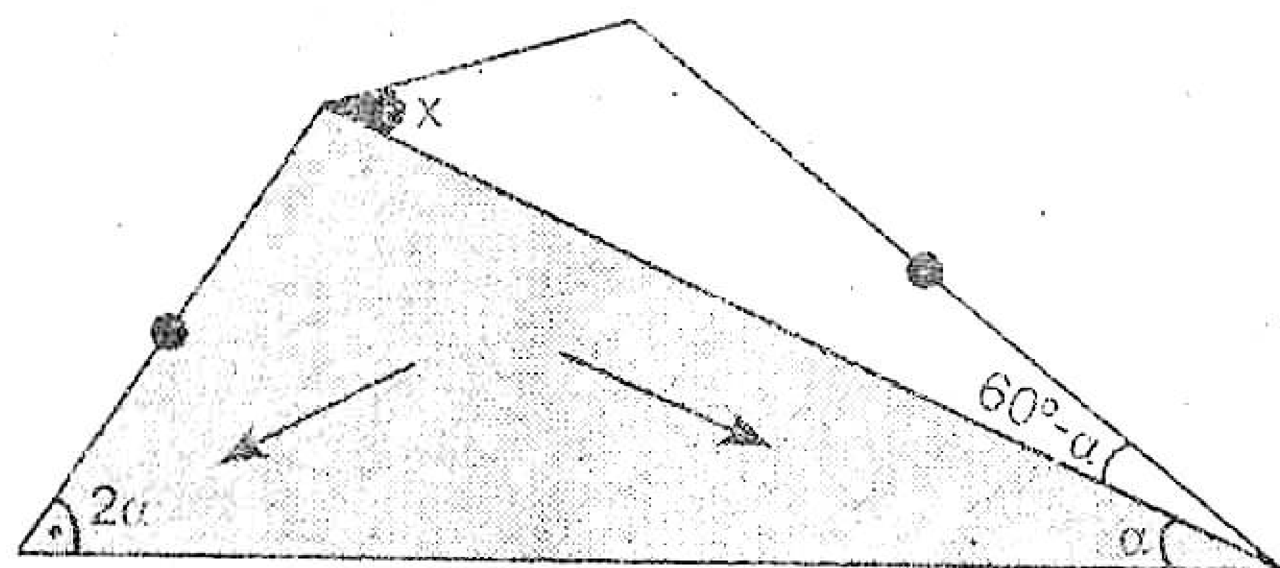
A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 24°



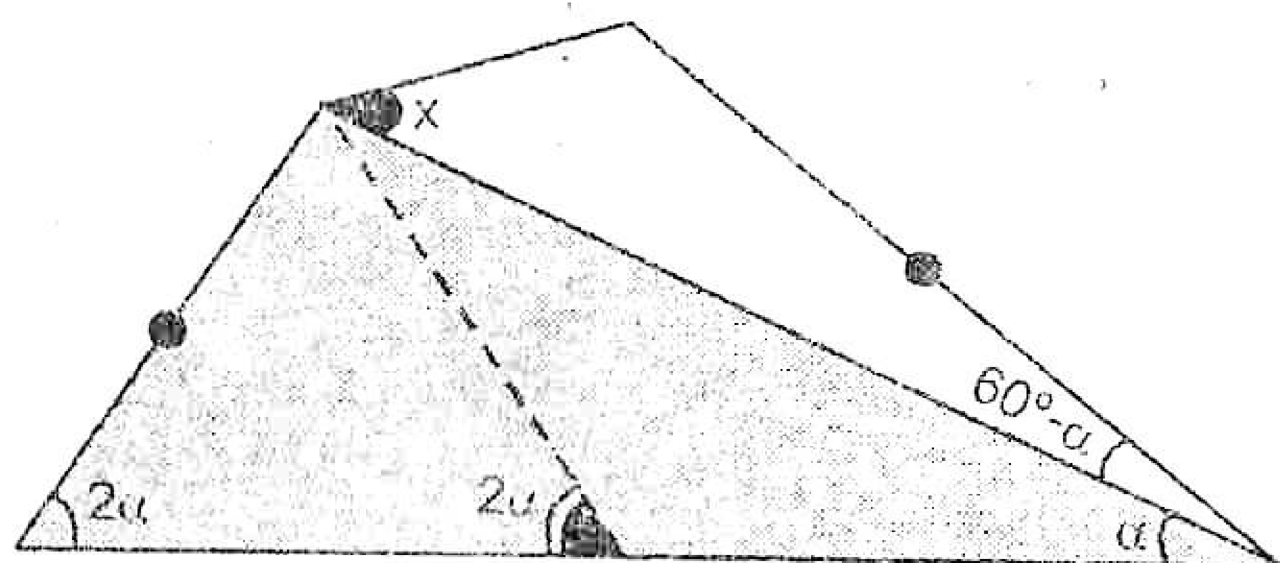
Problemas Resueltos

Solución Nº 1

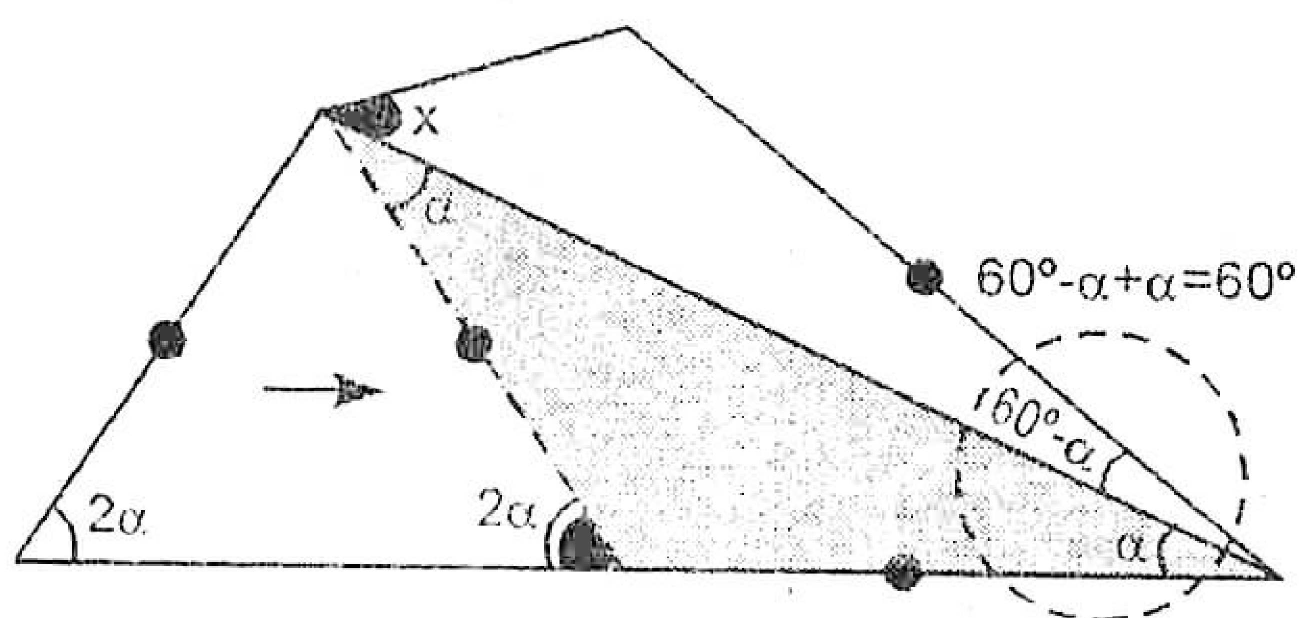
Observamos en el gráfico que hay un triángulo que tiene 2 ángulos interiores en la relación de 1 a 2.



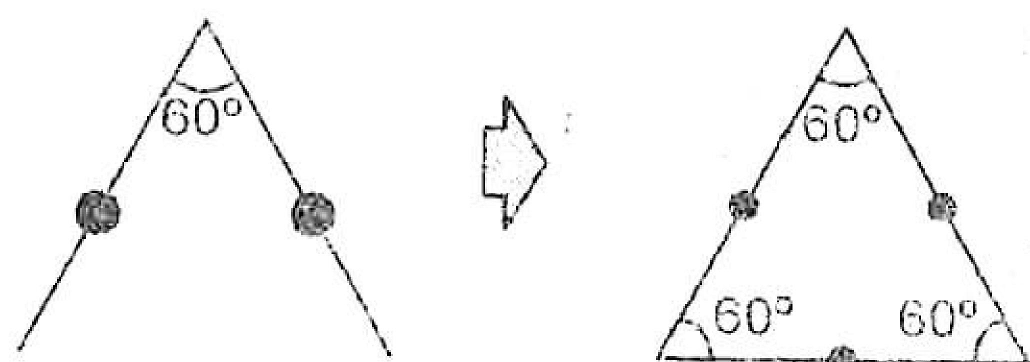
Paso Nº 1
Entonces aplicamos el primer criterio de construcción: trazamos la ceviana interna.

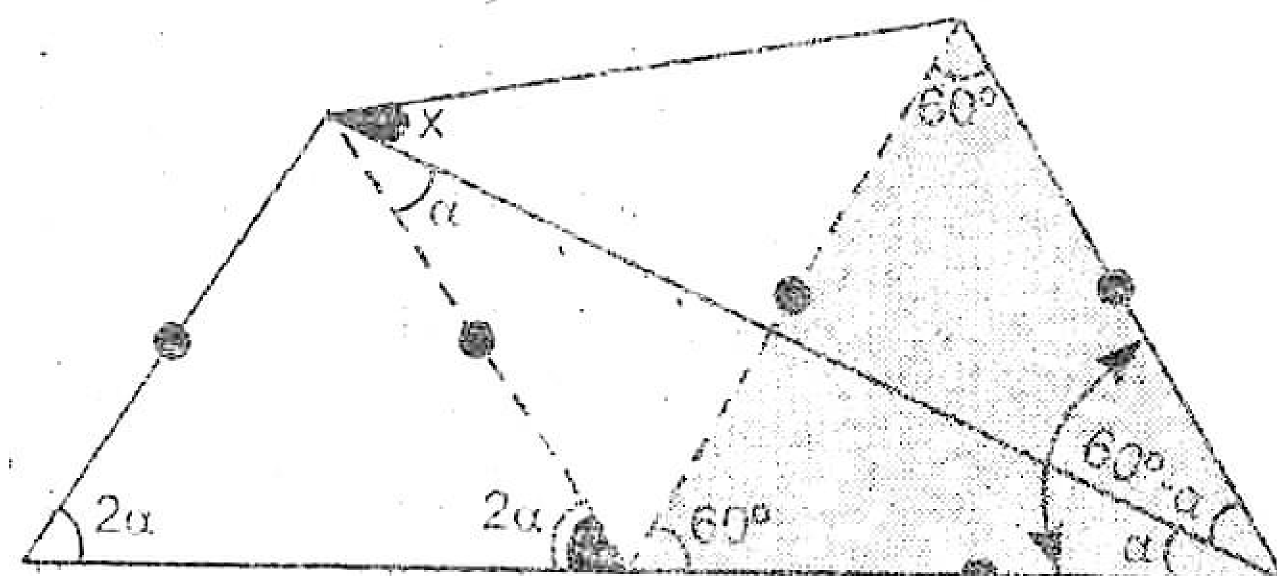


Paso Nº 2
Ahora completamos los ángulos internos y se observa que se tiene triángulos isosceles.



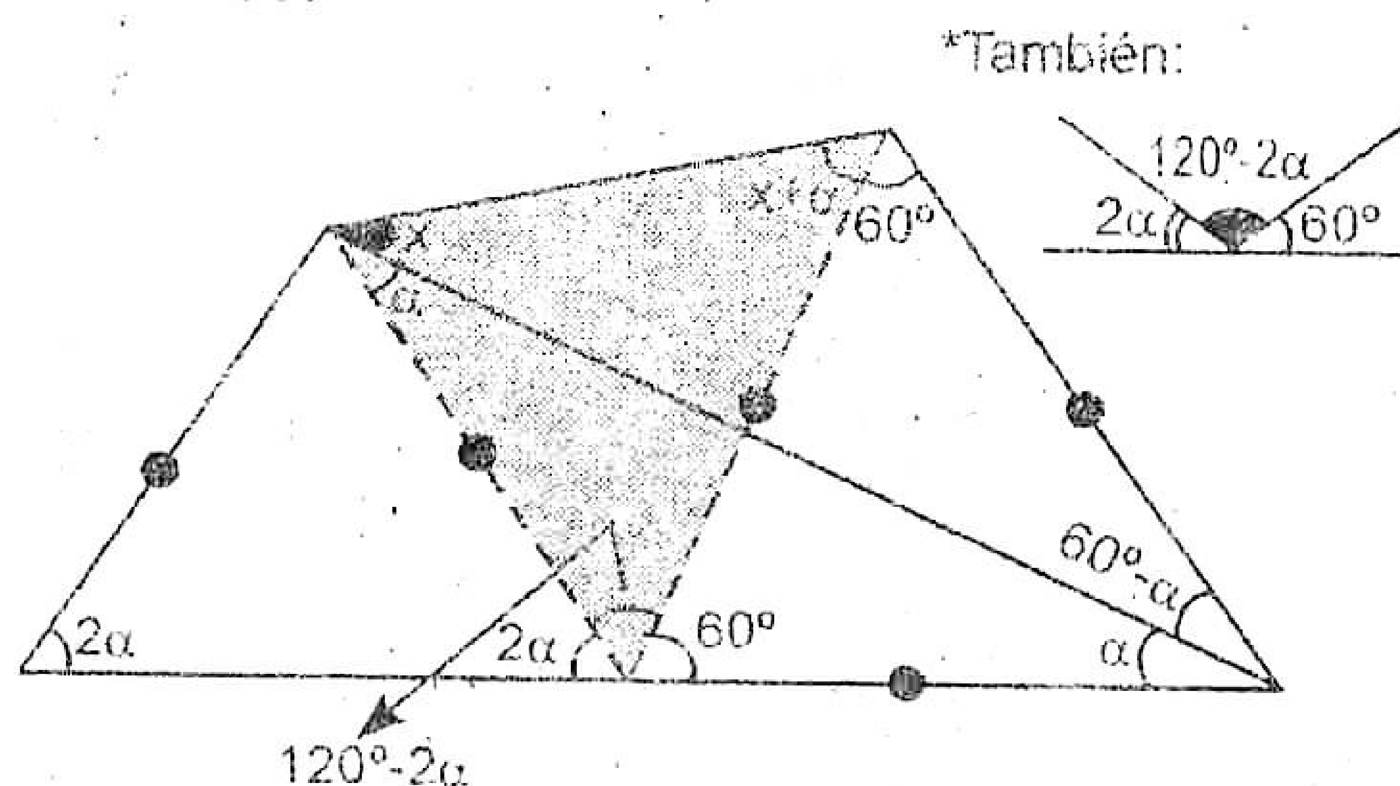
Paso Nº 3: Se observa un ángulo de 60° y lados iguales, entonces buscamos el triángulo equilátero de la siguiente manera:



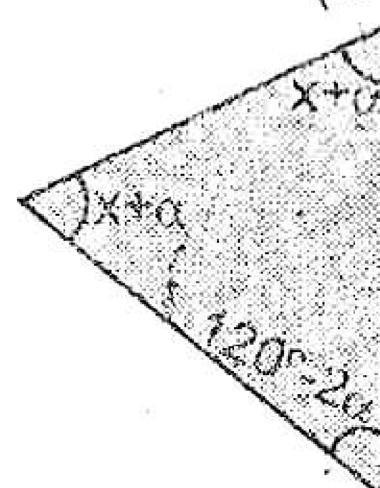


Paso Nº 4
Se observa en la figura sombreada un triángulo isósceles.

*También:



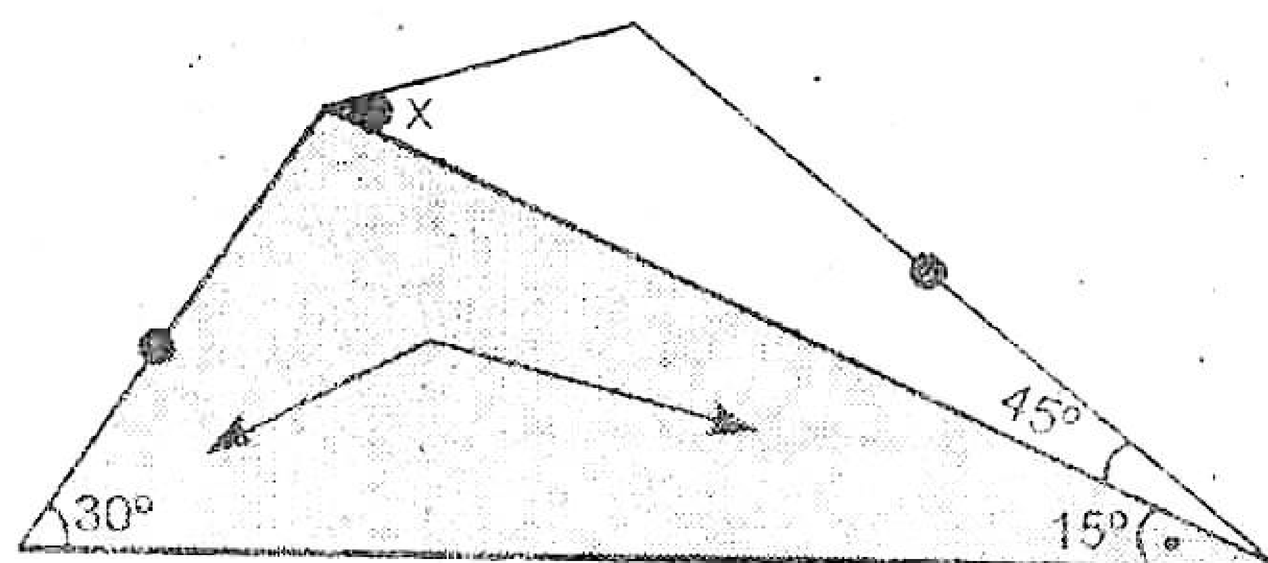
Paso Nº 5: Finalmente en la figura sombreada se cumple:



$$(x+\alpha)+(x+\alpha)+120°-2\alpha = 180°$$
$$2x+2\alpha+120°-2\alpha = 180°$$
$$2x = 60°$$
$$x = 30°$$

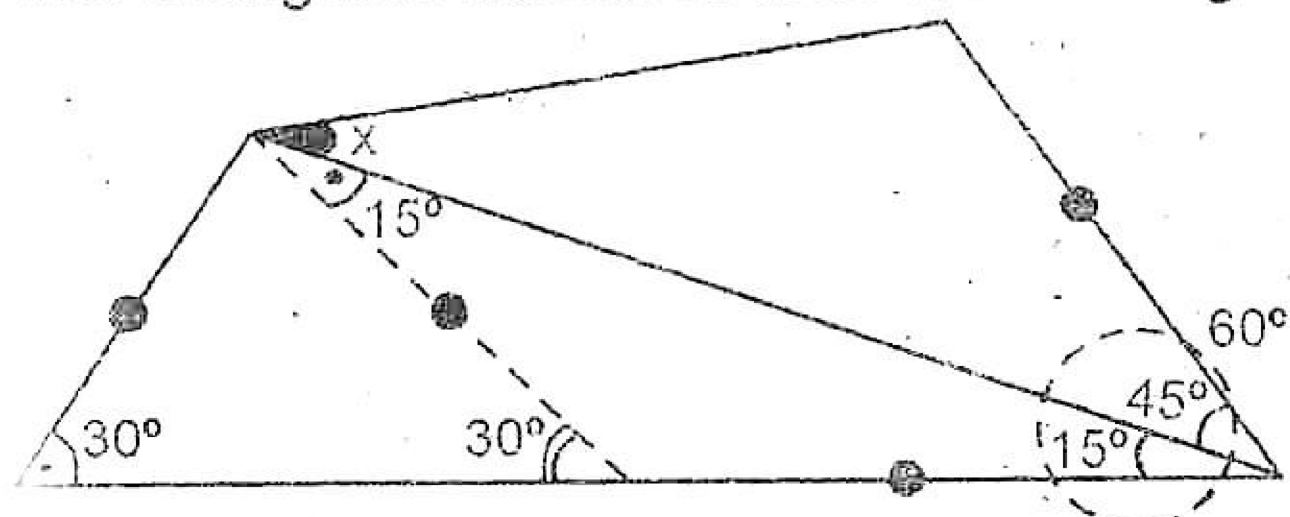
Solución Nº 2

Se observa 2 ángulos interiores en la relación de 1 y 2

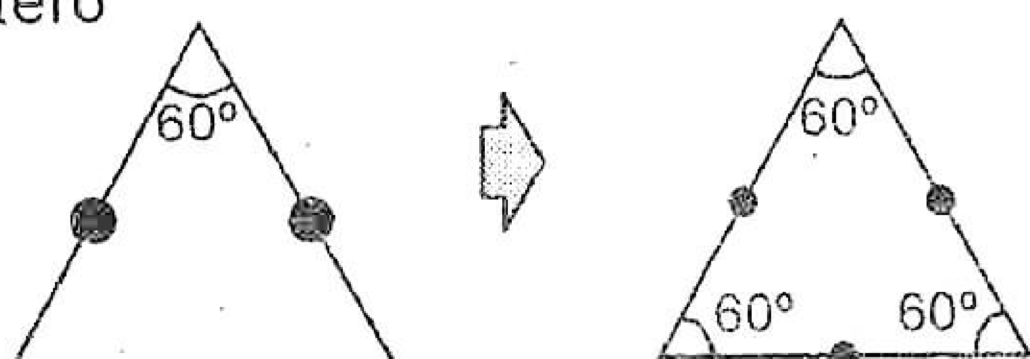


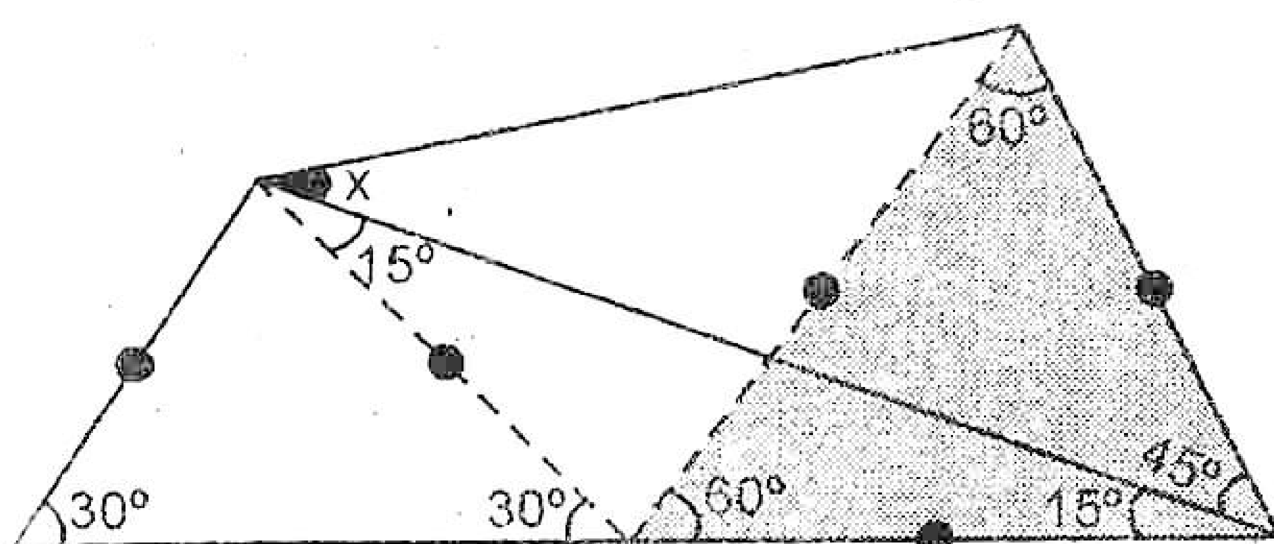
La imaginación es más importante que el conocimiento (Albert Einsten)

Paso N°1: Aplicamos el primer Criterio para formar triángulos isósceles internos en la figura.

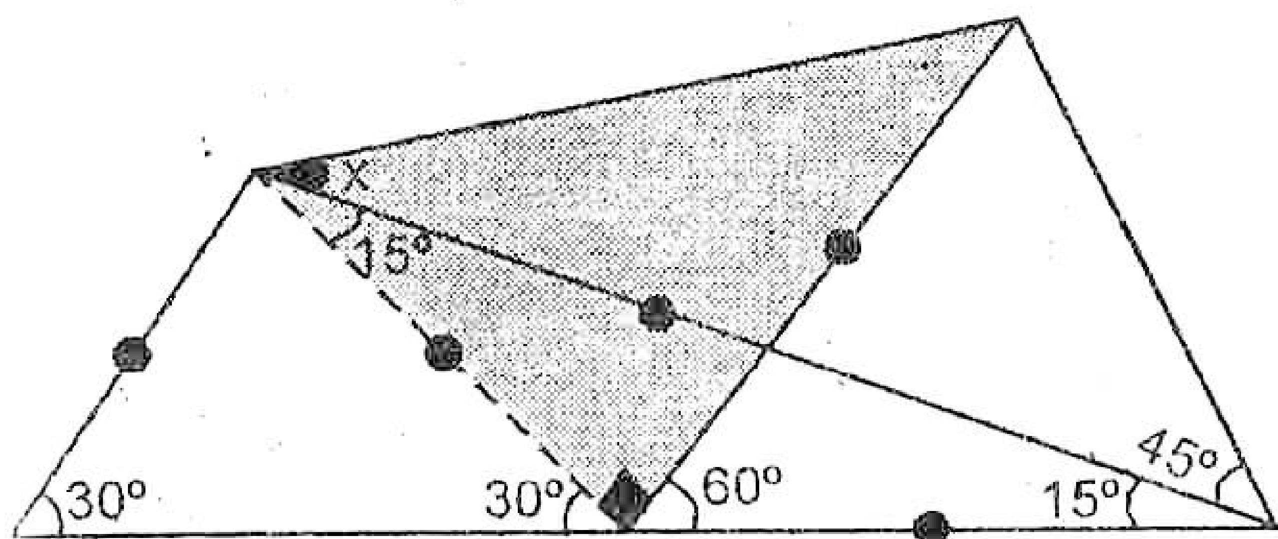


Paso N°2: Se observa que se tiene un triángulo equilátero

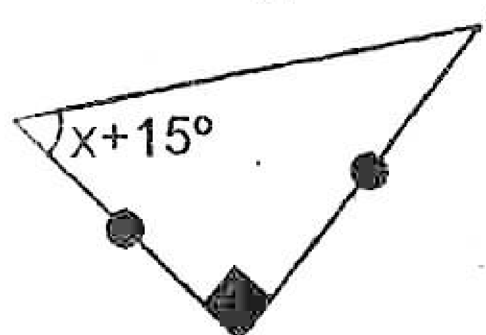




Paso N° 3: Luego se observa en la figura sombreada un triángulo isósceles.



Paso N° 4: Se observa que la figura sombreada es un triángulo rectángulo isósceles de 45°.

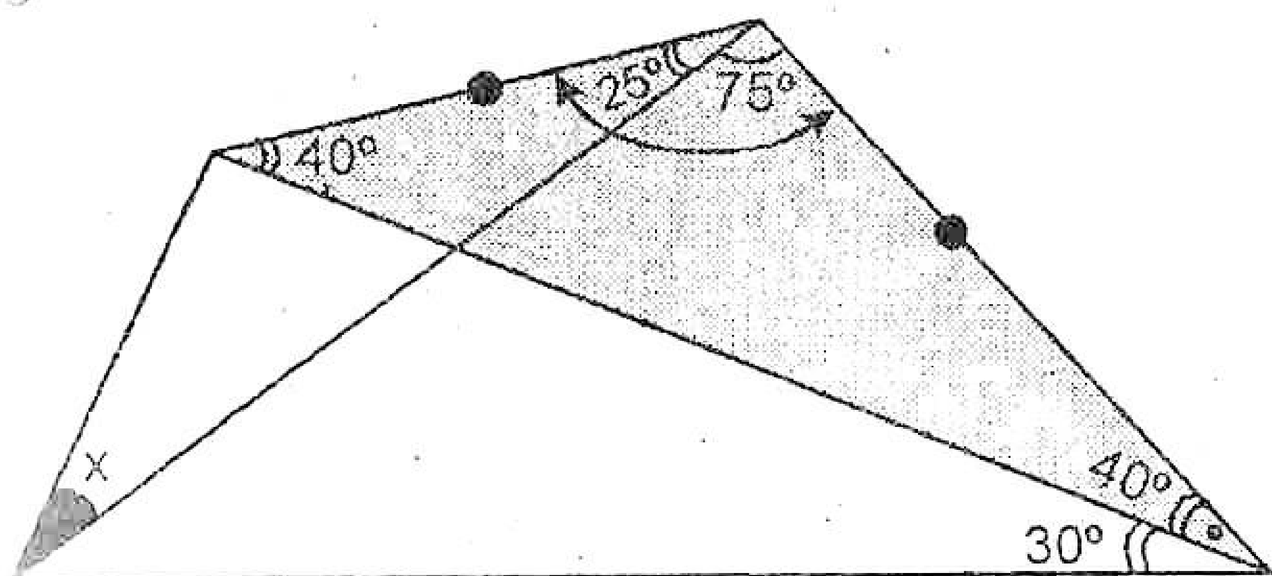


$\therefore\ x + 15^\circ = 45^\circ$

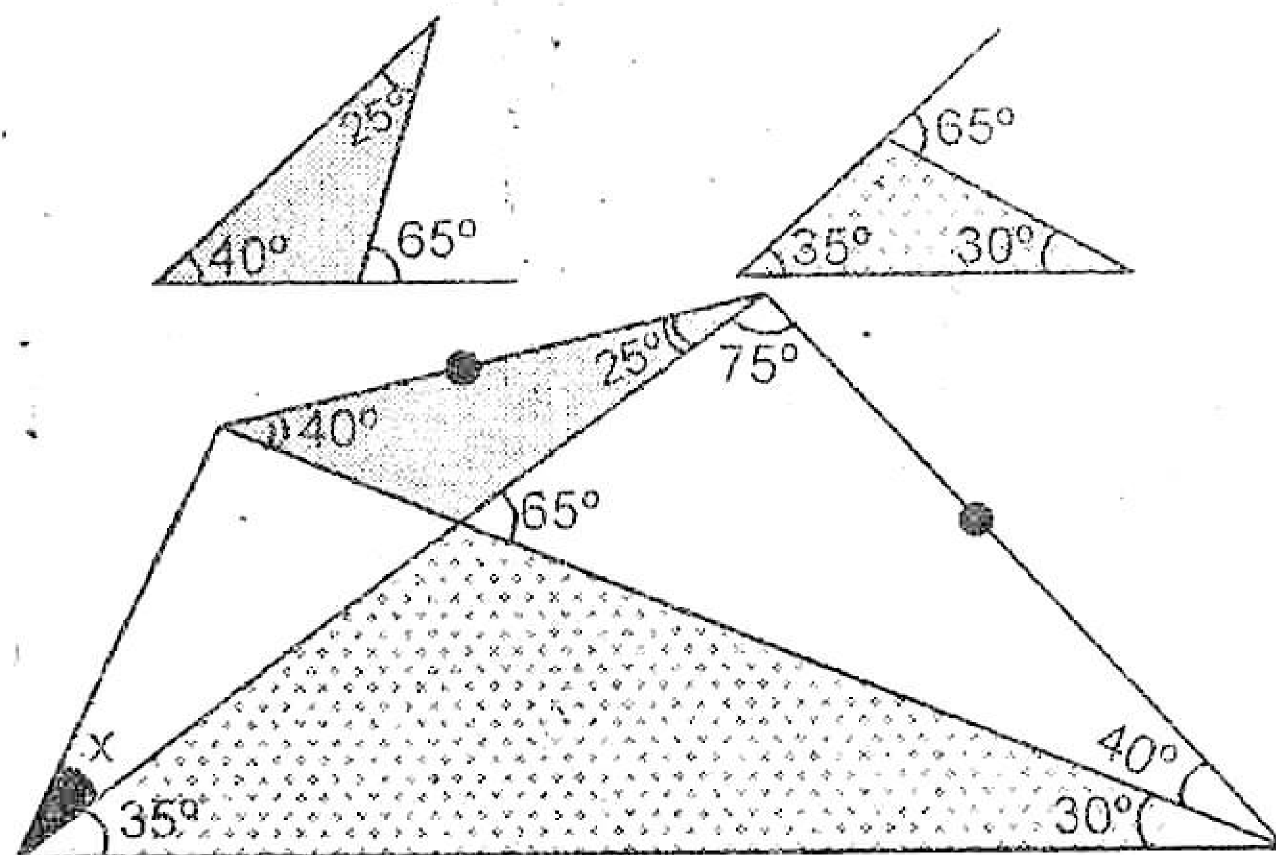
$\Rightarrow \quad x = 30^\circ$

Solución Nº 3

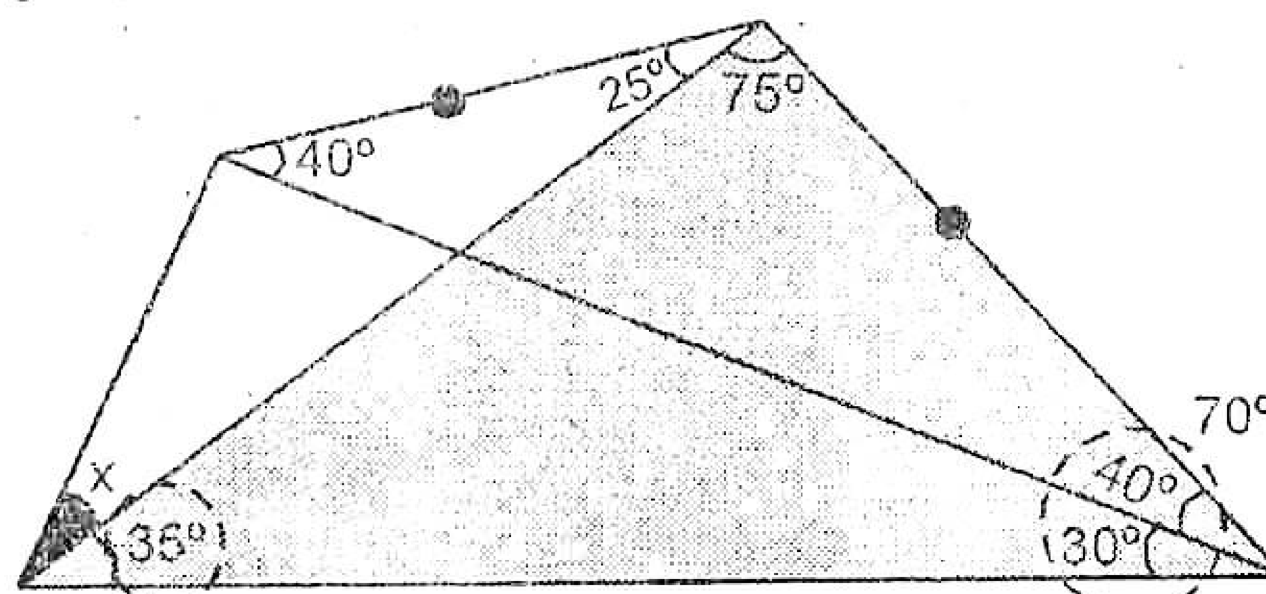
En el triángulo sombreado se completa los ángulos intérnos.



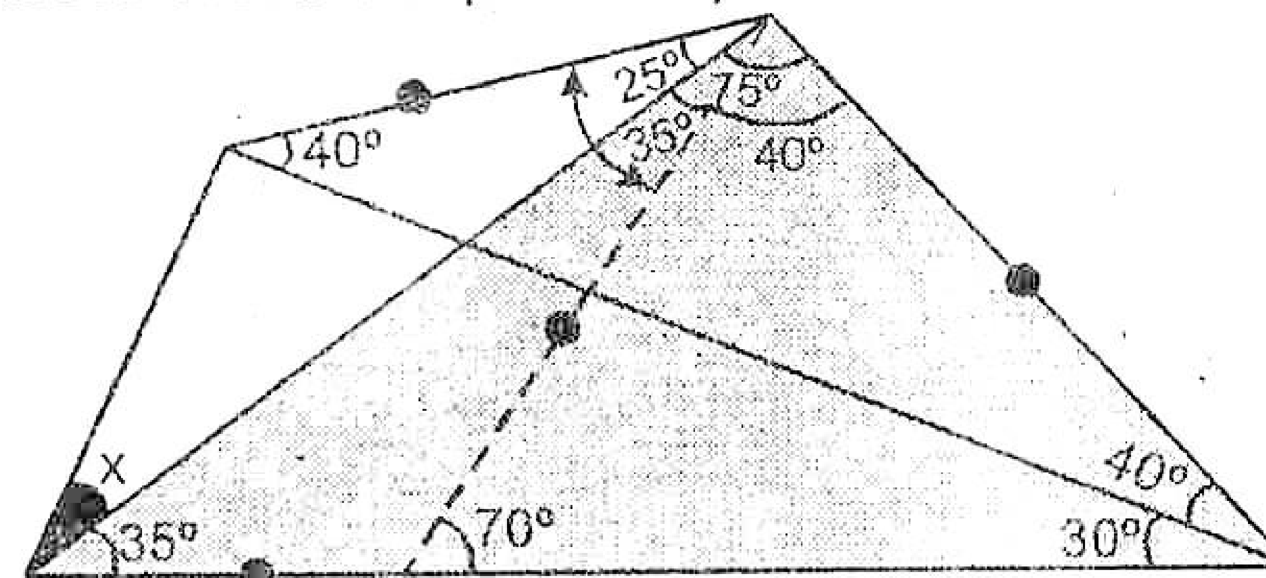
Paso N° 1: Observamos las siguientes figuras en donde se cumplen:



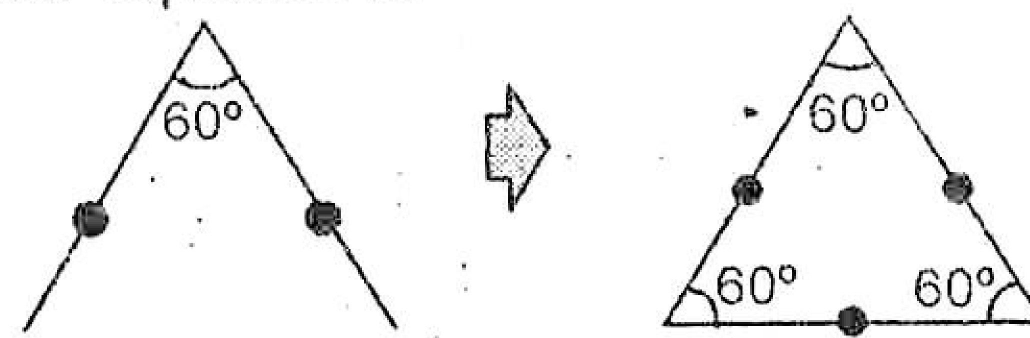
Paso N° 2: Se observa un triángulo que tiene ángulos en la relación de 1 a 2

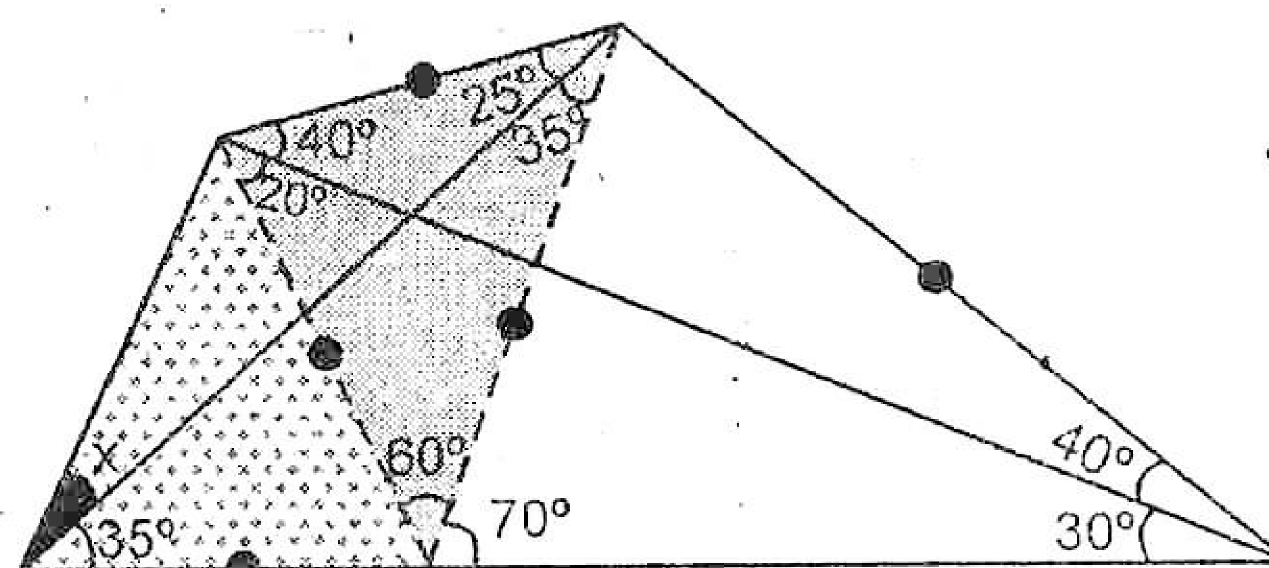


Paso N° 3: Entonces aplicamos el primer criterio de construcción.

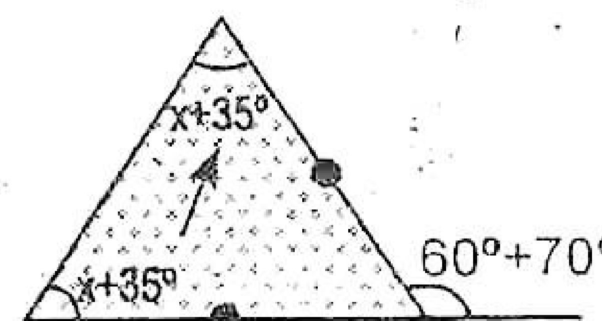


Paso N° 4: Ahora en la figura se observa un triángulo equilátero.





Paso N° 5: Finalmente se observa un triángulo isósceles de la siguiente forma:



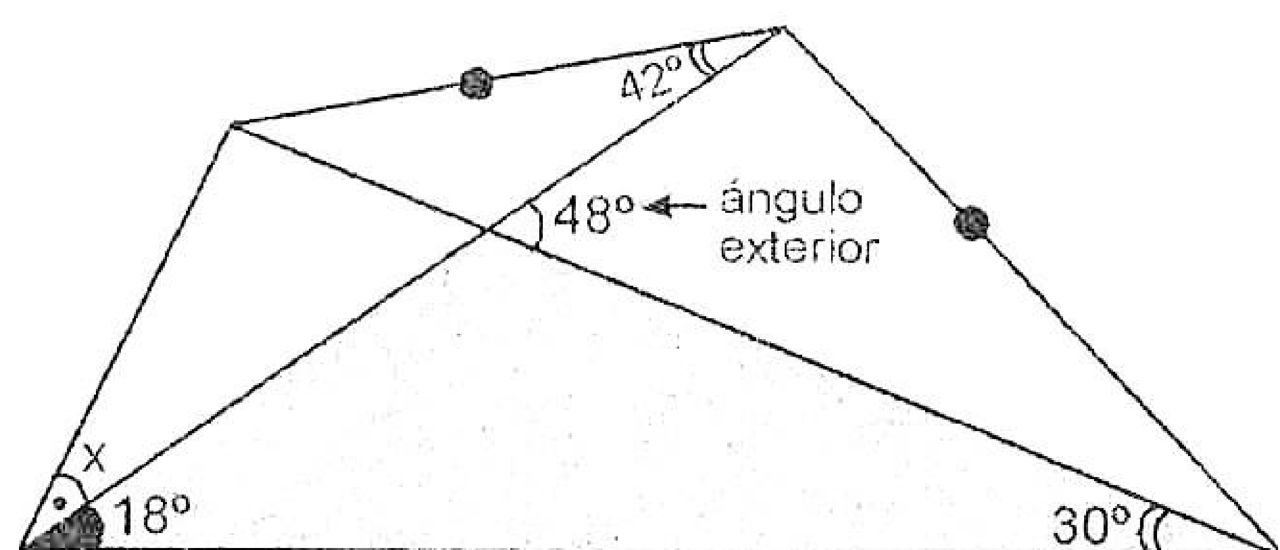
$(x+35^\circ) + (x+35^\circ) = 130^\circ$

$2x = 60^\circ$

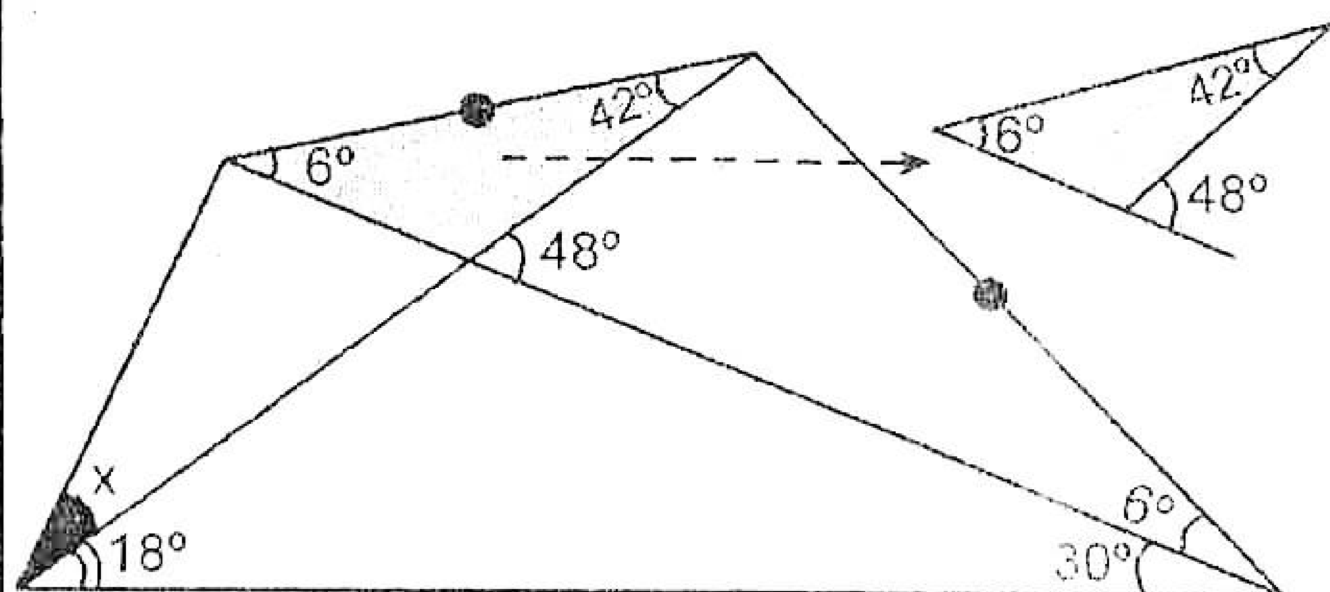
$x = 30^\circ$

Solución Nº 4

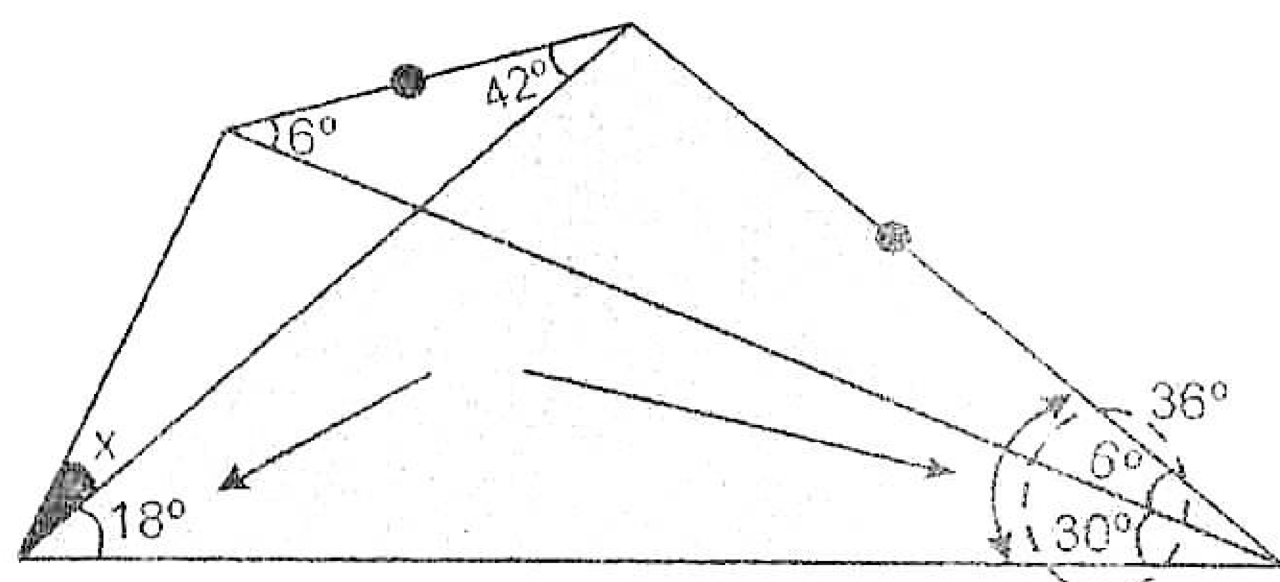
Paso Nº 1: Se observa el triángulo sombreado:



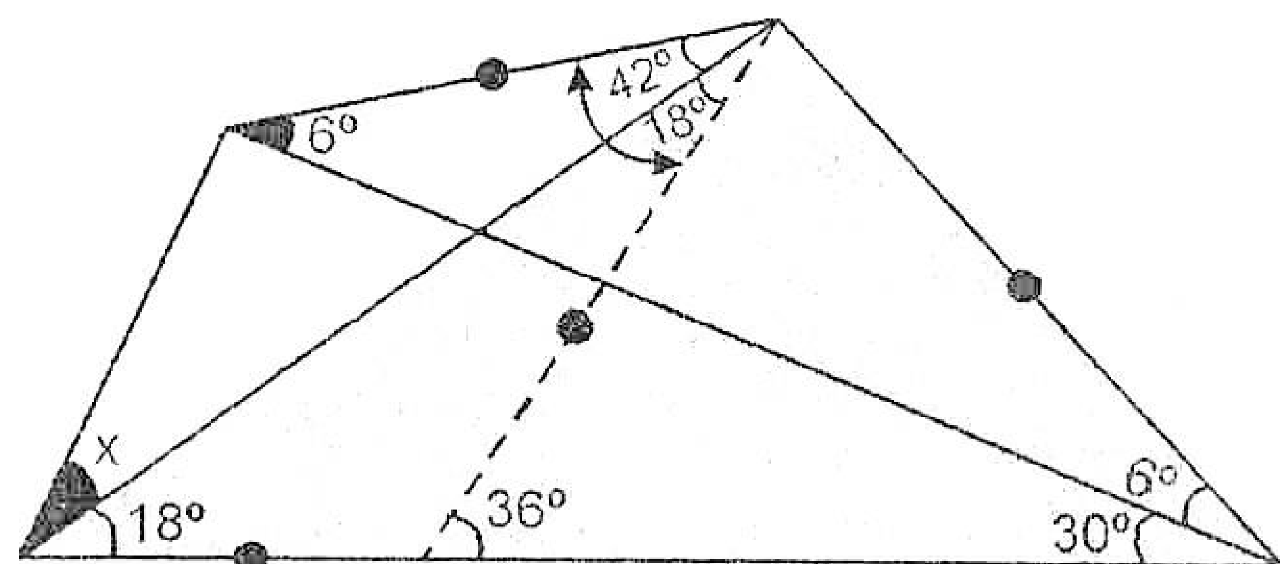
Tambien se observa que se cumple:



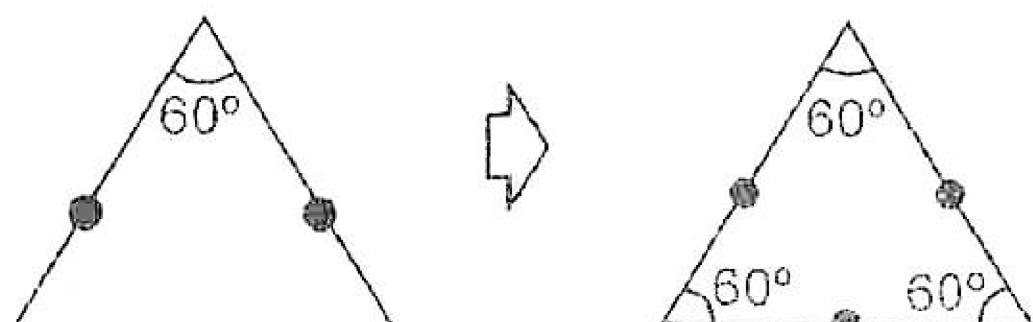
Paso Nº 2: Se observa un triángulo con ángulos en la relación 1 a 2.

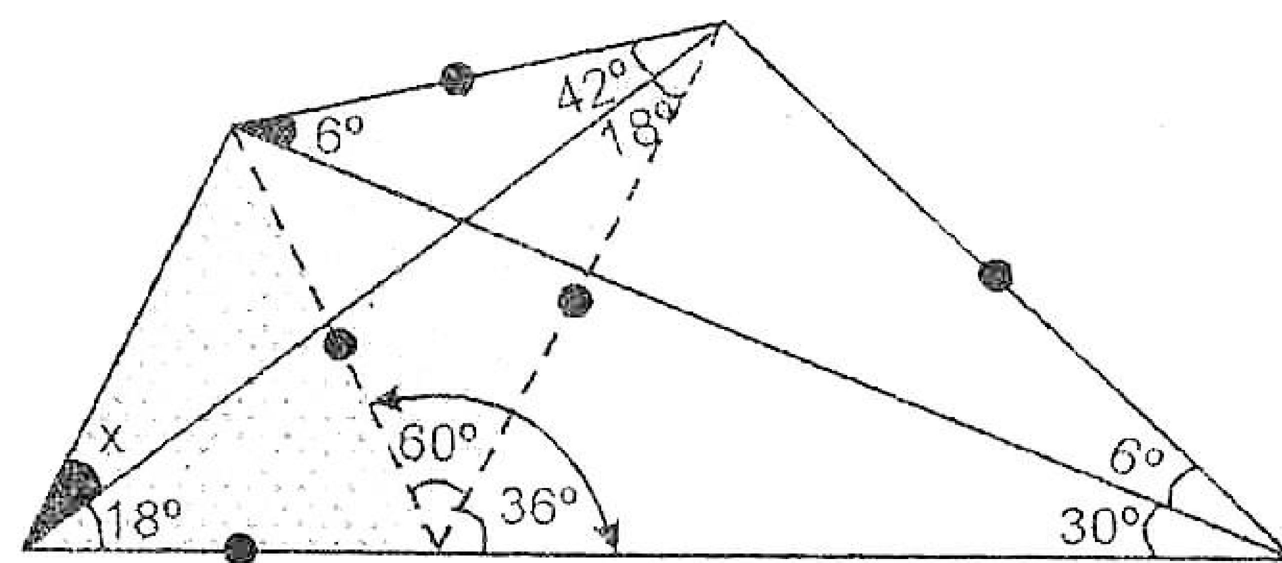


Paso Nº3: Aplicamos el primer criterio de construcción.

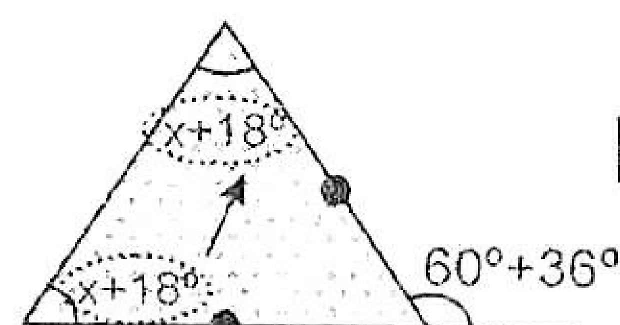


Paso Nº 4: Se observa un triángulo equilátero.





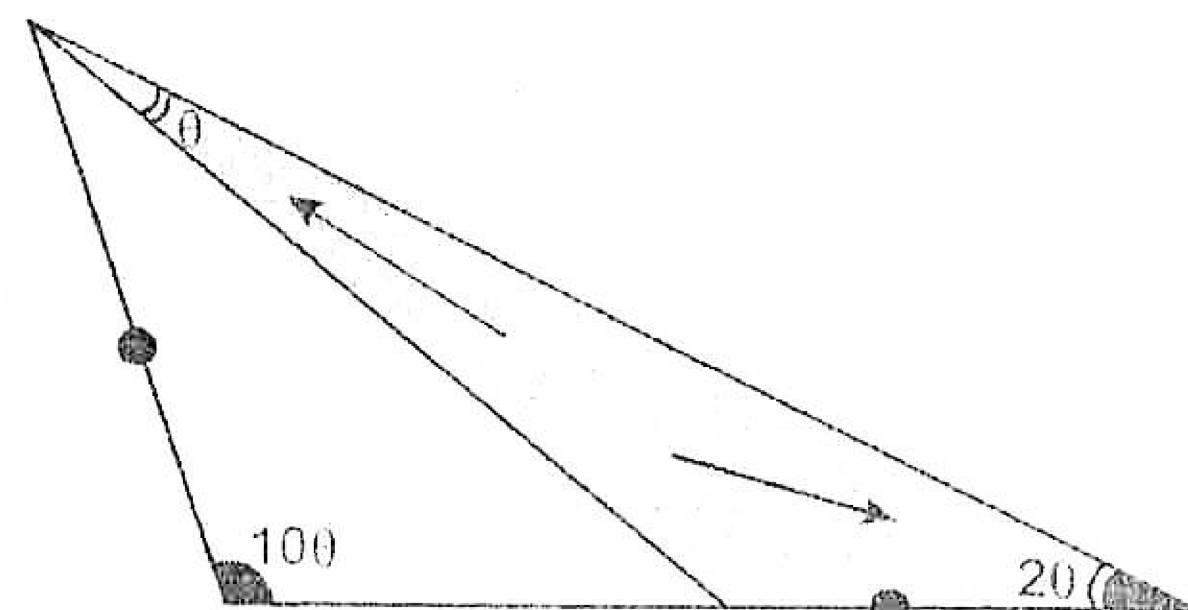
Paso Nº 5: Finalmente, se observa el triángulo donde se realiza la siguiente operación:



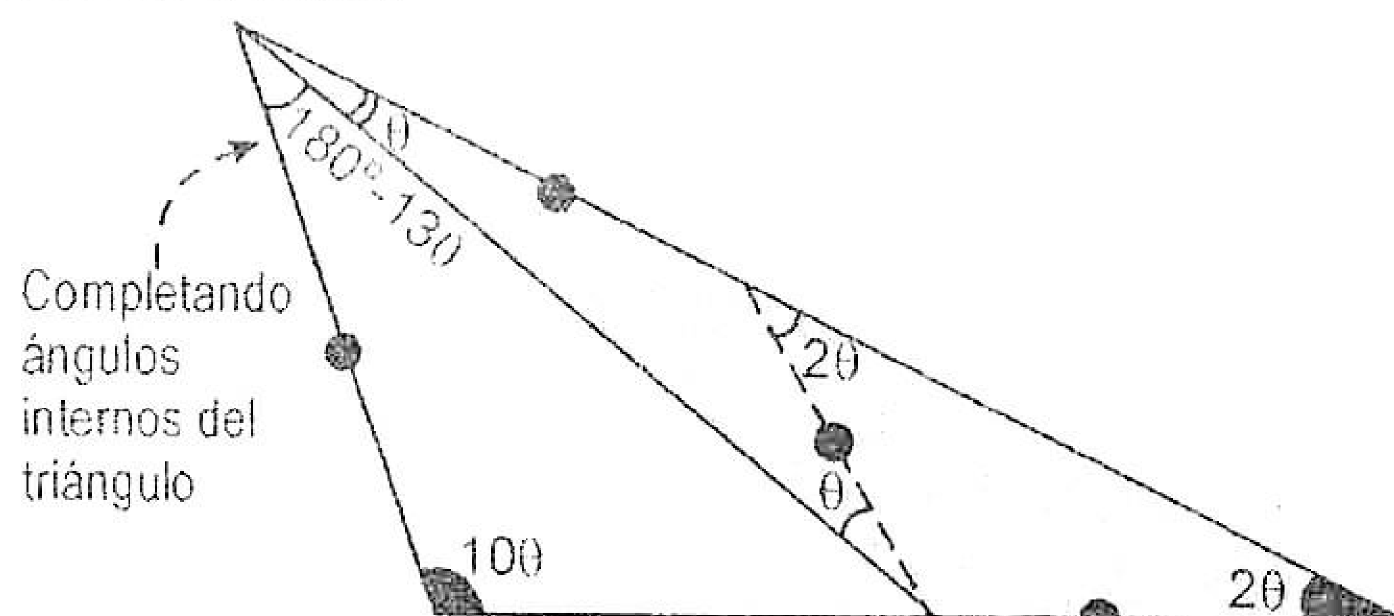
$$(x+18^\circ)+(x+18^\circ)=96^\circ$$
$$2x=60^\circ$$
$$x=30^\circ$$

Solución Nº 5

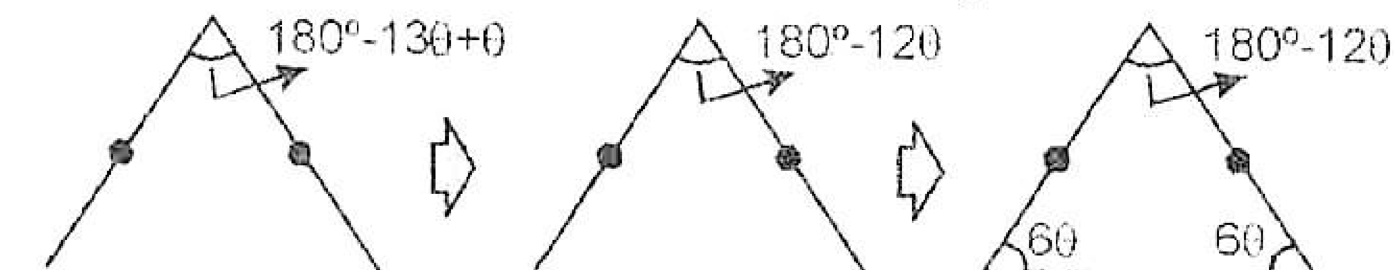
Se observa ángulos internos en la relación de 1 a 2.



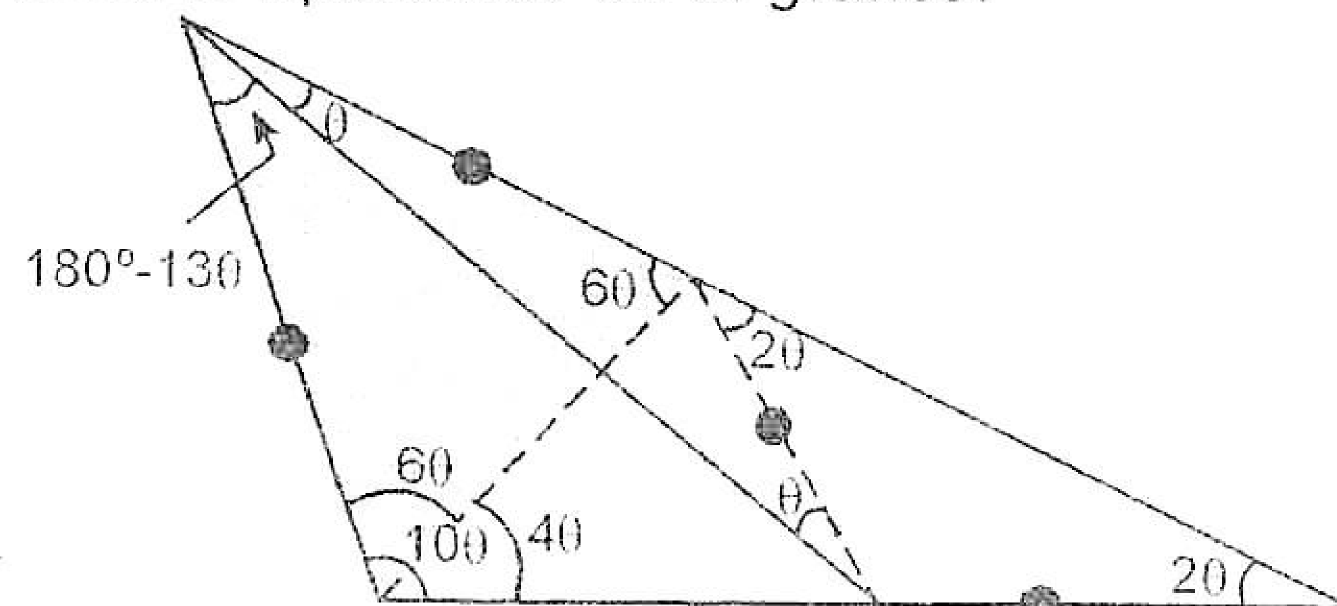
Paso Nº1: Aplicamos el primer criterio de construcción



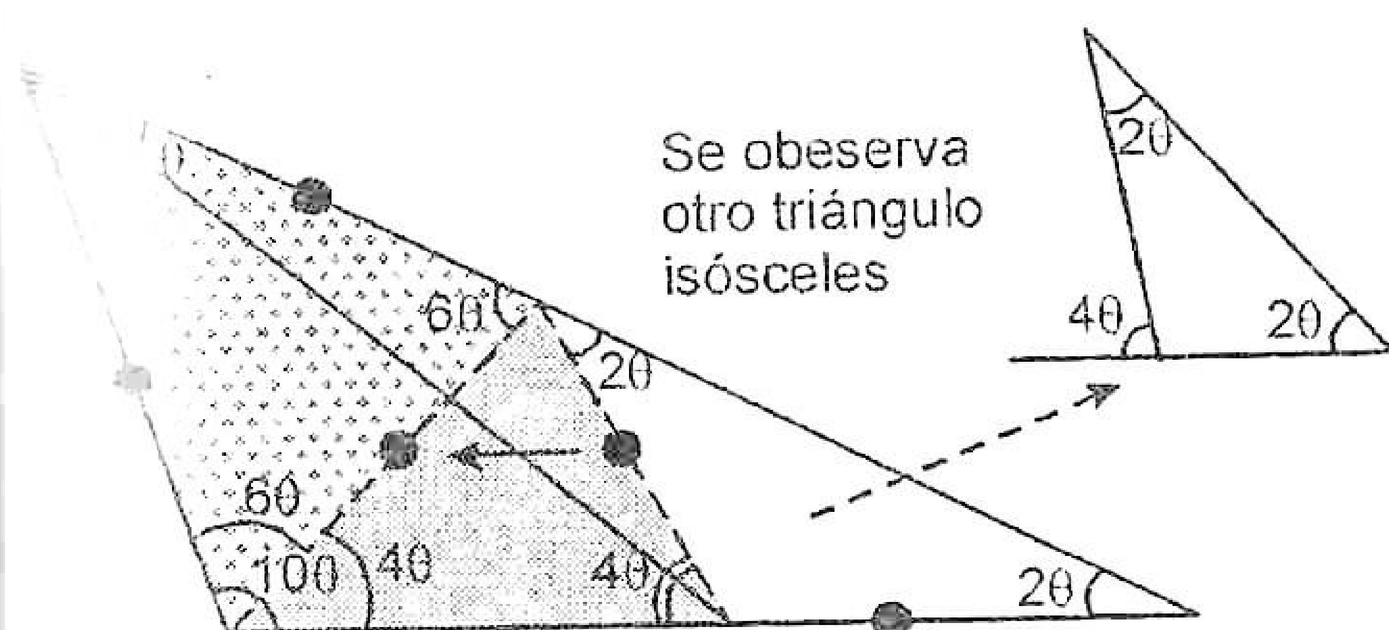
Paso Nº2: Se observa un triángulo isósceles.



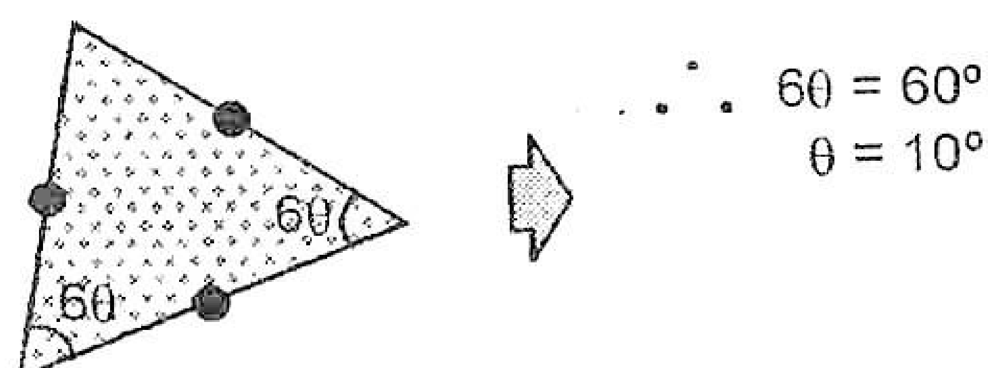
Ahora lo aplicamos en el gráfico.



Paso N° 3:

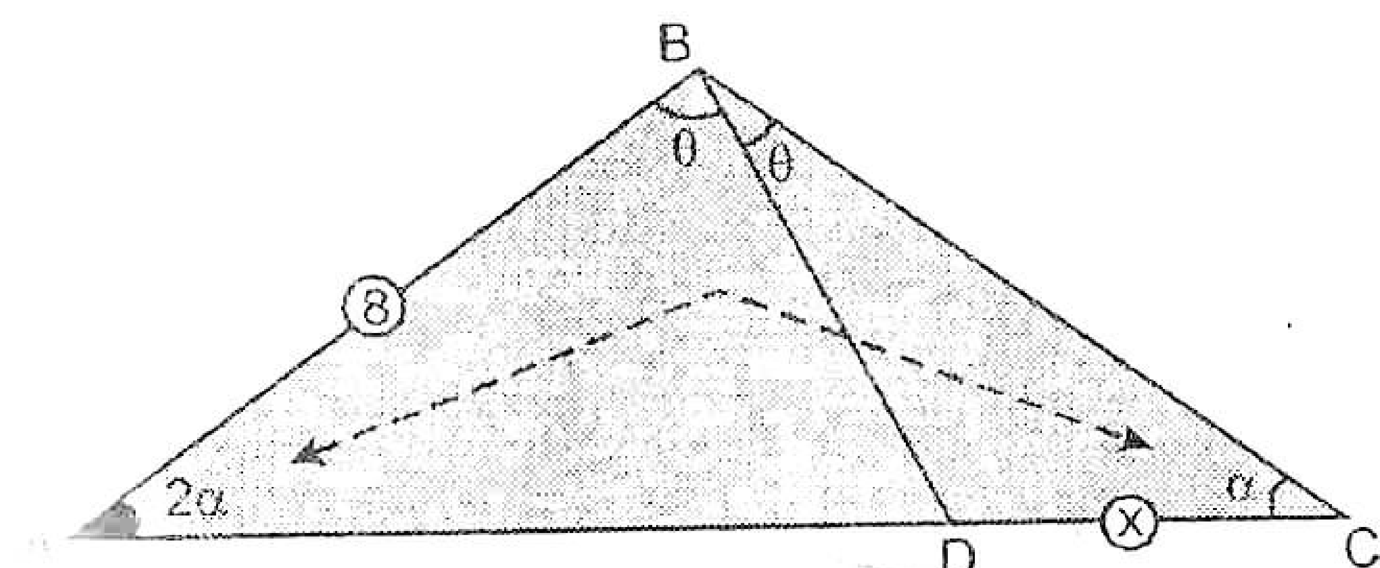


Paso N°4: En la figura observamos el siguiente triángulo que es equilátero donde se cumple:

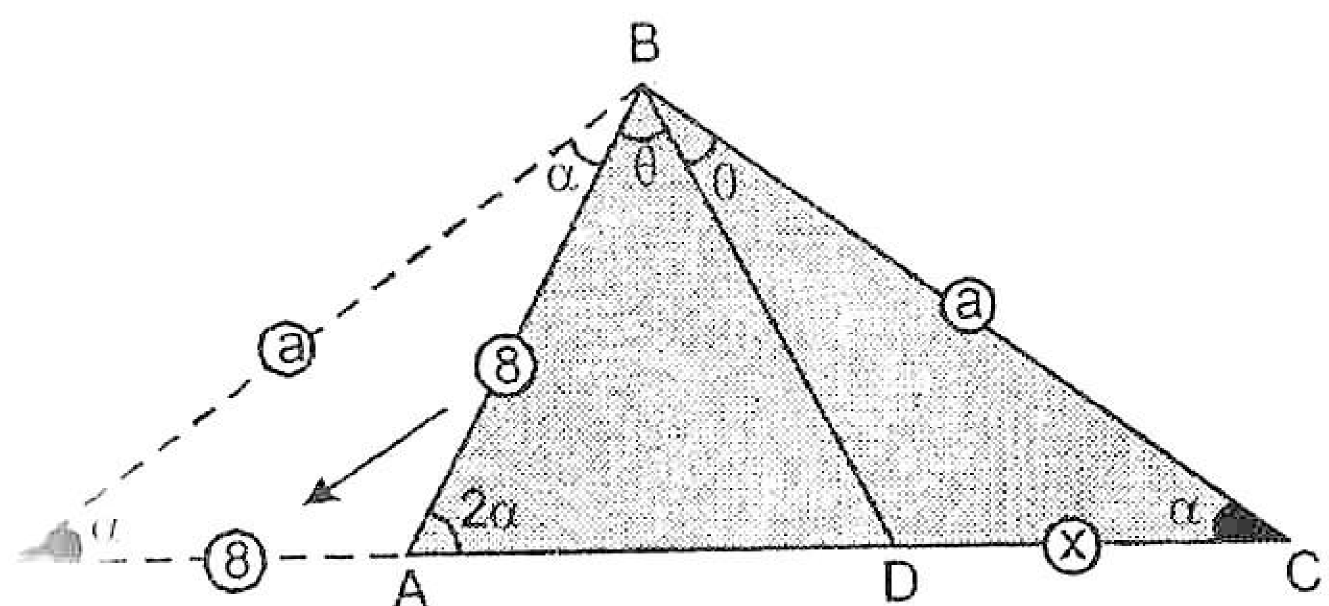


Solución N° 6

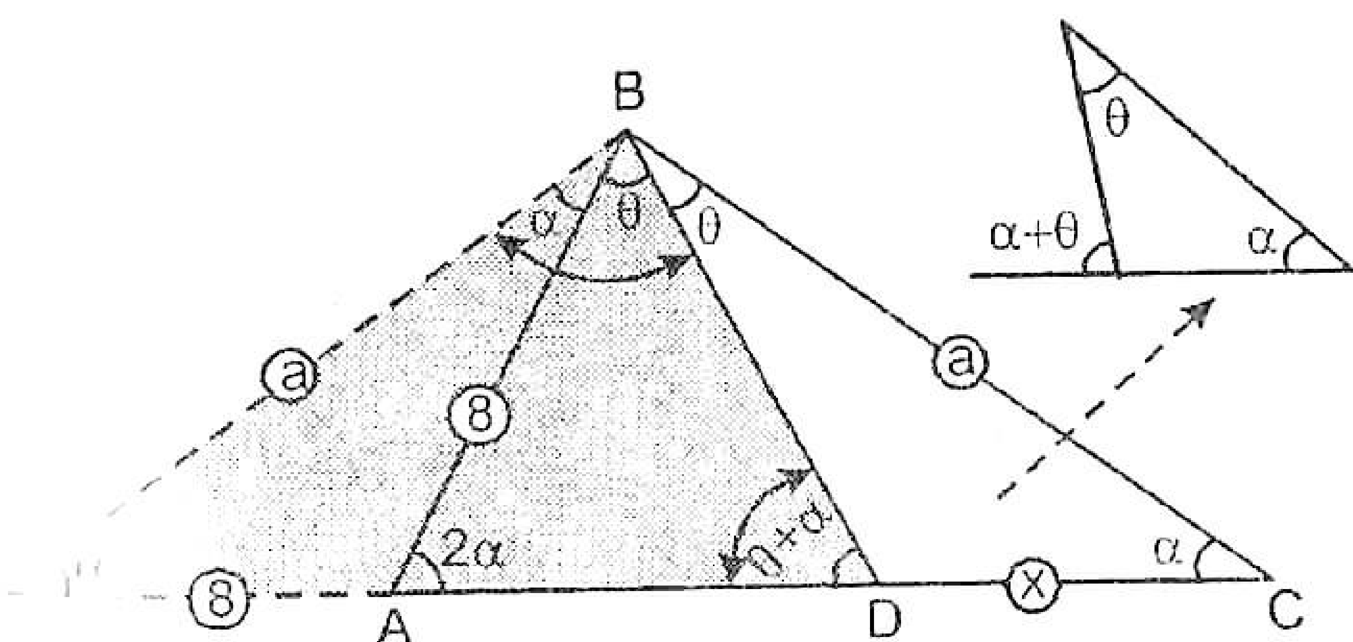
Se observa en la figura ángulos internos en la relación de 1 a 2.



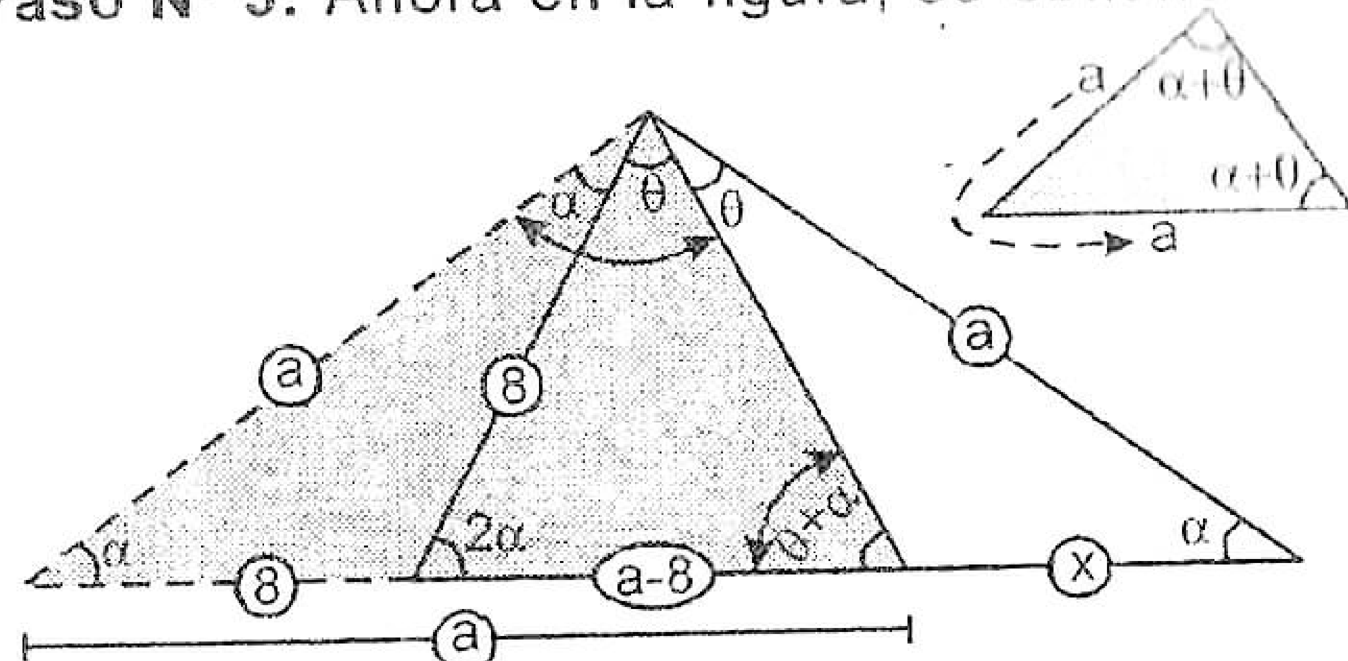
Paso N° 1: Aplicamos el primer criterio de construcción; donde nos conviene trazar la ceviana externa.



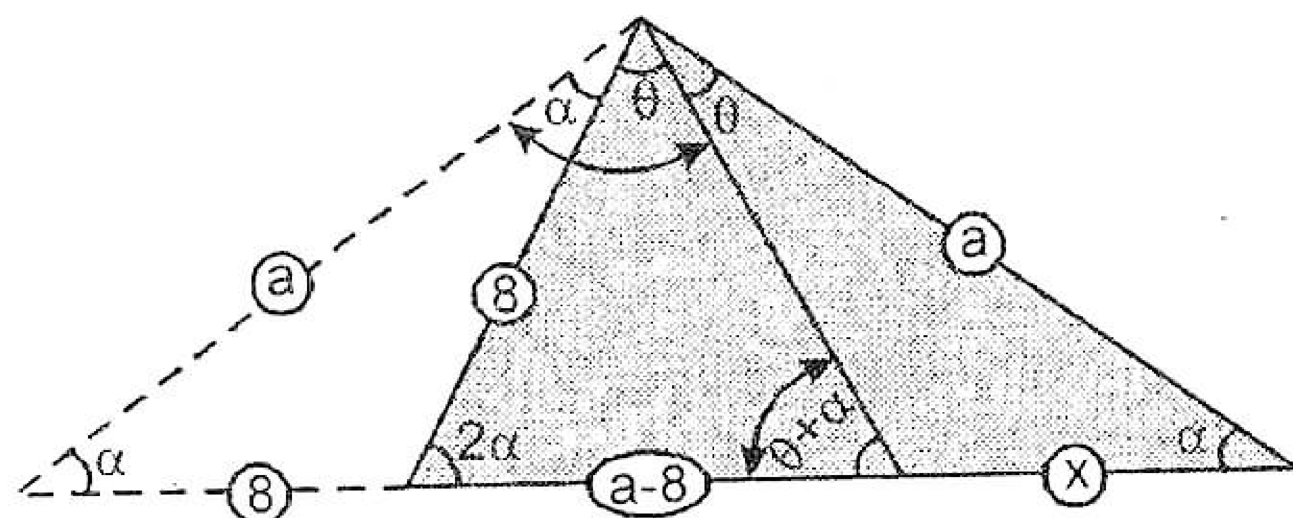
Paso N° 2: Se observa que se obtiene un triángulo isósceles interno a la figura:



Paso N° 3: Ahora en la figura, se obtiene



Paso N° 4: Observamos el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:



Aplicamos el teorema de existencia de triángulos.

$$8 - a < \underbrace{a - 8 + x < 8 + a}$$

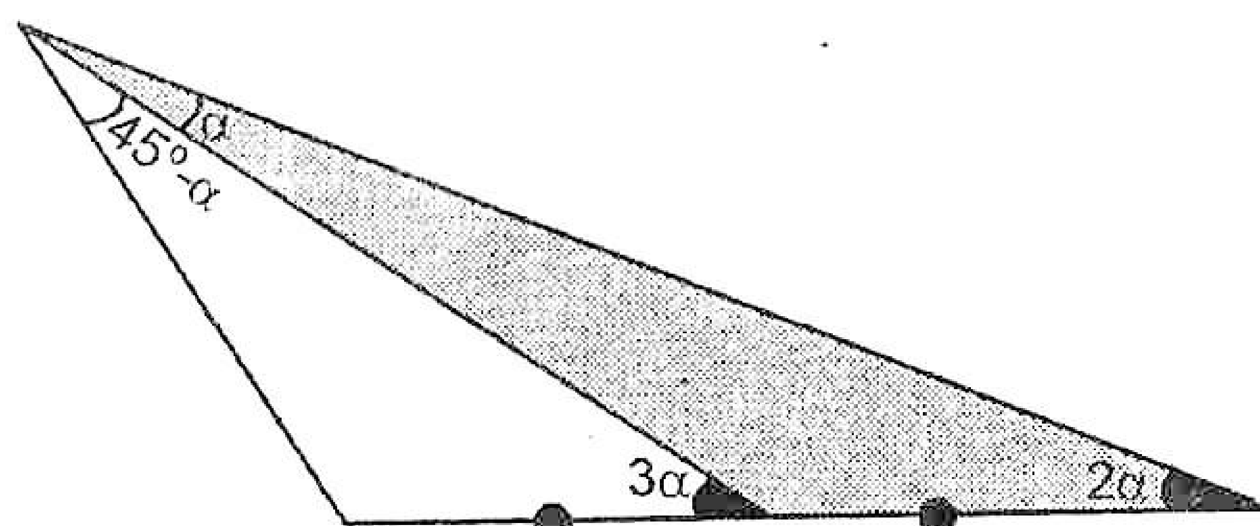
$$a - 8 + x < 8 + a$$

$$x - 8 < 8 \Rightarrow x < 16$$

$$x_{max} = 15$$

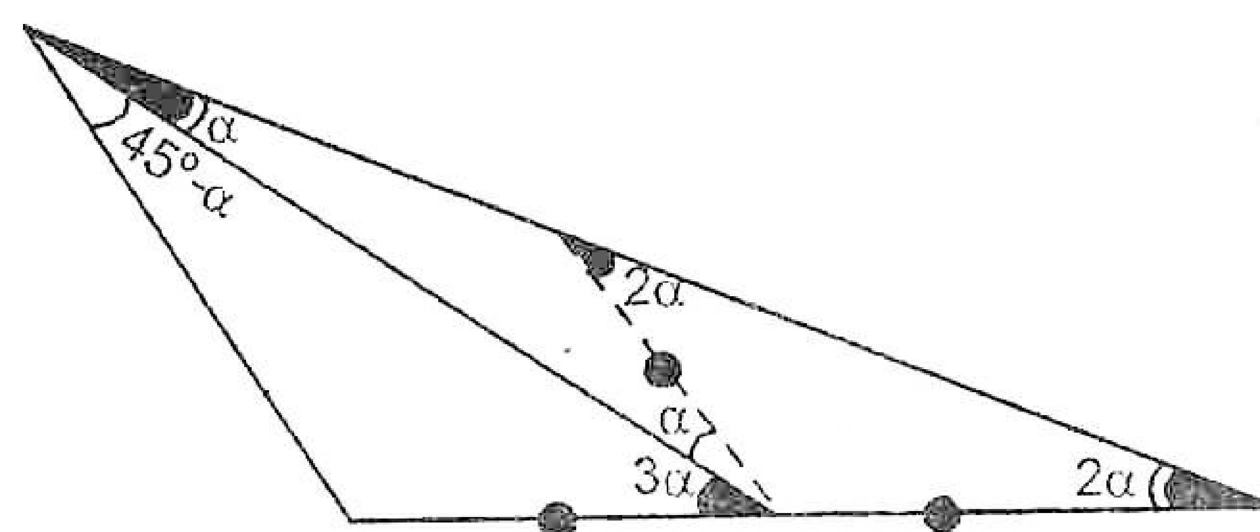
Solución N° 7

Se observa en la figura un triángulo que contiene ángulos en la relación de 1 a 2.

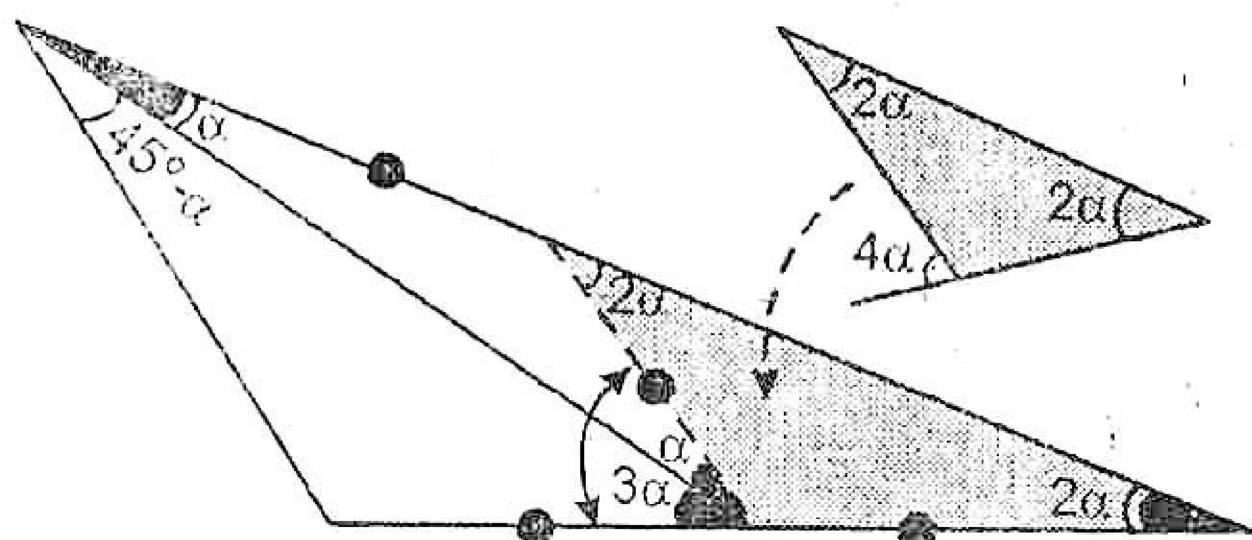


Paso N° 1

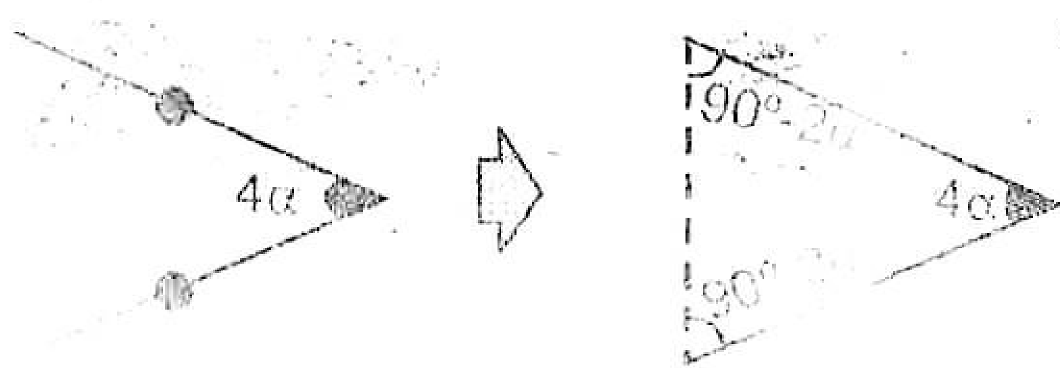
Trazamos la ceviana interna donde obtenemos la siguiente figura (primer criterio de construcción).

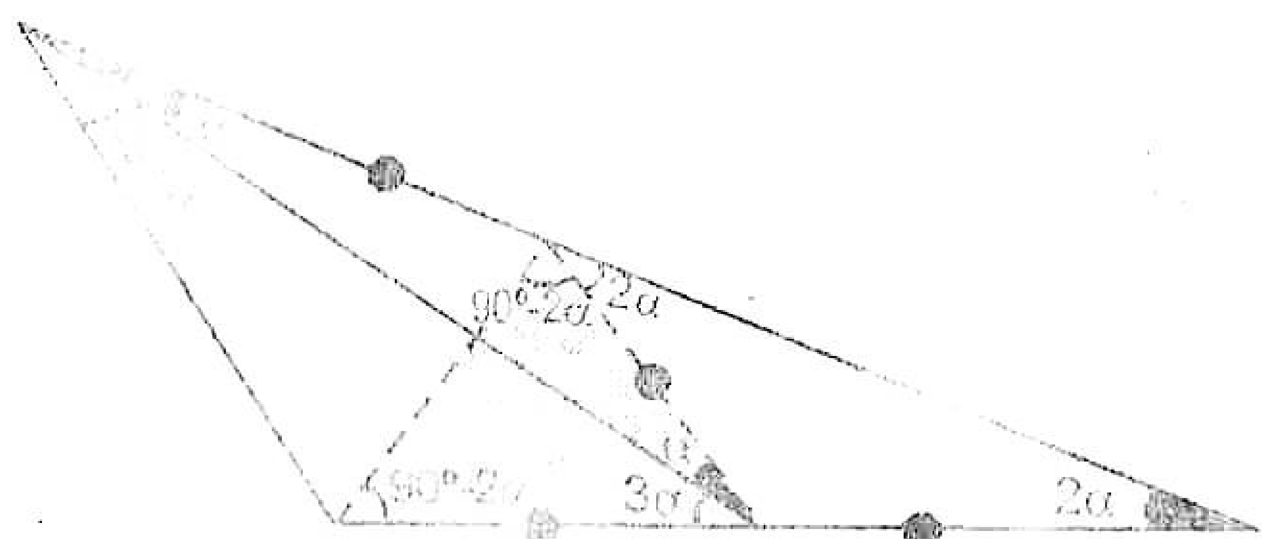


Paso N° 2
Completamos los ángulos internos para obtener lados iguales y así encontrar triángulos isosceles.

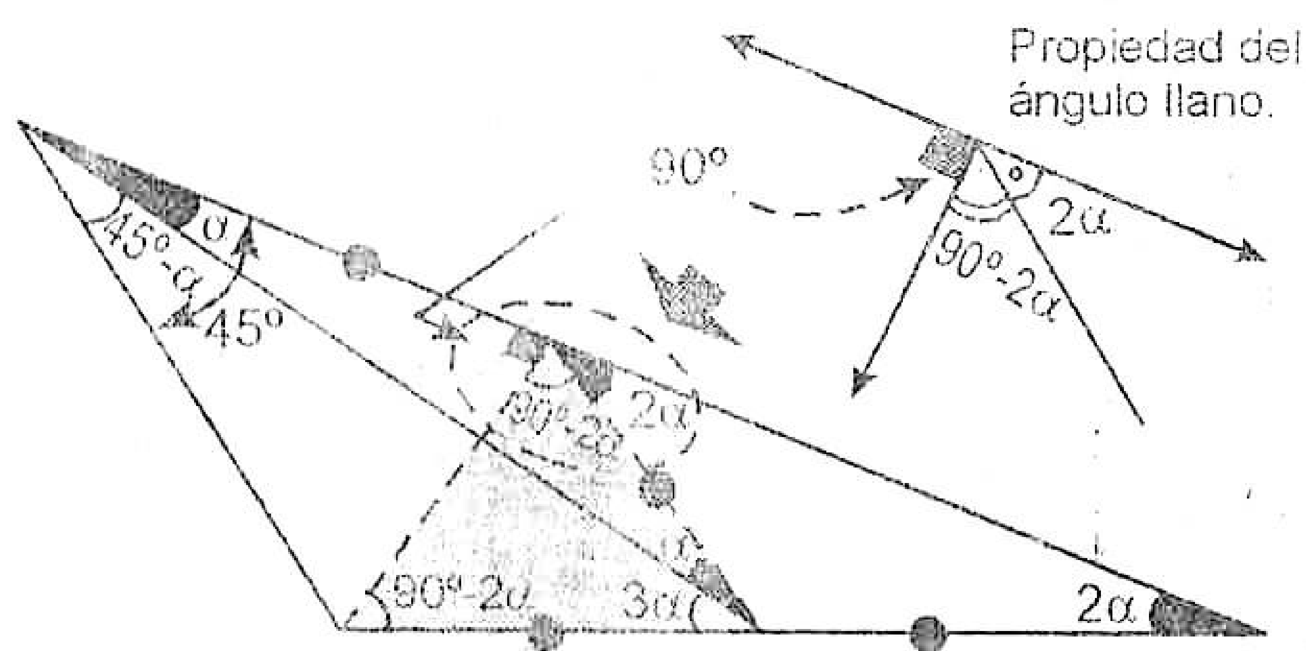


Paso N° 3
Se observa una figura con 2 lados iguales, entonces realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles:

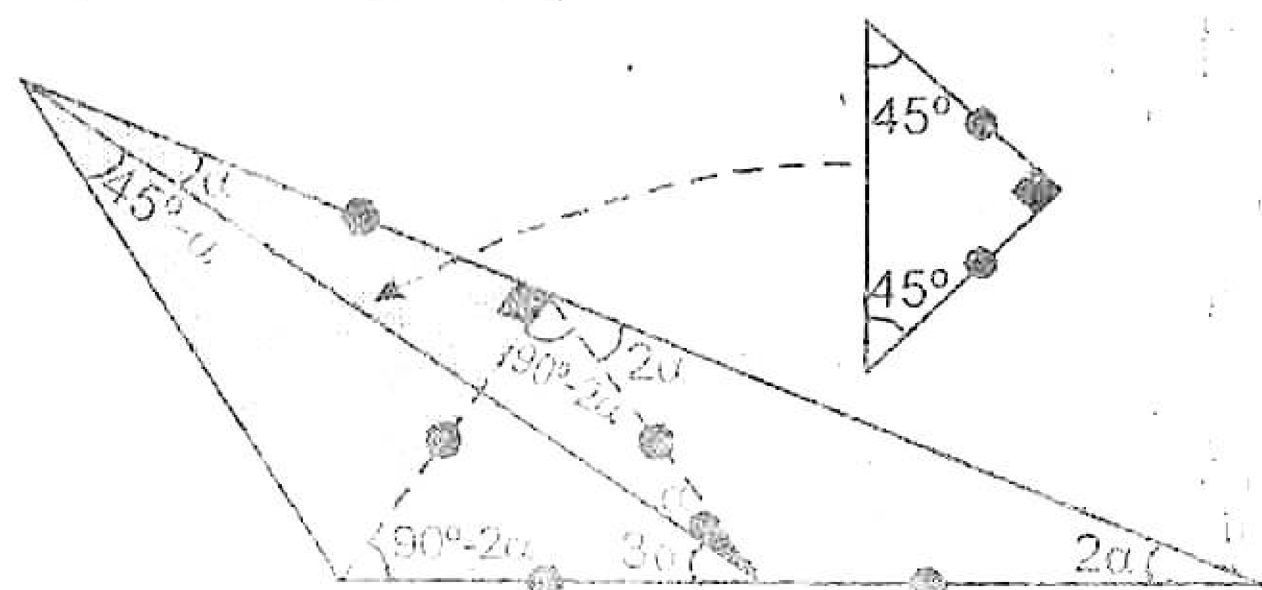




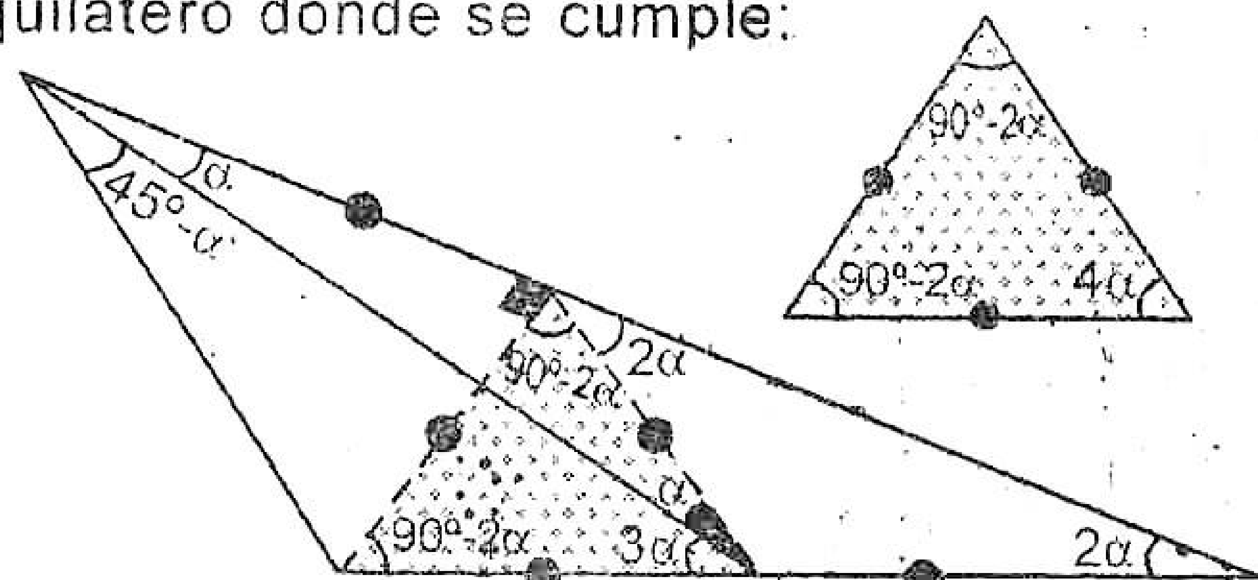
Paso N° 4
Se observa un ángulo recto en la figura.



Paso N° 5
Se observa un triángulo rectángulo notable de 45° (catetos iguales)



Paso N° 6: Luego se obtiene un triángulo equilátero donde se cumple:



$$\Rightarrow \quad 4\alpha = 60^\circ$$
$$\alpha = 15^\circ$$

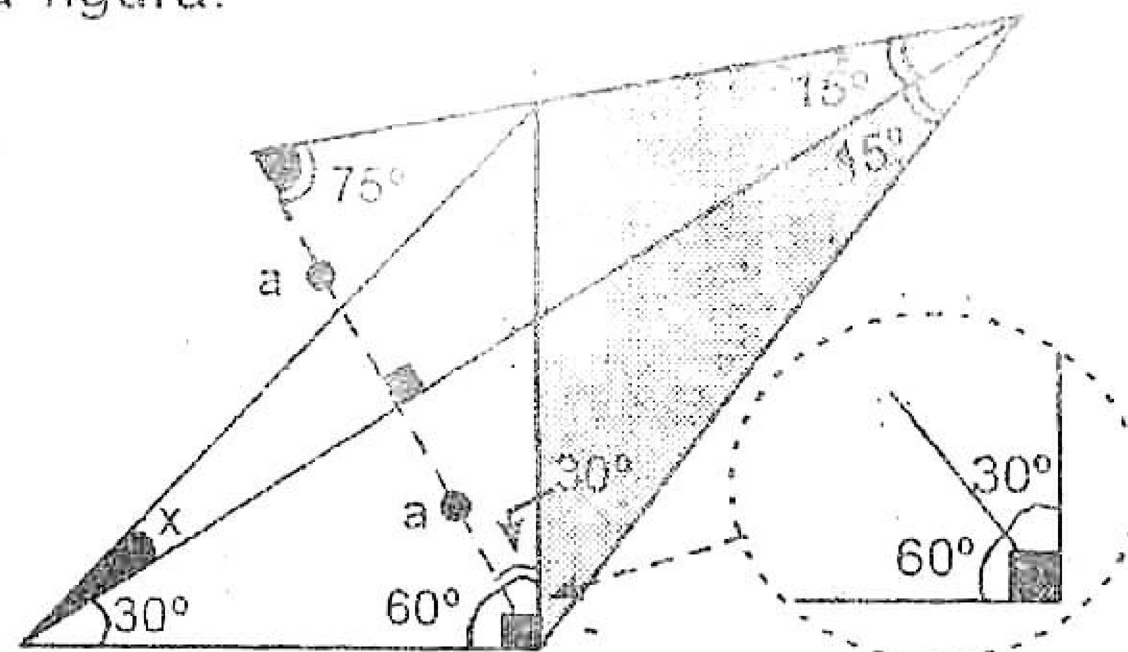
Solución N° 8

Observamos una bisectriz interior en la figura, entonces aplicamos el segundo criterio de construcción.

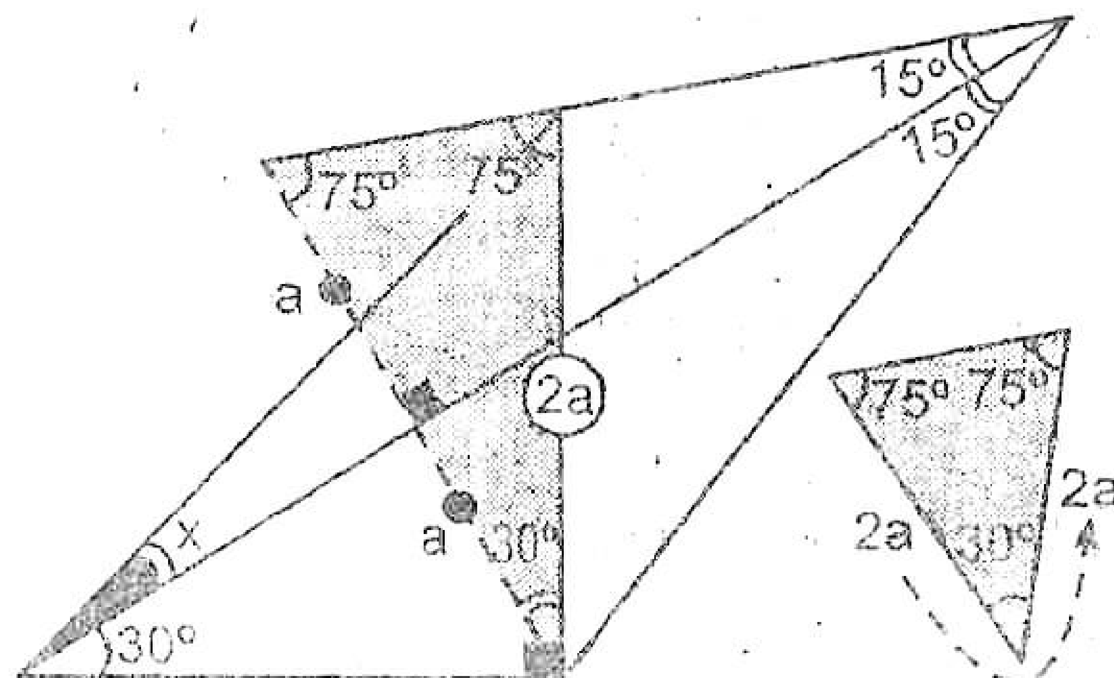
Paso N° 1



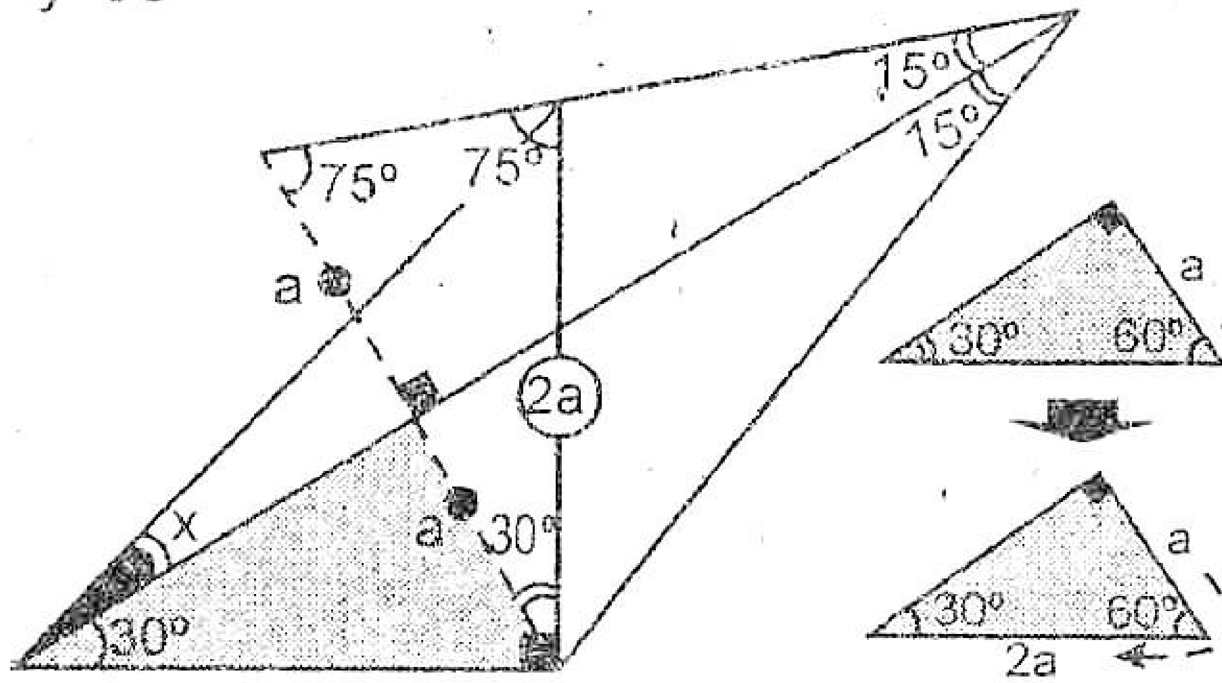
Paso N° 2: Completamos los ángulos internos en la figura.



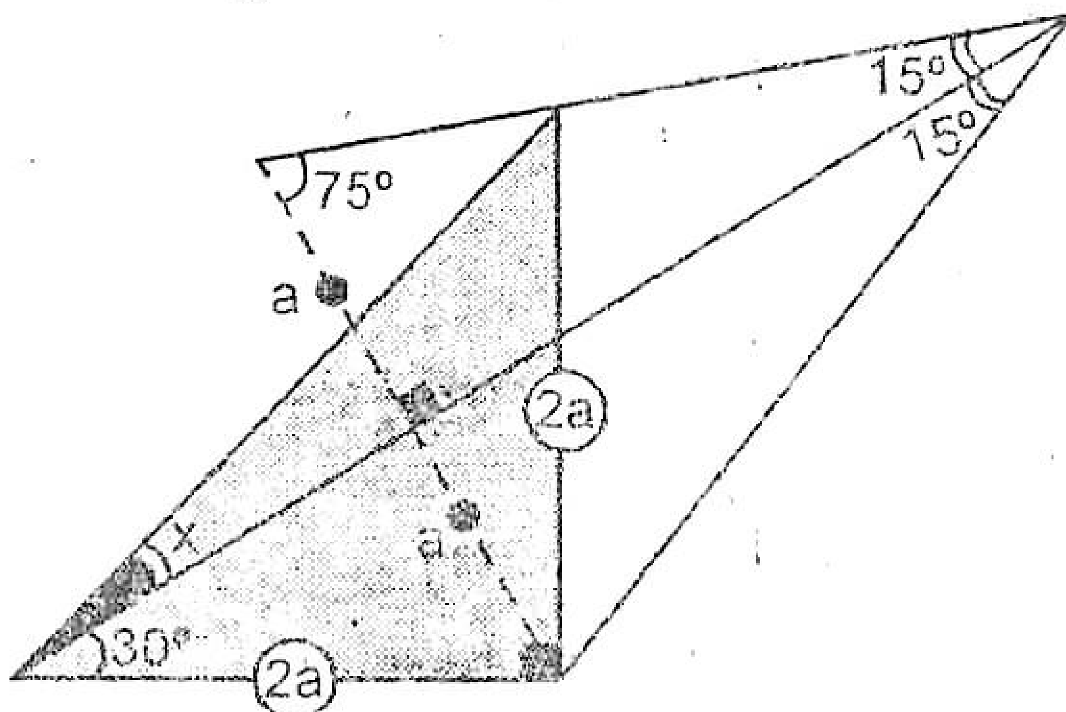
Paso N° 3
Se observa que la figura sombreada es un triángulo isósceles.



Paso N° 4
Se observa un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°



Paso N° 5: Gracias al paso anterior se obtiene la siguiente figura:

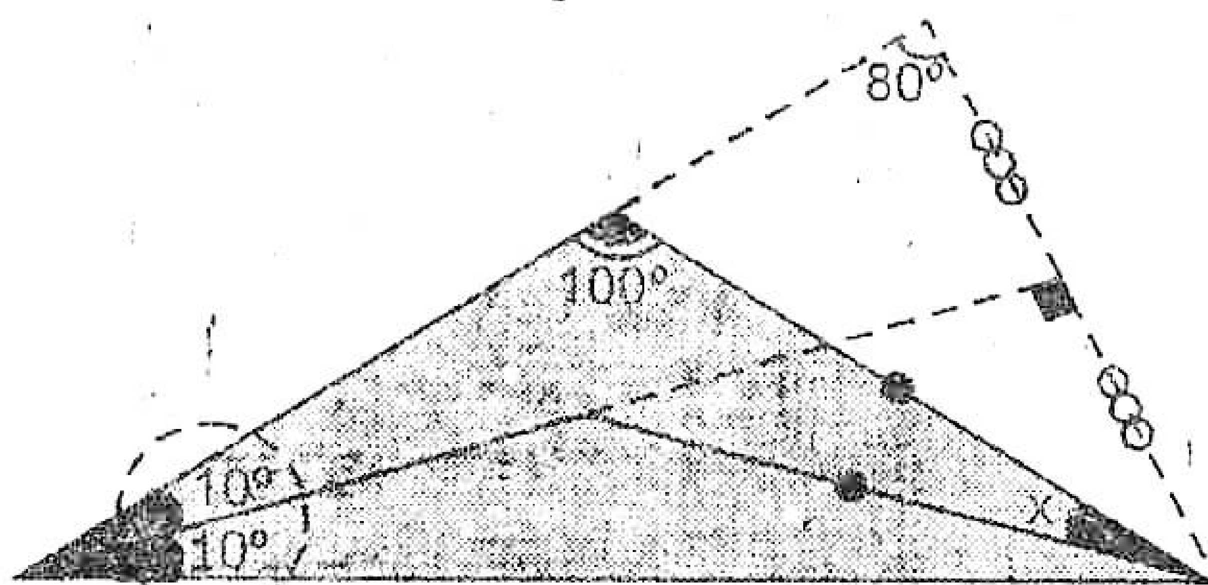


El triángulo sombreado es un triángulo rectángulo notable de (45° y 45°)

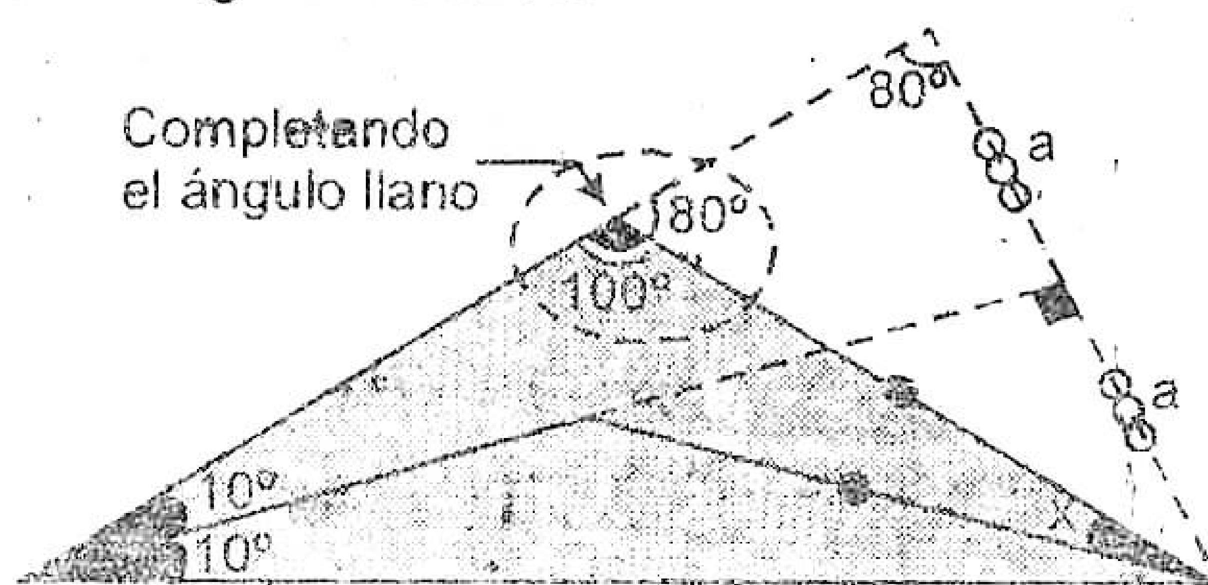
$$\therefore \quad x + 30° = 45°$$
$$x = 15°$$

Solución N° 9

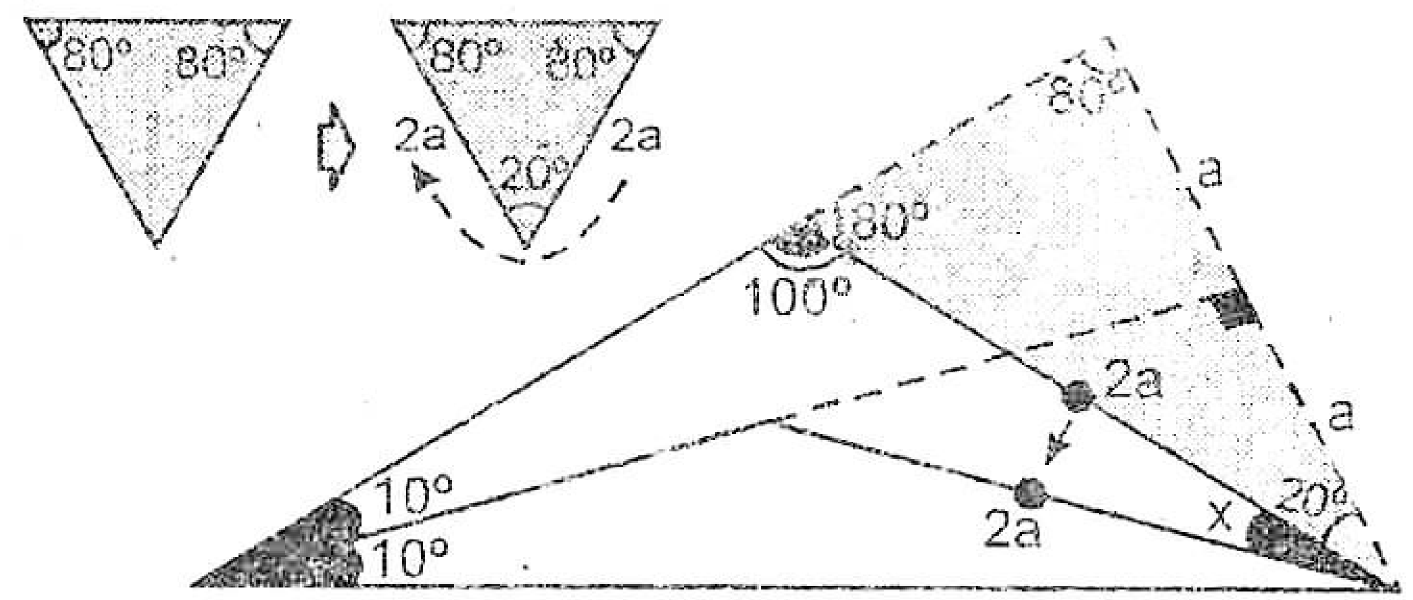
Paso N° 1: Observamos en la figura una, bisectriz interior y realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.



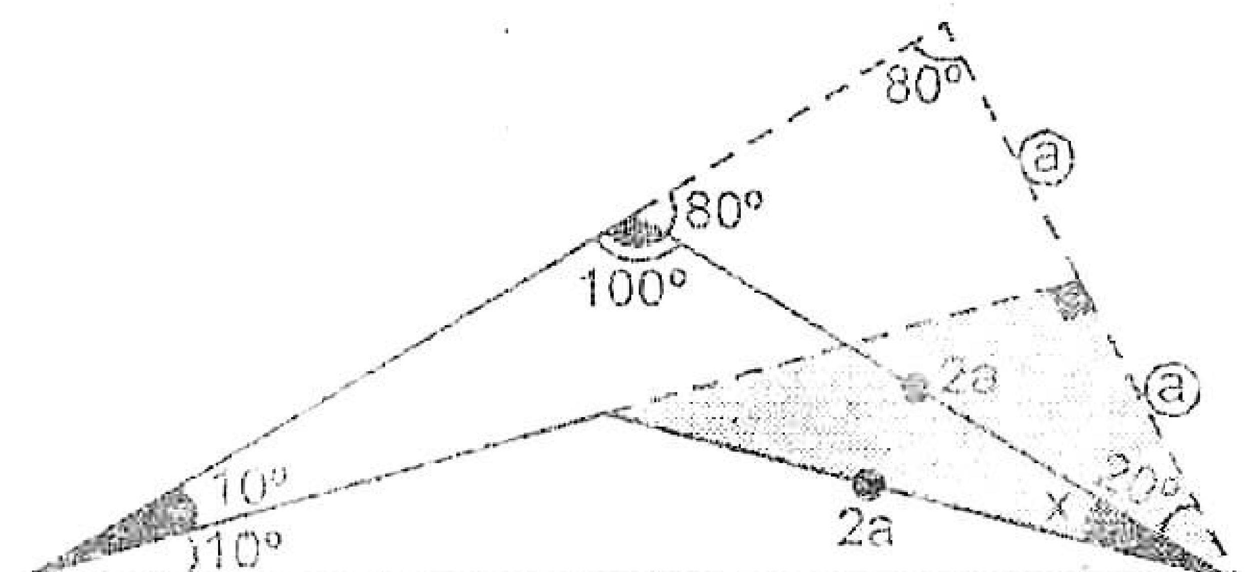
Paso N° 2: Completamos los ángulos internos en el triángulo trazado.



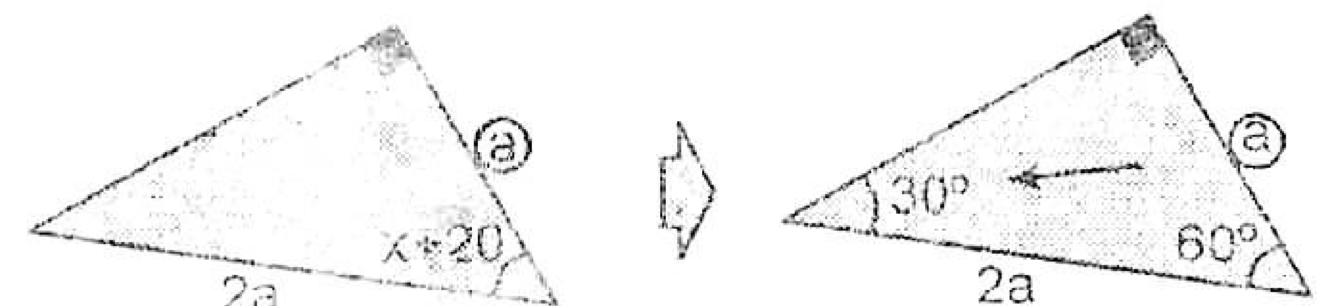
Paso N° 3
Se observa un nuevo triángulo isósceles en la figura sombreada.



Paso N° 4
Se observa un triángulo rectángulo con las siguientes características:



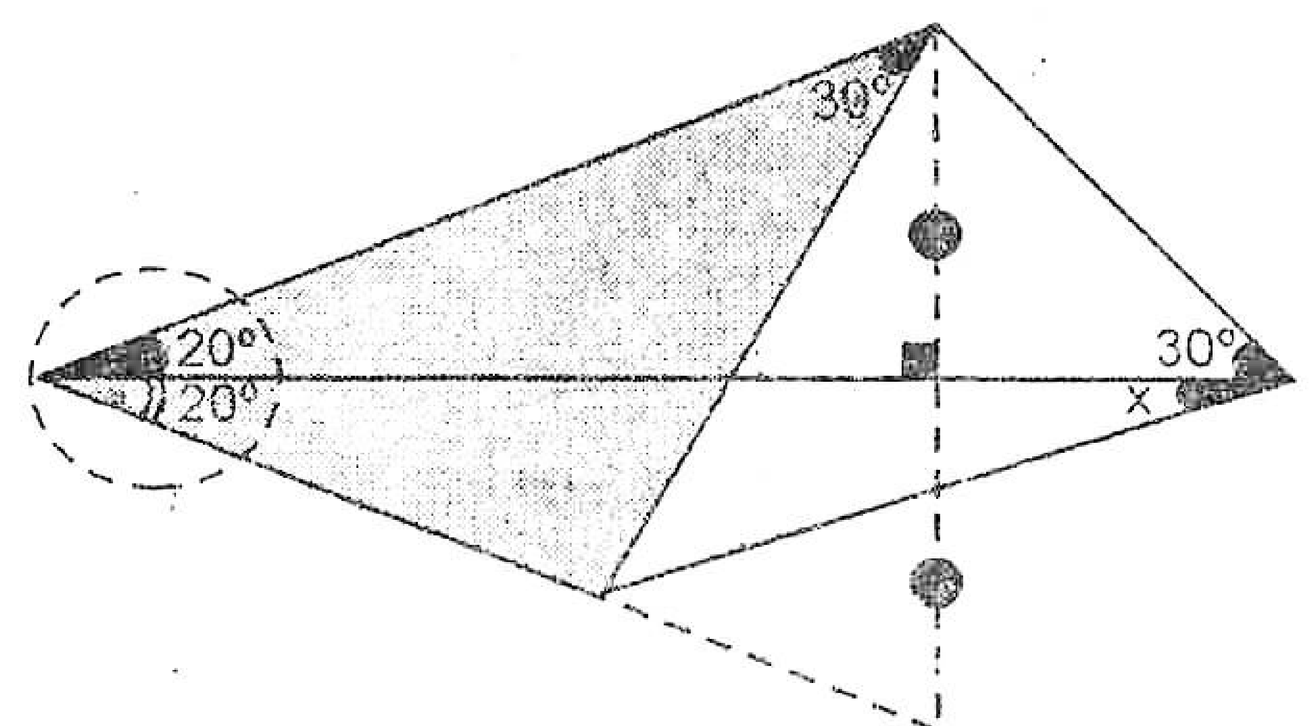
Donde el triángulo rectángulo es notable de (30° y 60°)



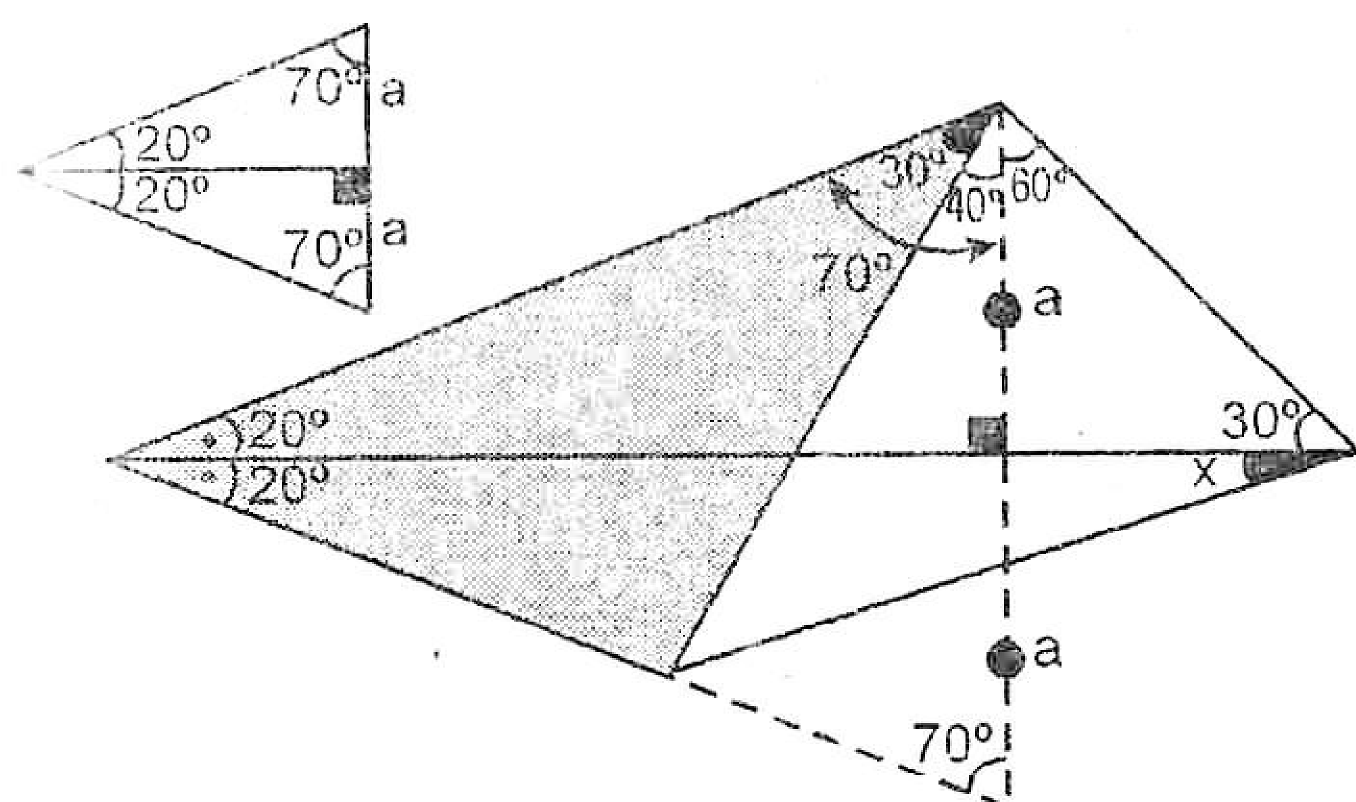
$$\Rightarrow \; x + 20° = 60° \quad \Rightarrow \; x = 40°$$

Solución N° 10

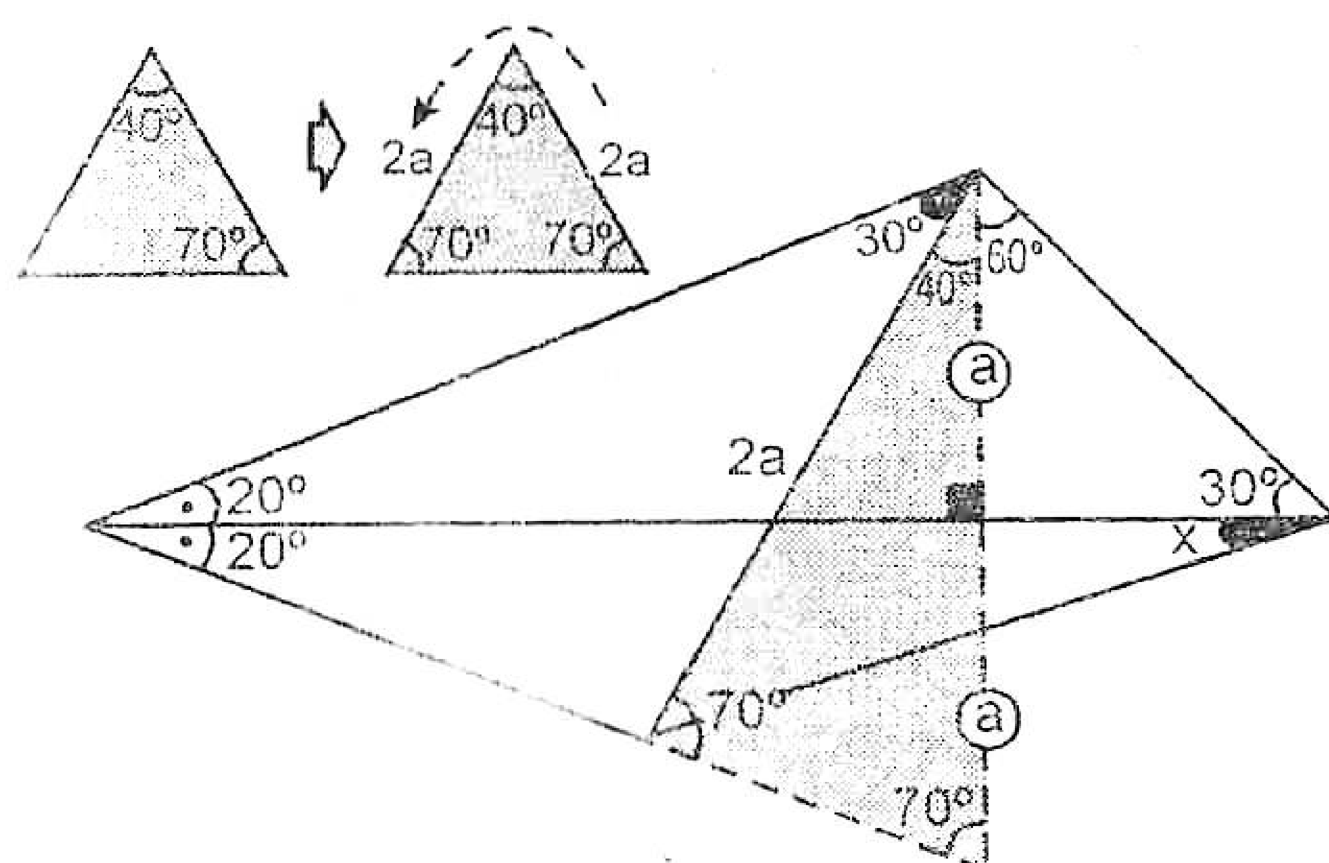
Paso N° 1
Observamos en la figura una bisectriz interior entonces trazamos un triángulo isósceles de la siguiente manera:



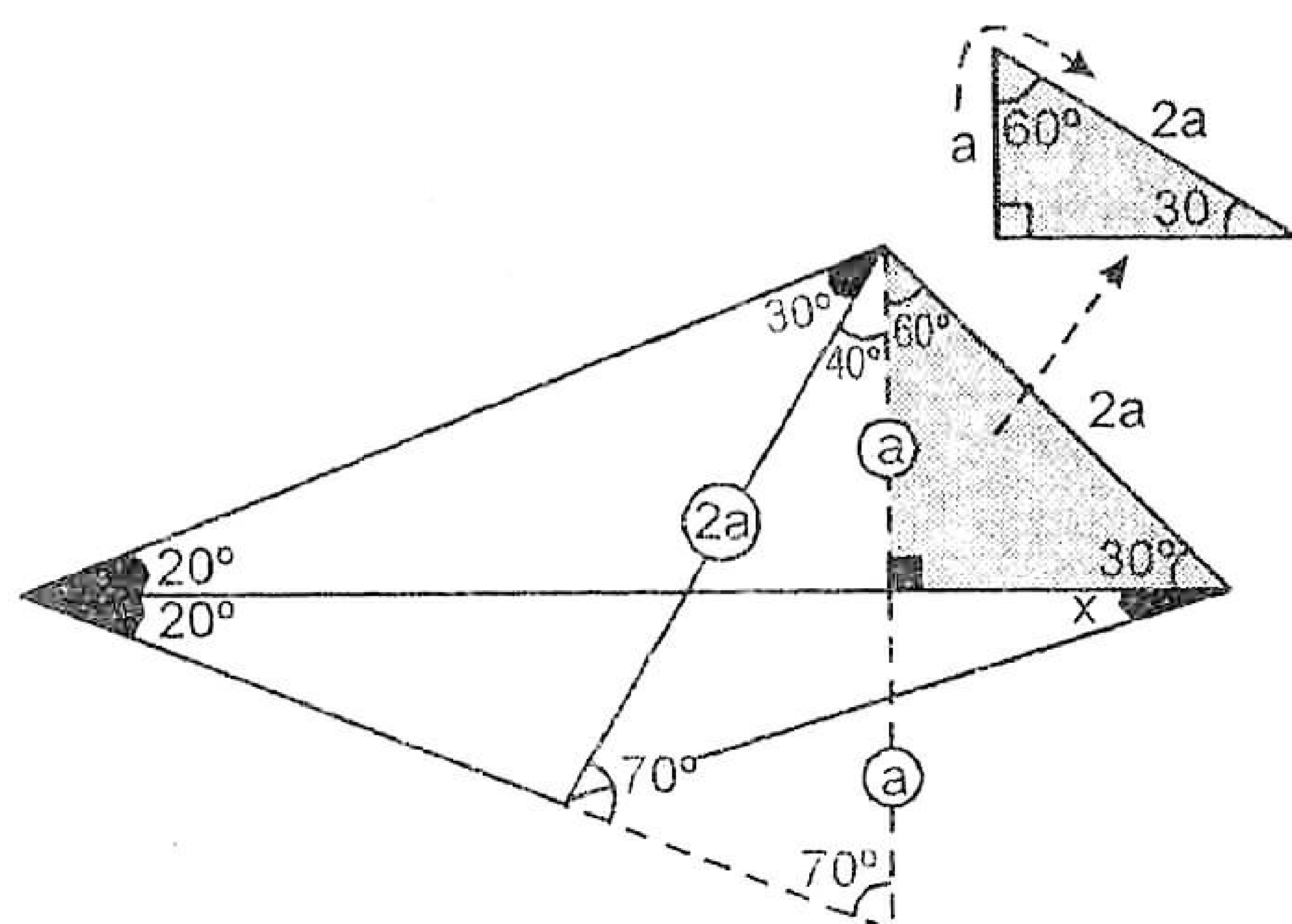
Paso N° 2
Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.



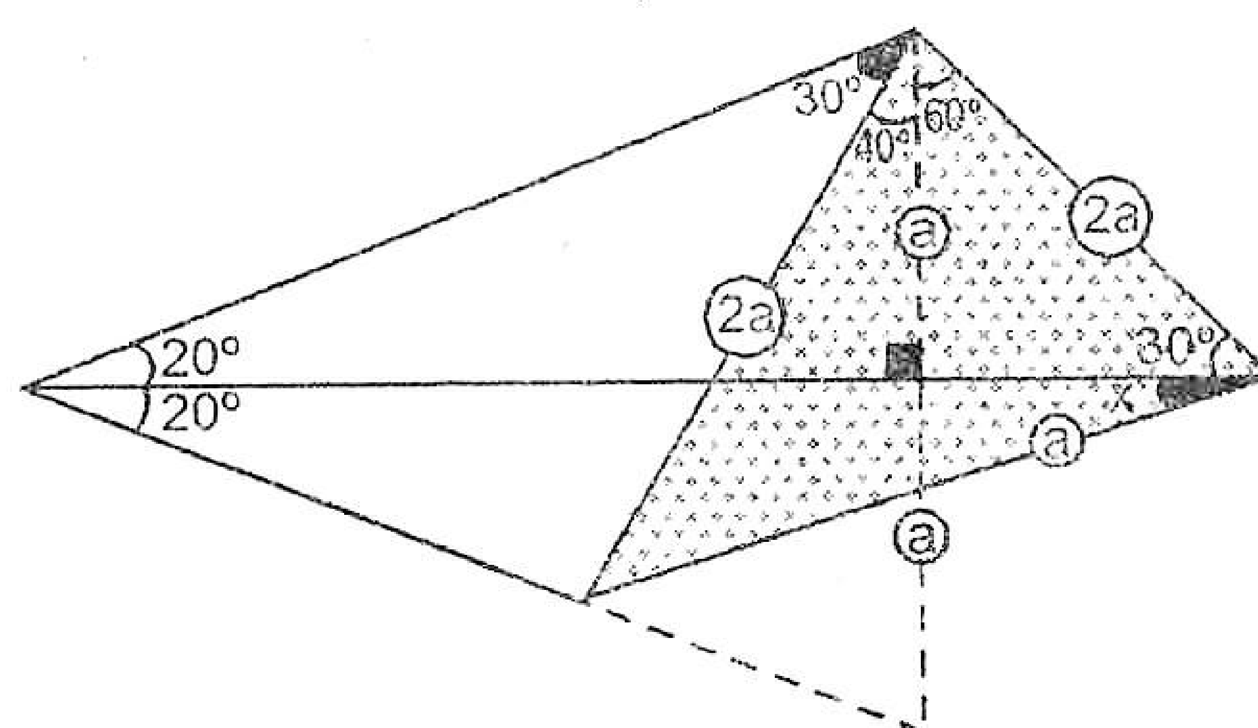
Paso N° 3
Se observa un triángulo isósceles en la figura sombreada.

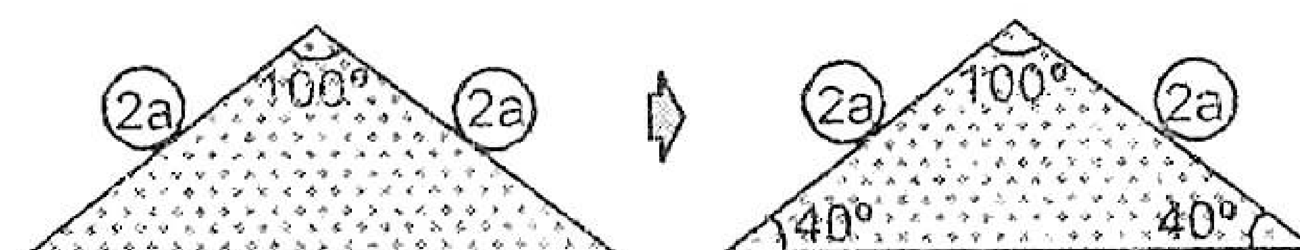


Paso N° 4
Se observa también un triángulo notable (30° y 60°) en la figura sombreada.



Paso N° 5
Ahora se observa un nuevo triángulo isósceles.

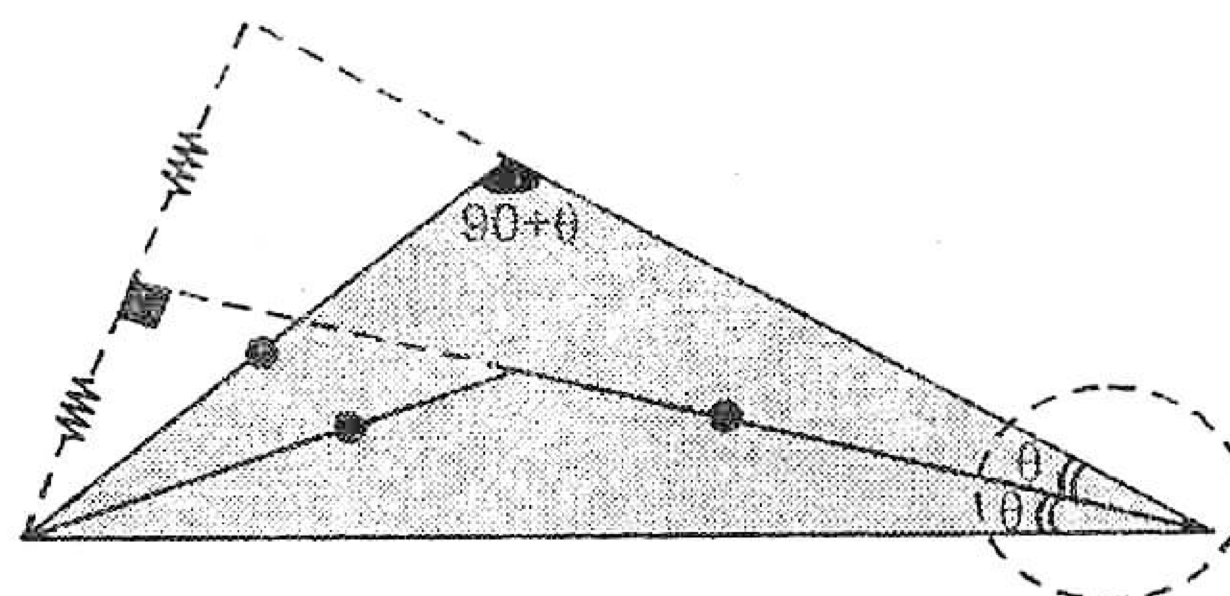




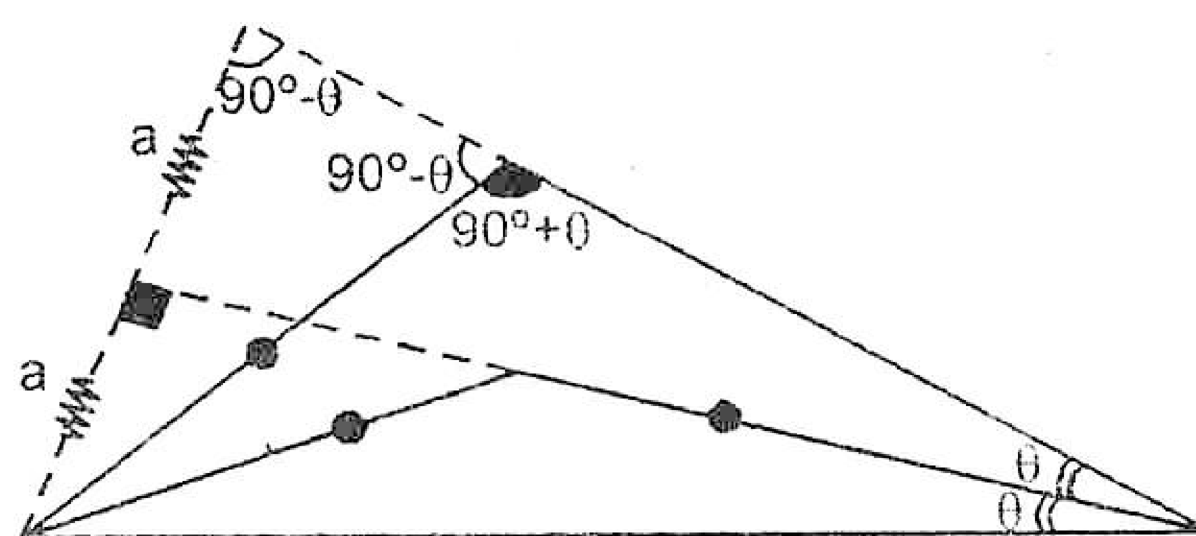
$$\Rightarrow x + 30° = 40°$$
$$x = 10°$$

Solución N° 11

Paso N° 1
Se observa una bisectriz en la figura; entonces contruimos en ella un triángulo isósceles.

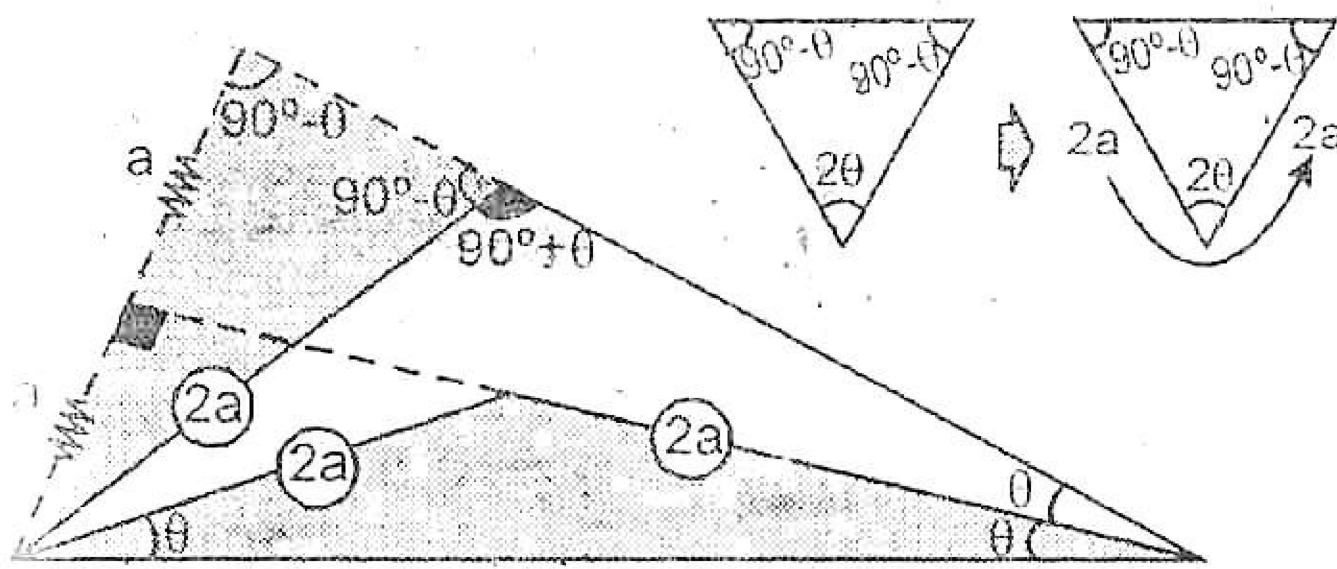


Paso N° 2
Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.



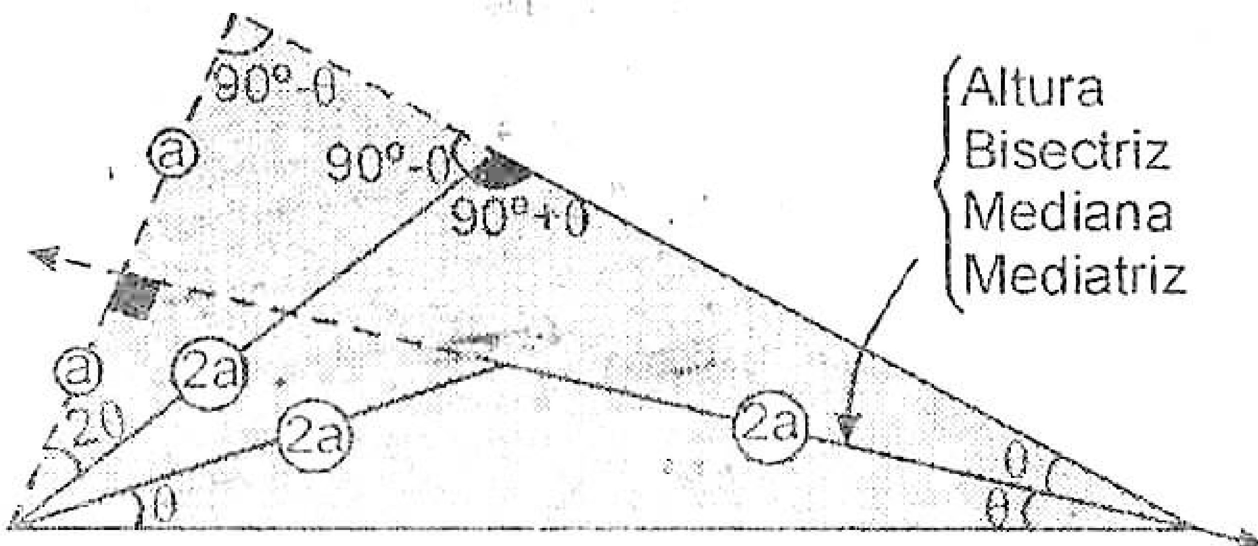
...so Nº 3

...observa en la figura un triángulo isósceles y ...dos iguales.

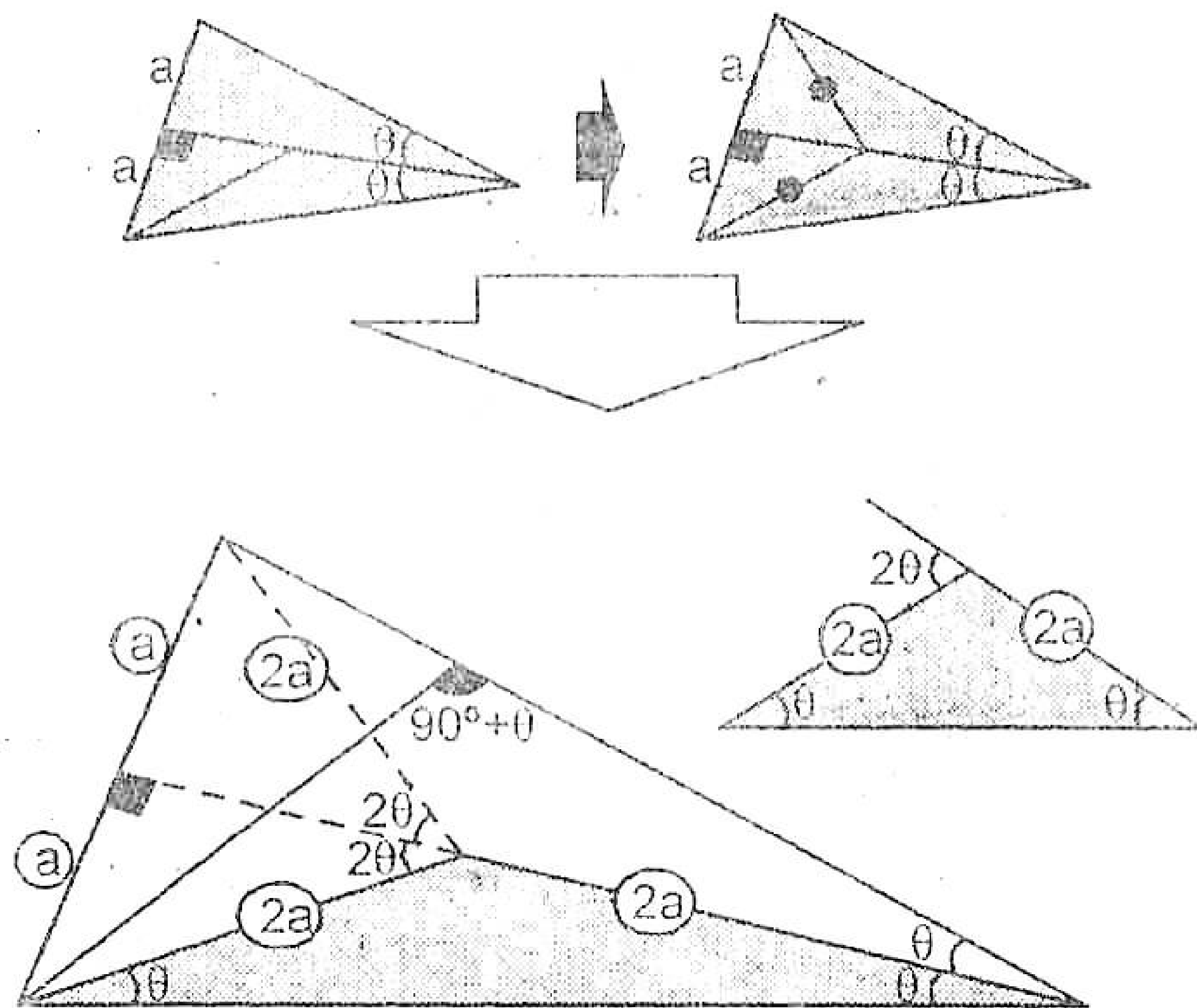


...aso Nº 4

...e observa en la figura, que se cumple:

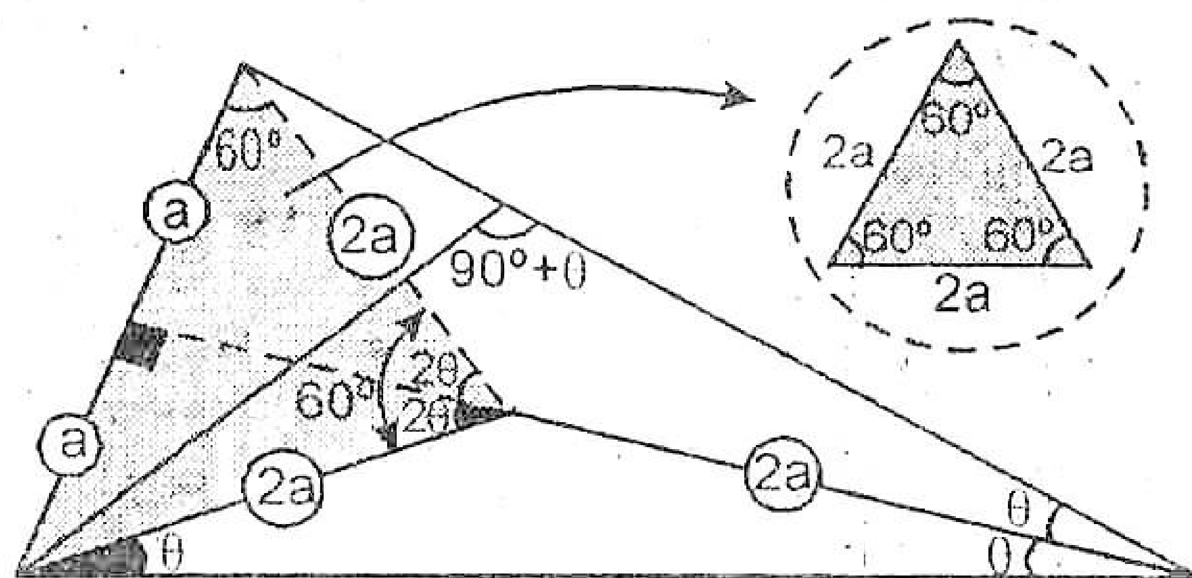


...e cumple:



Paso Nº 5

Se observa la figura interna un triángulo equilátero.

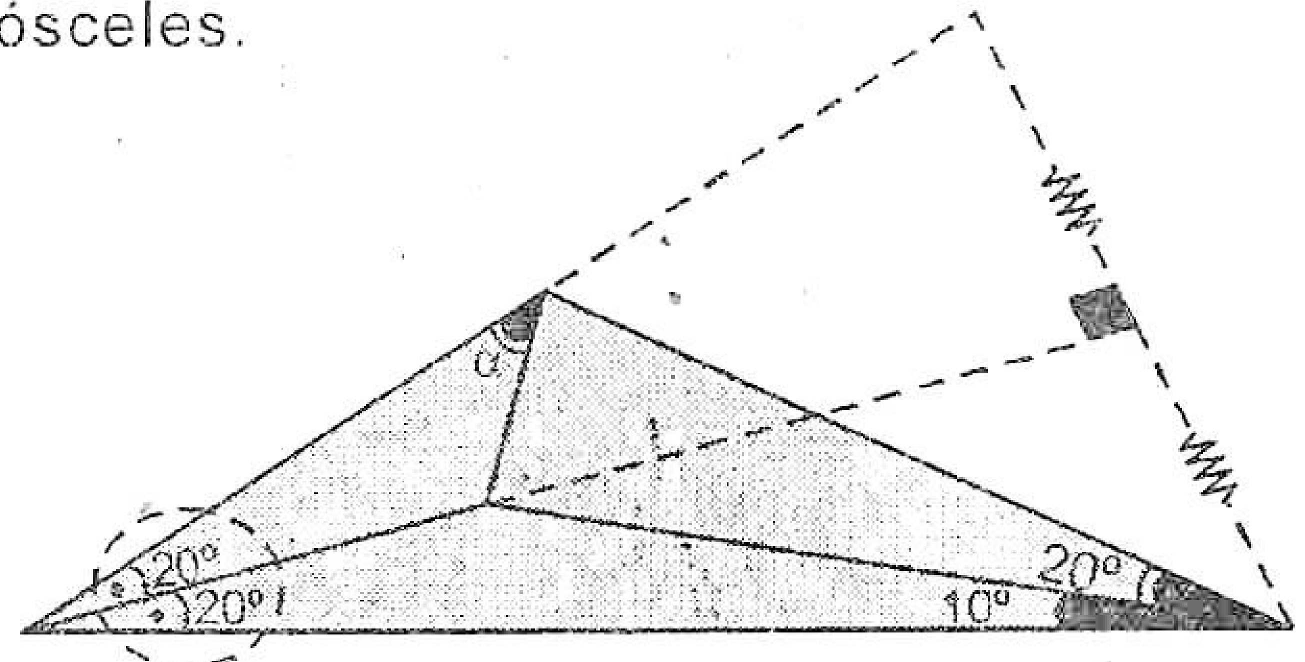


$\therefore \quad 4\theta = 60° \Rightarrow \theta = 15°$

Solución Nº 12

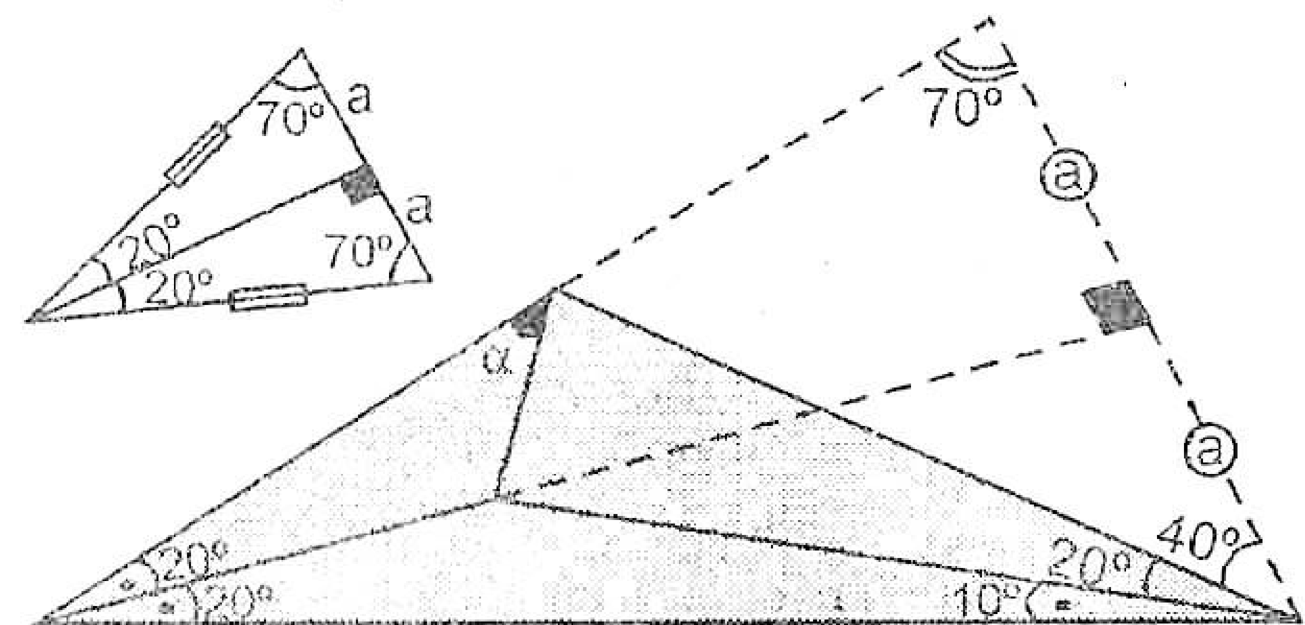
Paso Nº 1

Se observa una bisectriz interna en la figura, entonces construimos en ella un triángulo isósceles.

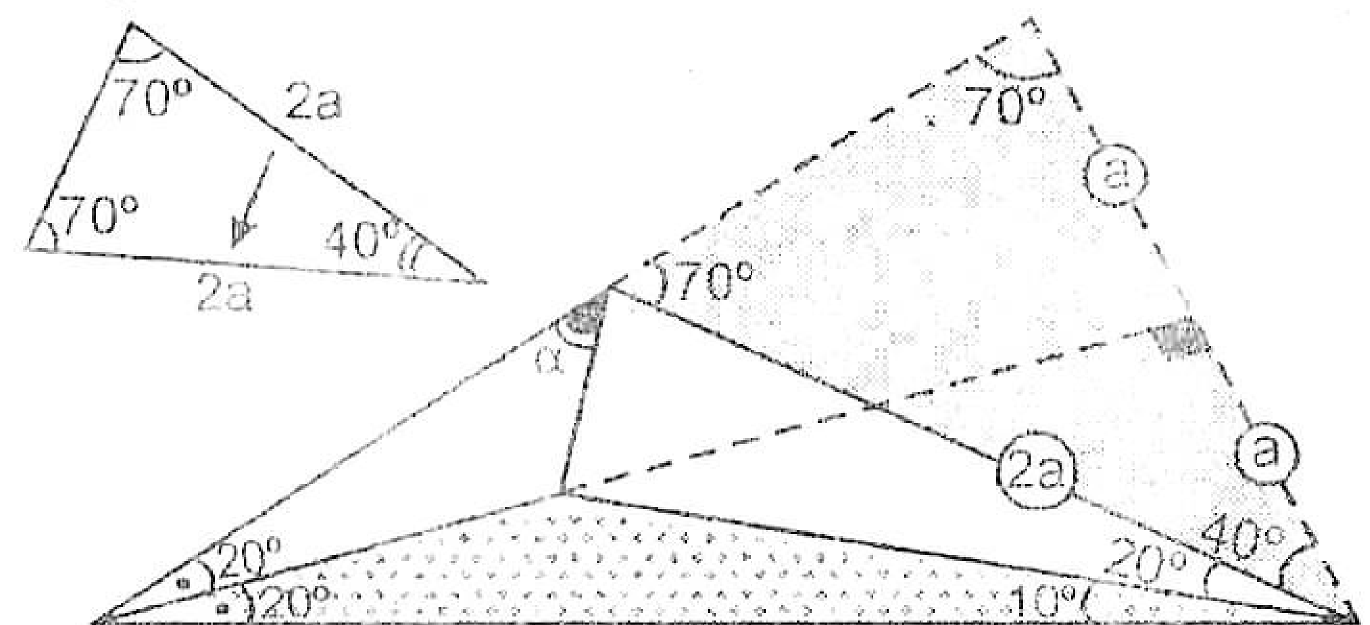


Paso Nº 2

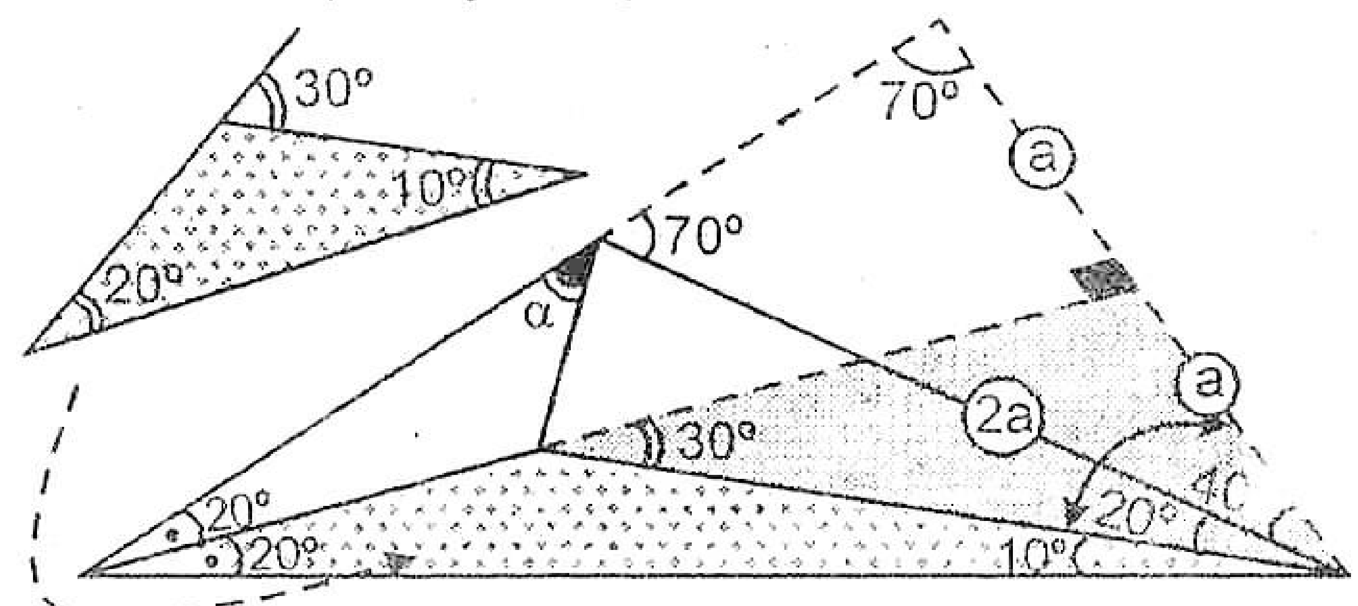
Completamos los ángulos internos en el triángulo formado.

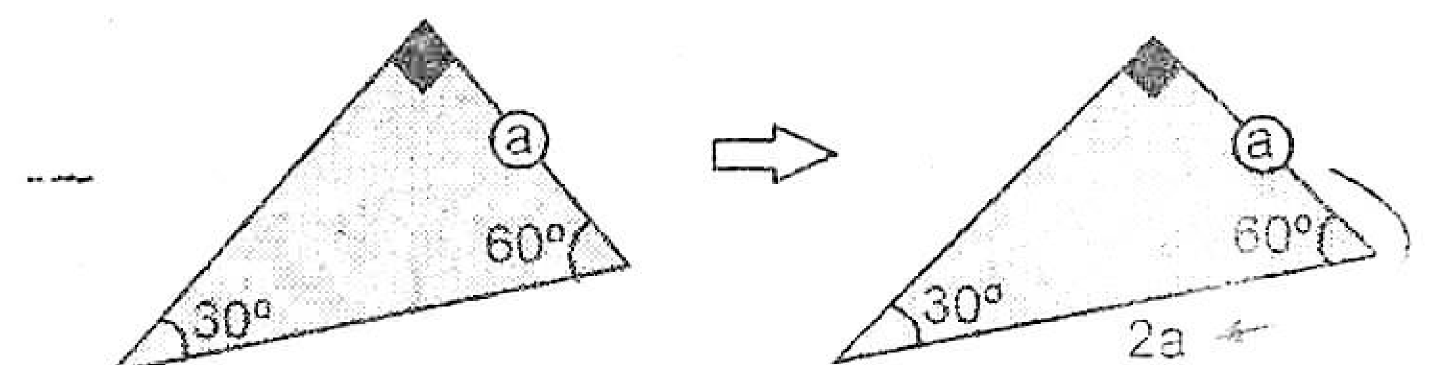


Paso Nº 3: Se observa en la figura un nuevo triángulo isósceles.

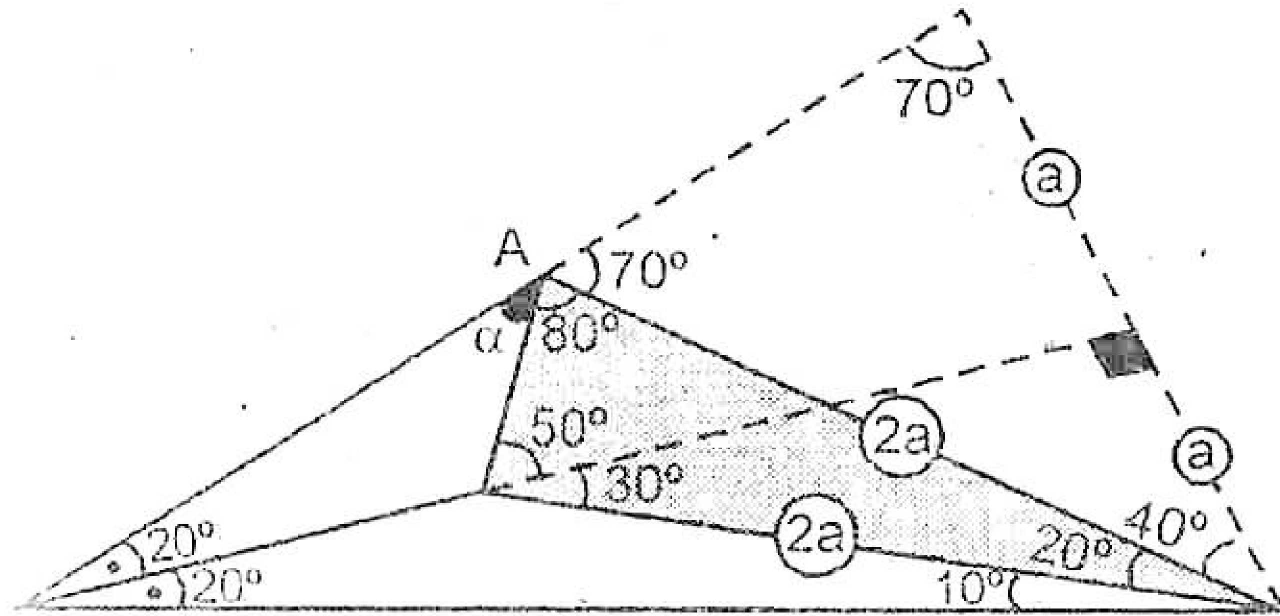


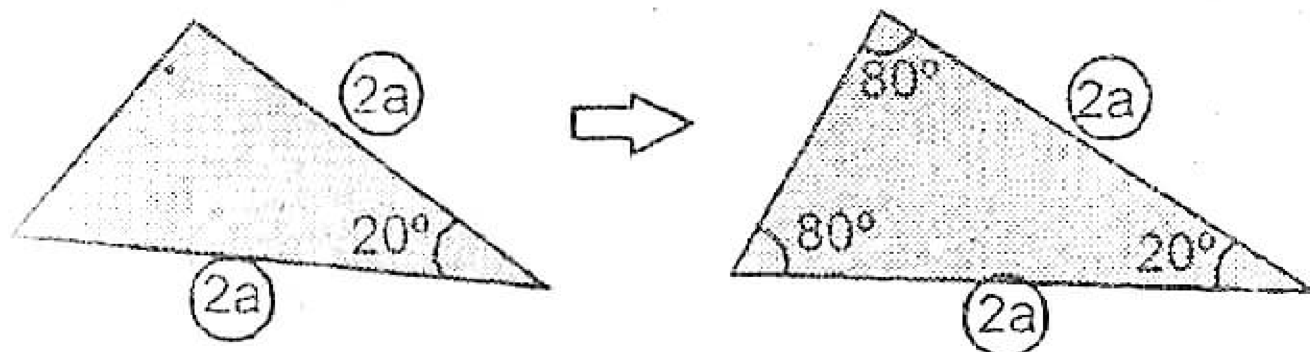
Paso Nº 4: Se observa un triángulo rectángulo notable de (30º y 60º)





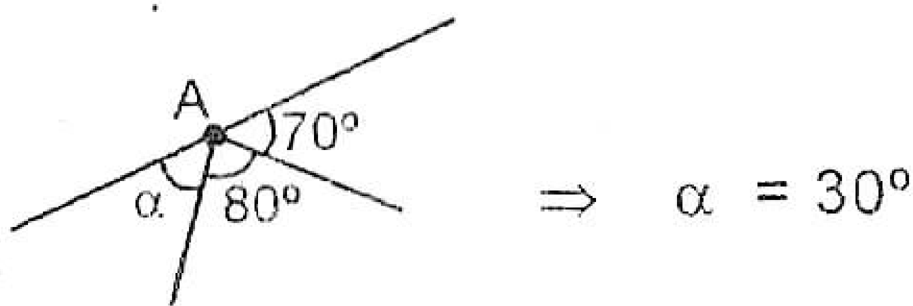
Paso N° 5: Se observa un nuevo triángulo isósceles donde cumple:





Paso N° 6

Ahora observamos un ángulo llano en "A".

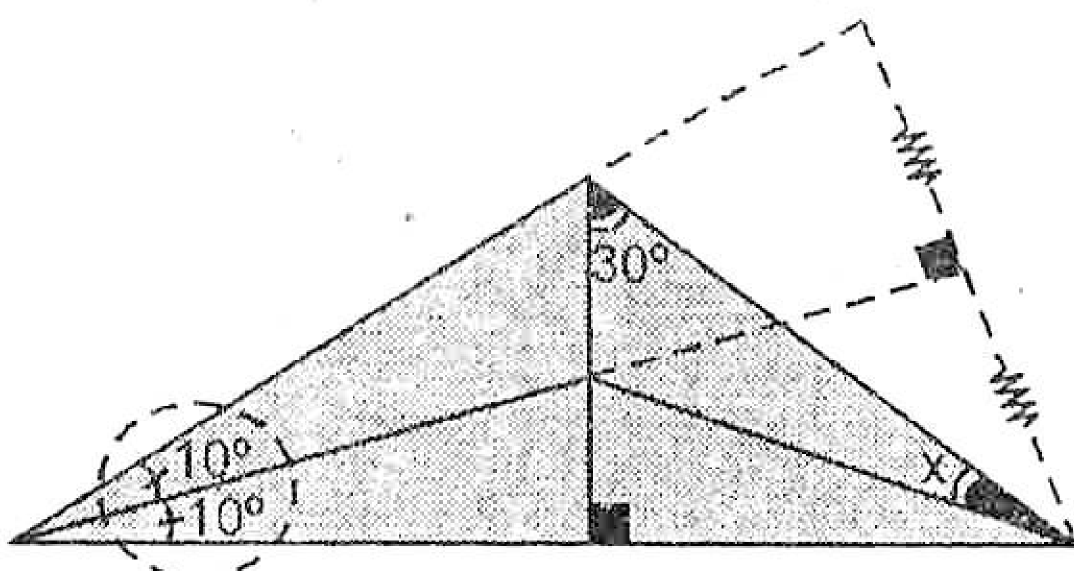


$\Rightarrow \quad \alpha = 30°$

Solución N° 13

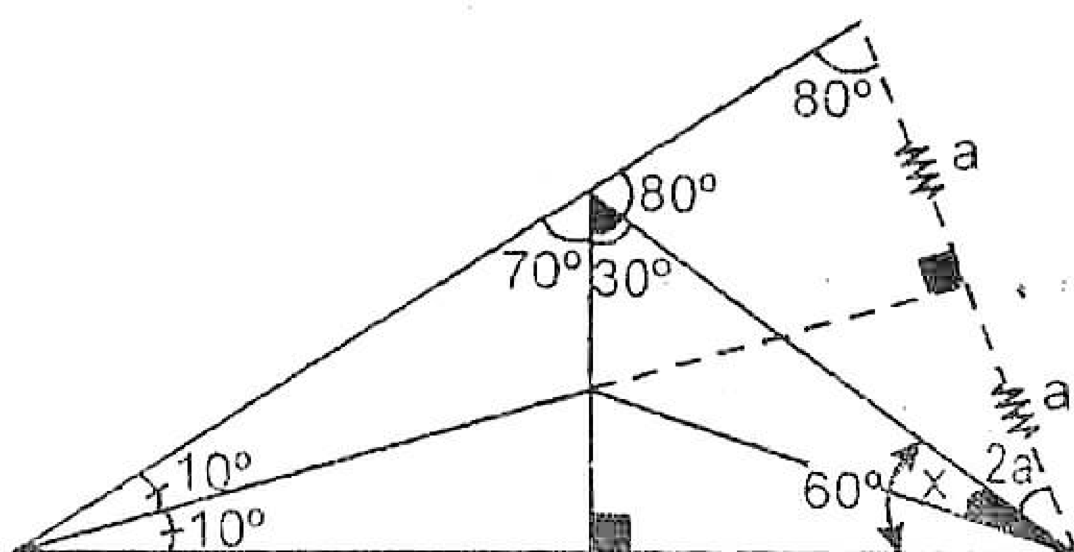
Paso N° 1

Se observa una bisectriz interior entonces construimos exteriormente un triángulo isósceles.



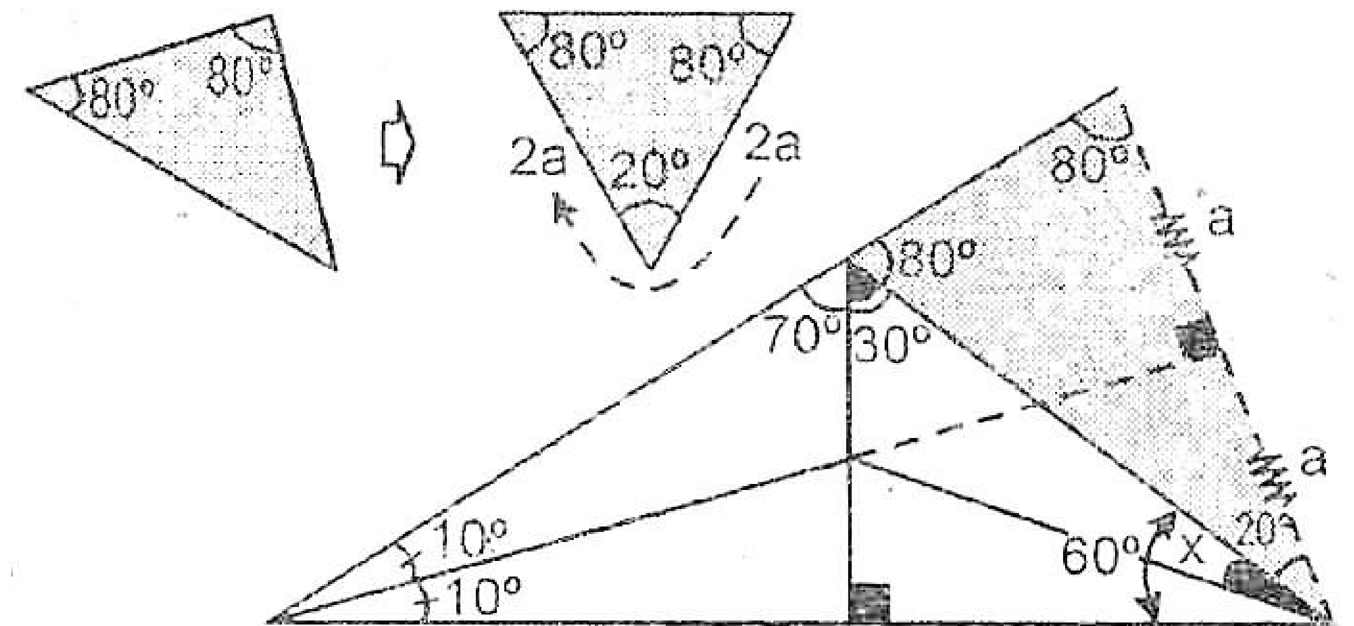
Paso N° 2

Completamos los ángulos internos en la figura obtenida.



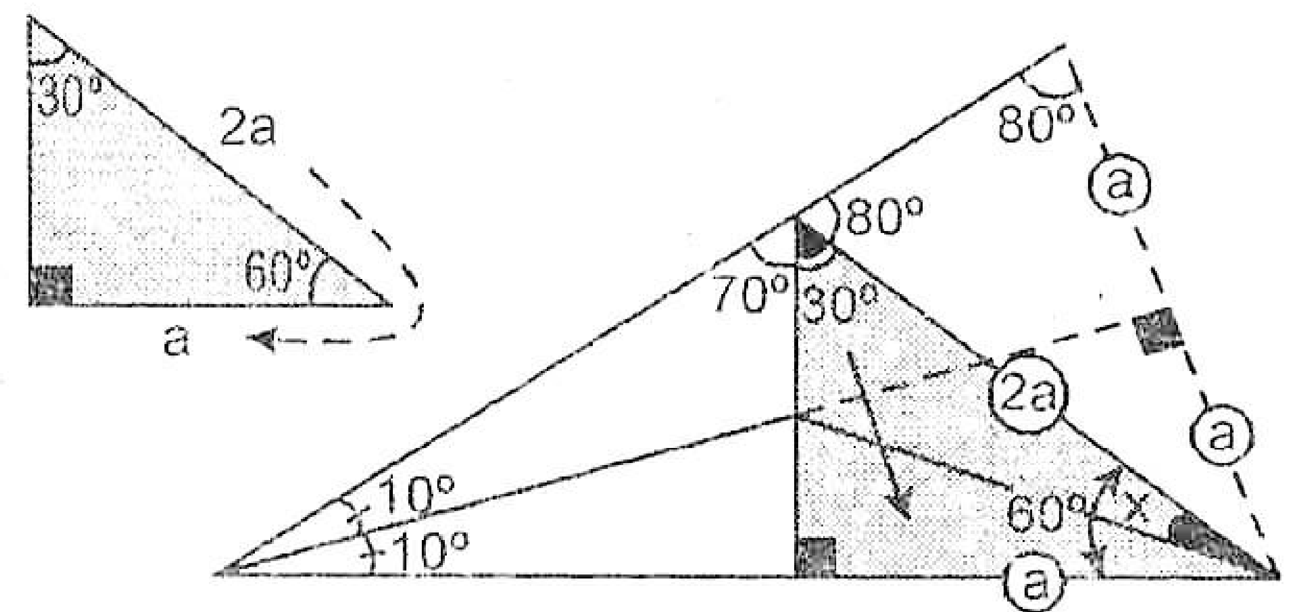
Paso N° 3

Se observa un triángulo isósceles interno al triángulo construido.



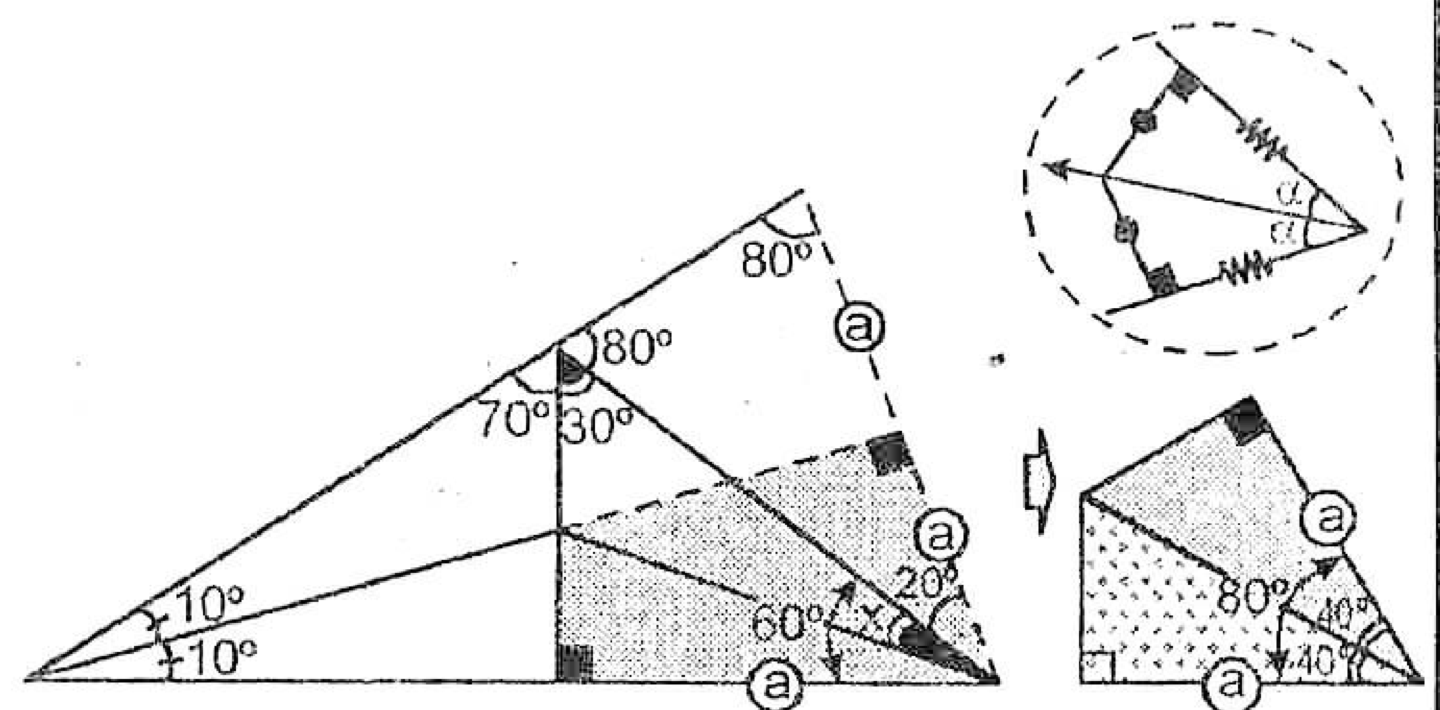
Paso N° 4

Se observa un triángulo rectángulo notable de 30° y 60°



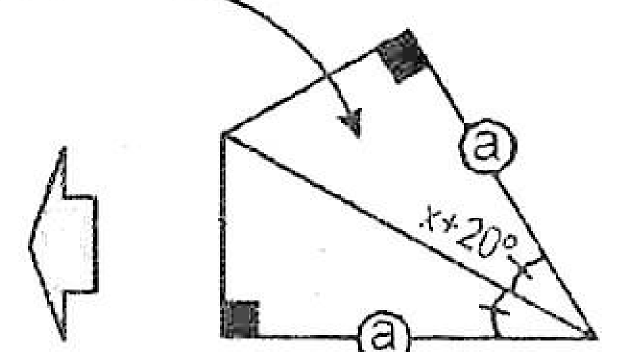
Paso N° 5

Ahora se observa la siguiente figura donde se tiene la propiedad de la bisectriz.



Se cumple

Por la propiedad



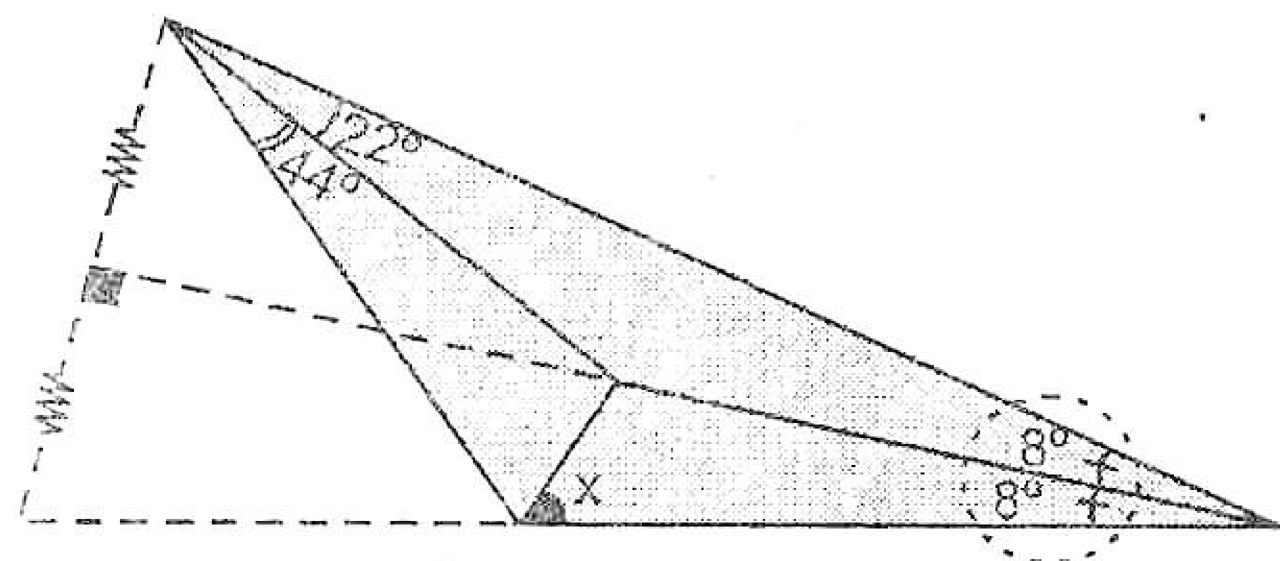
$\therefore \; x + 20° = 40°$

$x = 20°$

Solución Nº 14

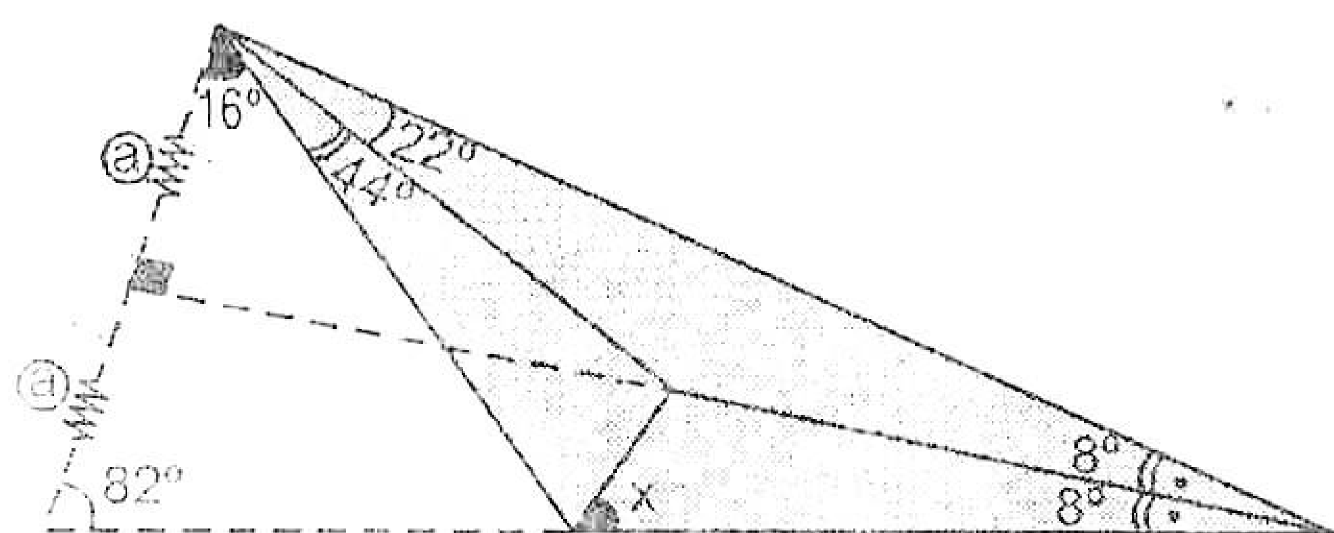
Paso Nº 1

Se observa una bisectriz interior entonces construimos un triángulo isósceles exteriormente.



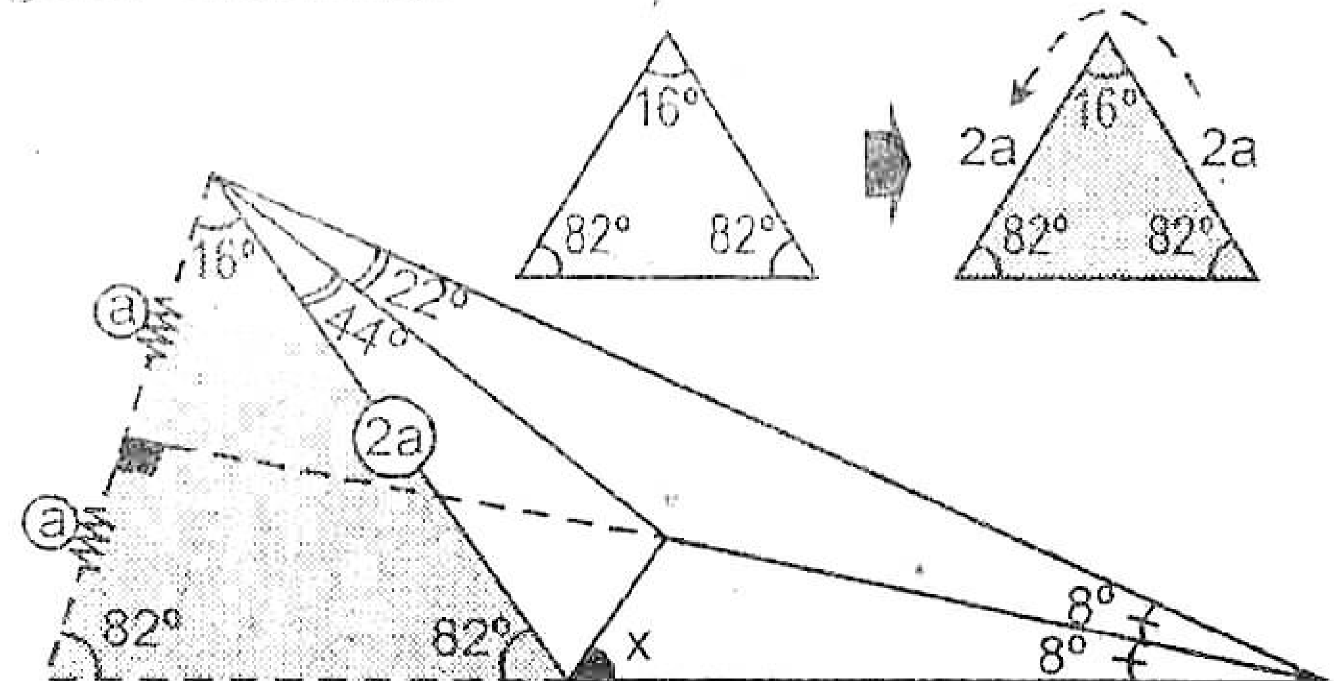
Paso Nº 2

Completamos los ángulos internos en la figura obtenida.



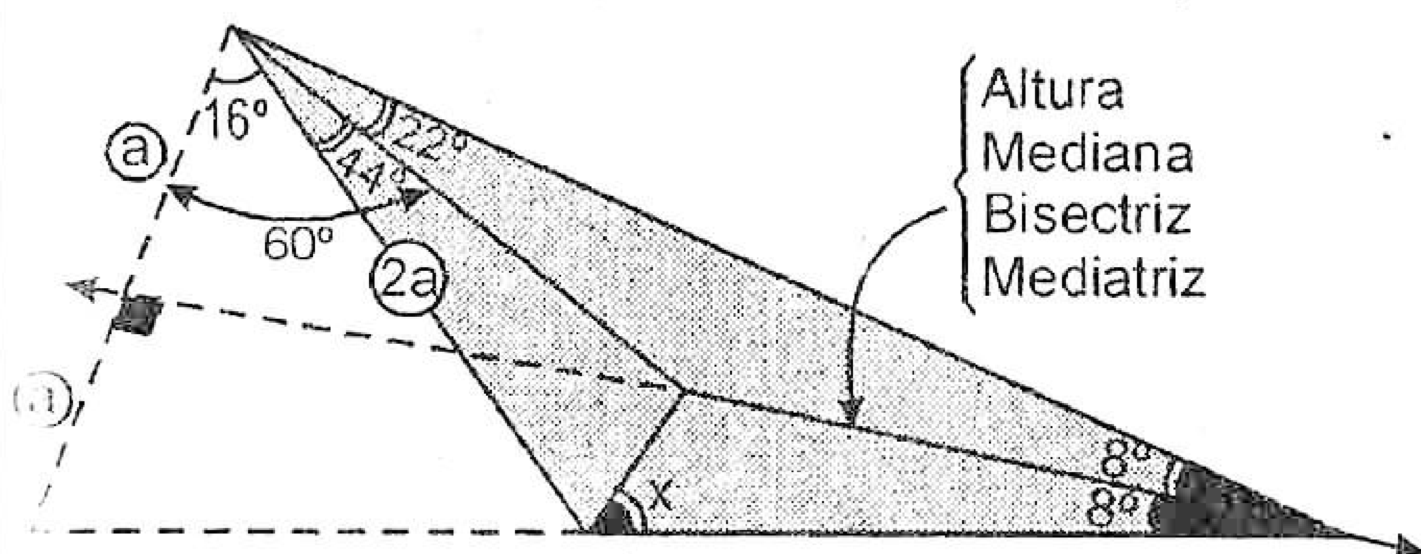
Paso Nº 3

Se observa un triángulo isósceles interior a la figura obtenida.

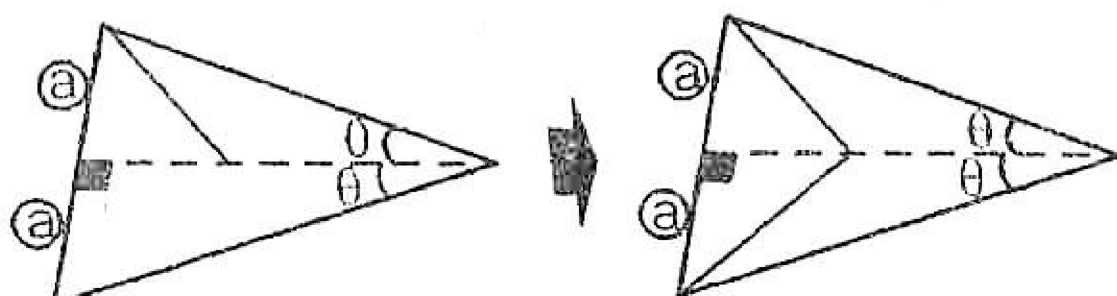


Paso Nº 4

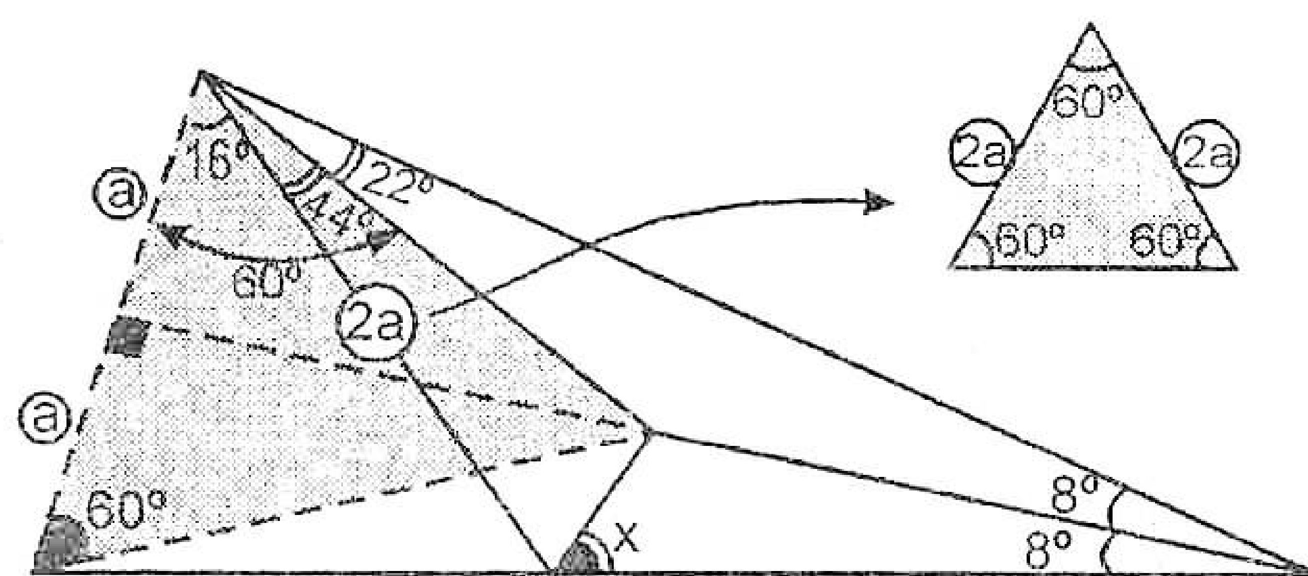
Se observa en la figura donde se cumple:



Donde se cumple:

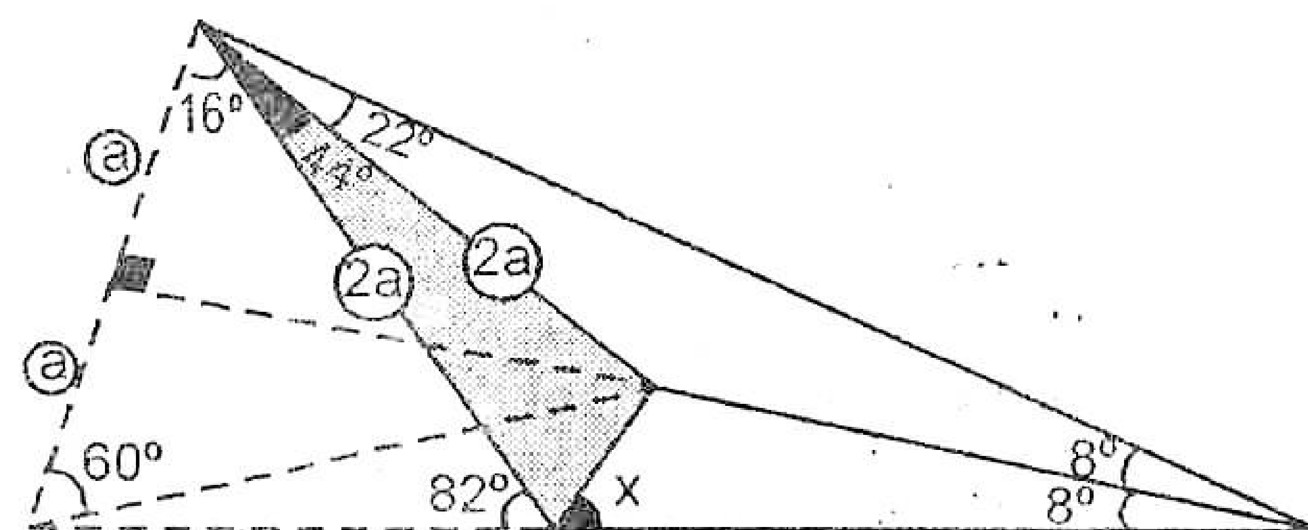


Paso Nº 5: En la figura sombreada también se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



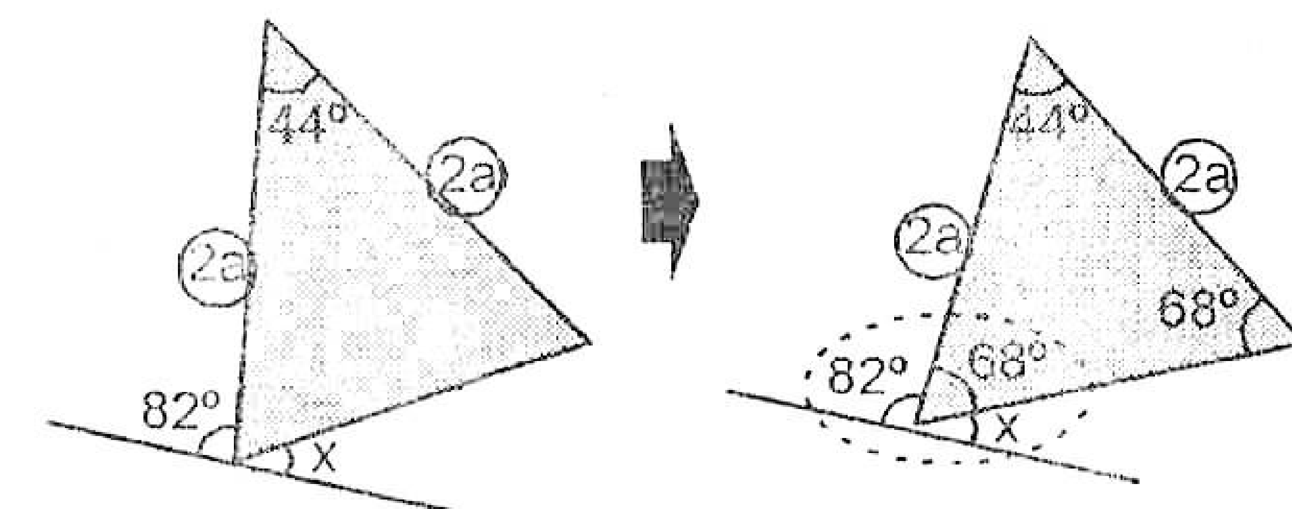
Paso Nº 6

Luego se obtiene un nuevo triángulo isósceles interno a la figura



Paso Nº 7

En la figura sombreada se observa:



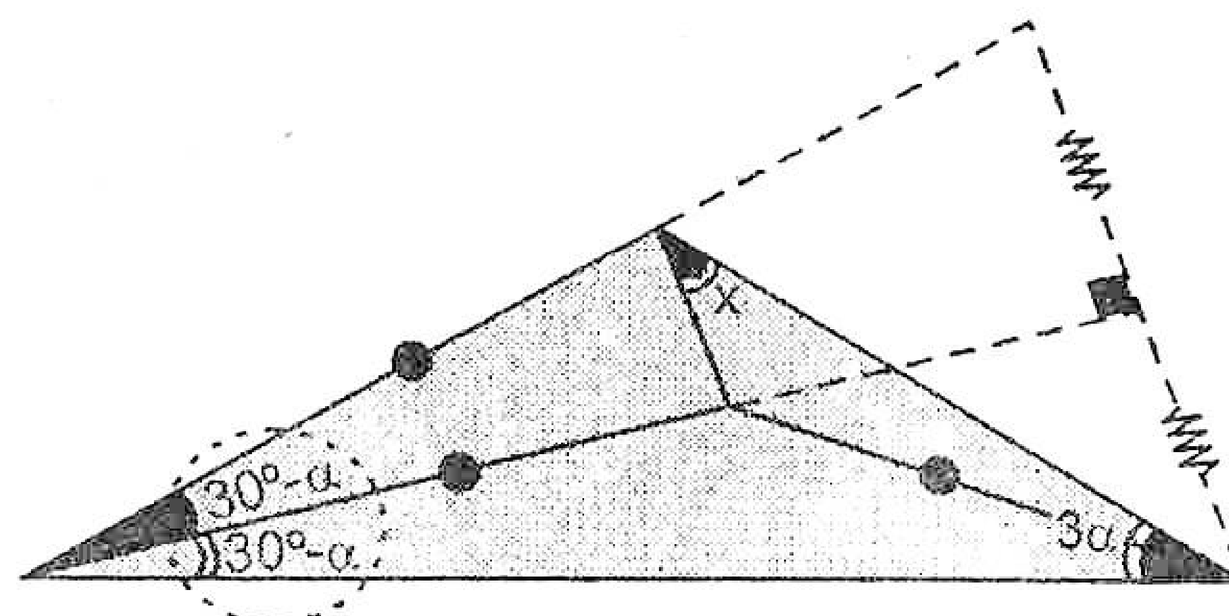
∴ En el ángulo llano obtenemos:

82° 68° x ⇒ x = 30°

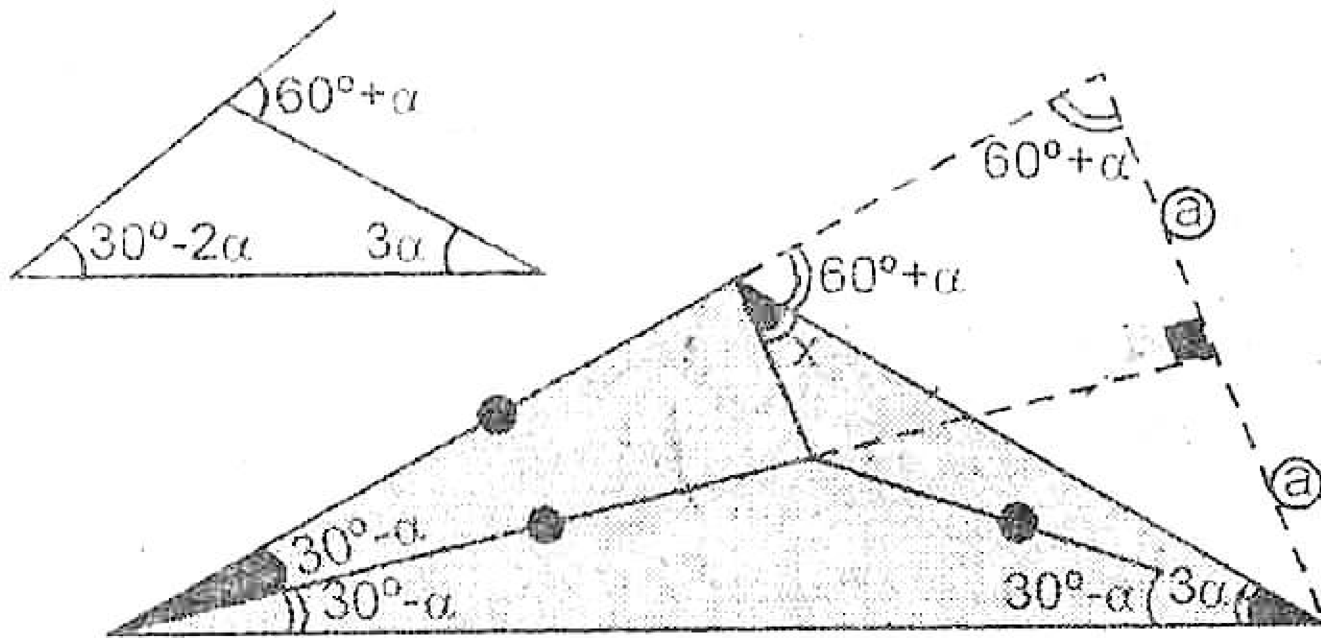
Solución Nº 15

Paso Nº 1

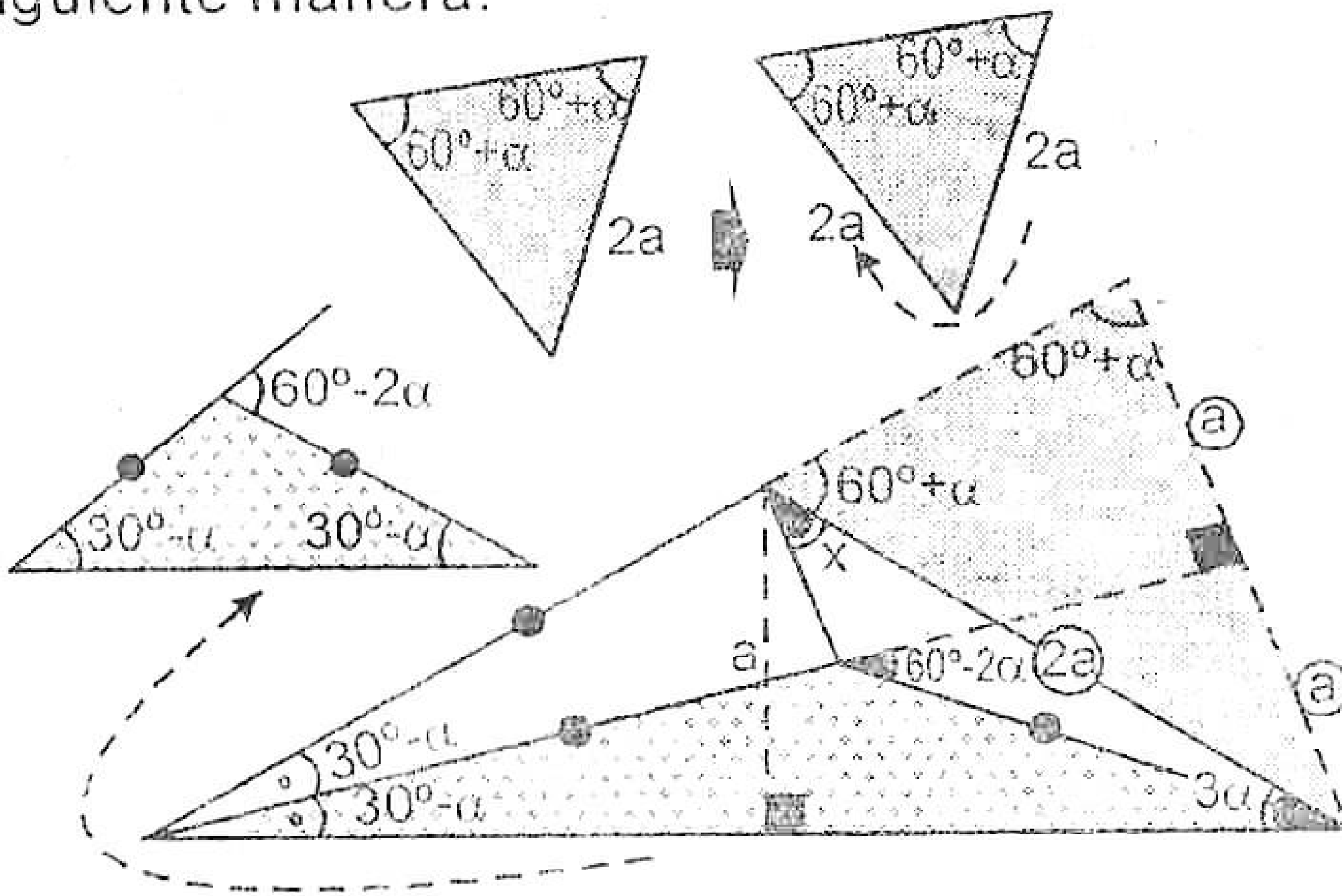
Se observa una bisectriz interior y se traza un triángulo isósceles externamente.



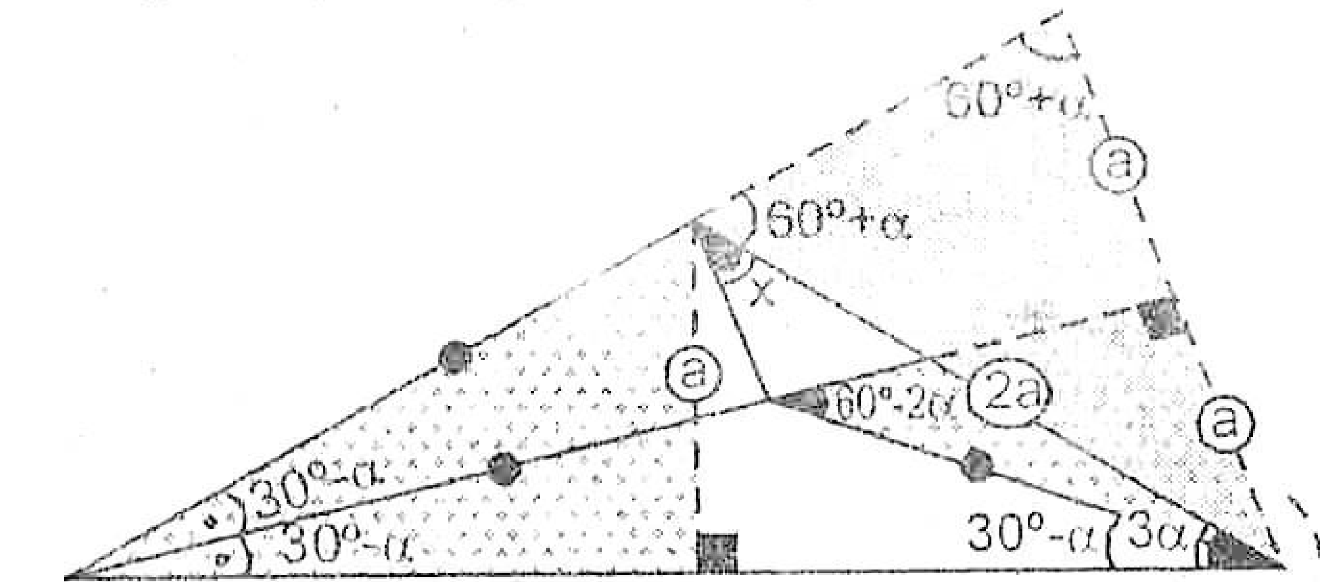
Paso N° 2
Completamos ángulos internos en la figura.



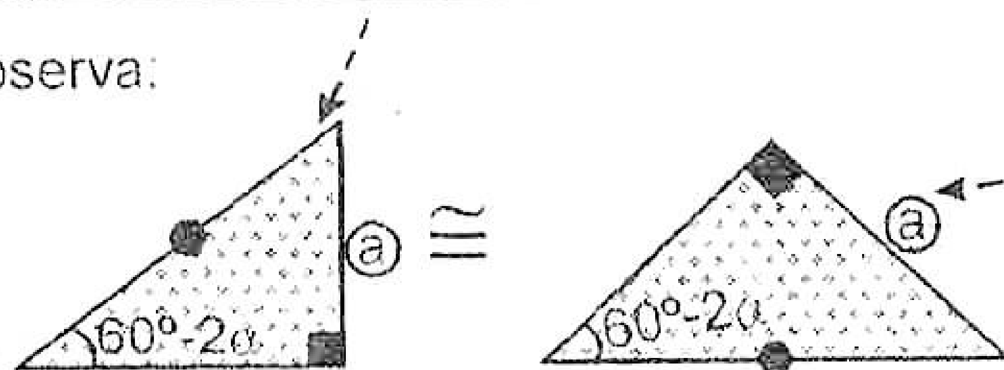
Paso N° 3
Se observa un triángulo isósceles de la siguiente manera.



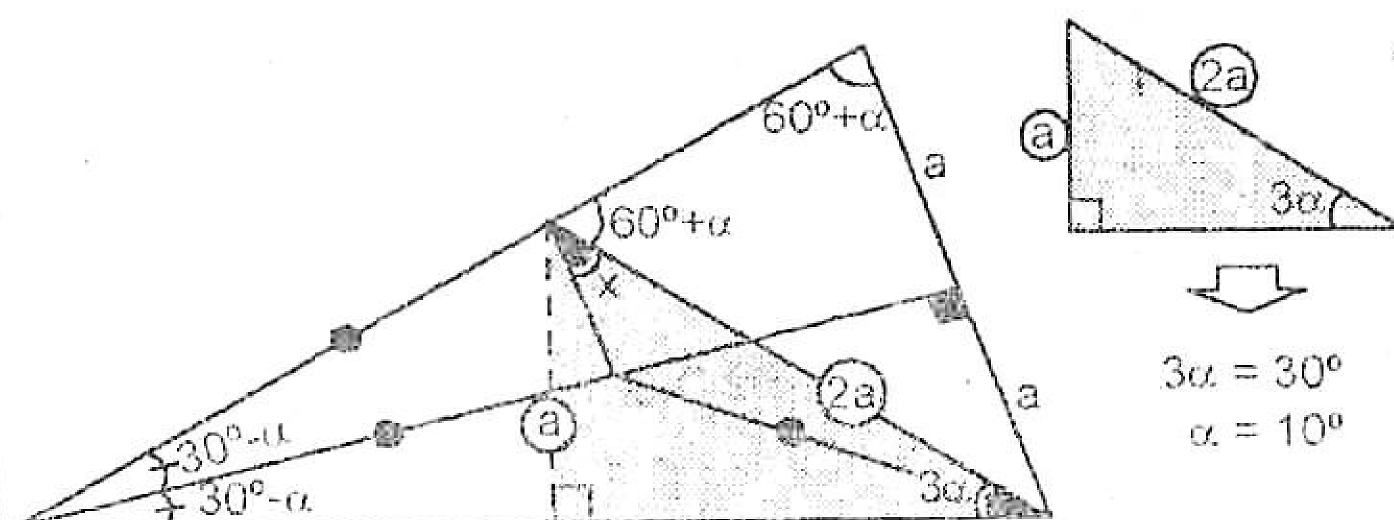
Paso N° 4
Hacemos el siguiente trazo, para encontrar rectángulos, triángulos congruentes.



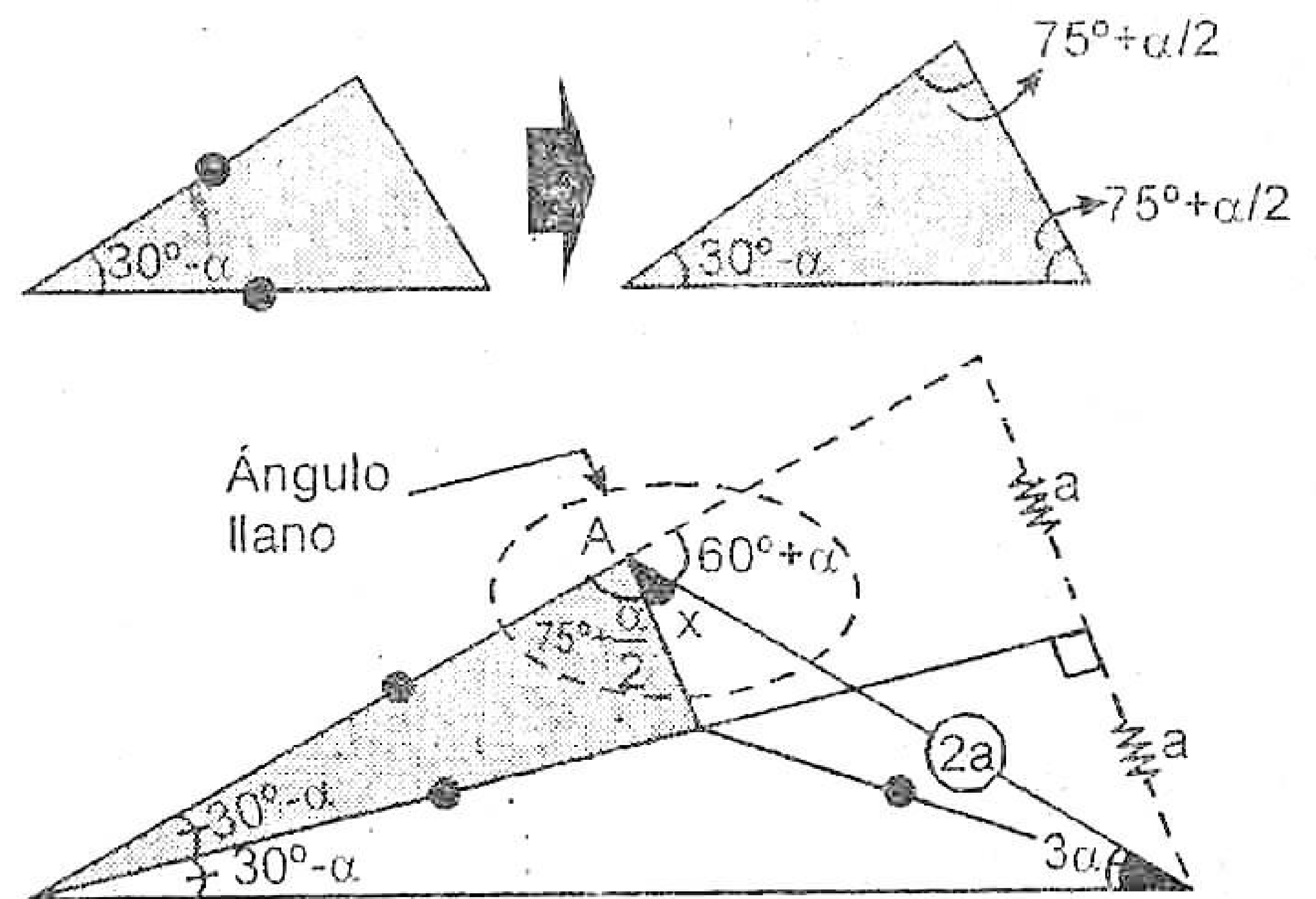
Se observa:



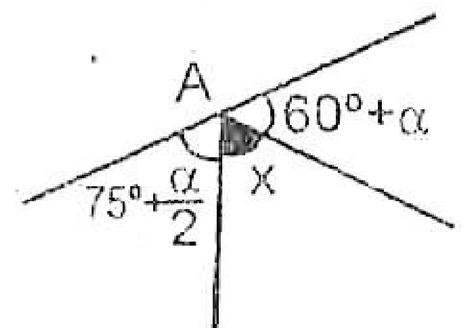
Paso N° 5: Se observa un triángulo rectángulo notable de 30° y 60° en la figura sombreada donde se cumple:



Paso N° 6: Finalmente tenemos la figura, sombreada y se obtiene las siguientes relaciones.



$$75° + \frac{\alpha}{2} + x + 60° + \alpha = 180°$$



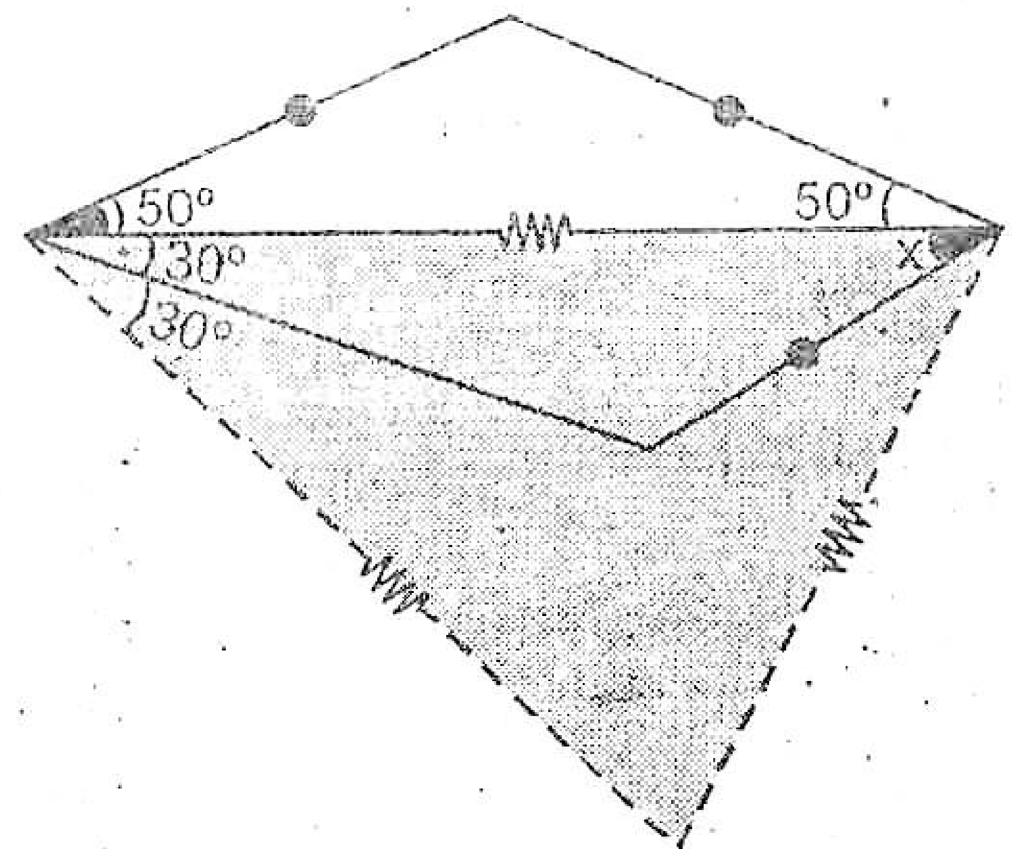
$$\frac{3\alpha}{2} + x = 45°$$

Pero: $\alpha = 10°$

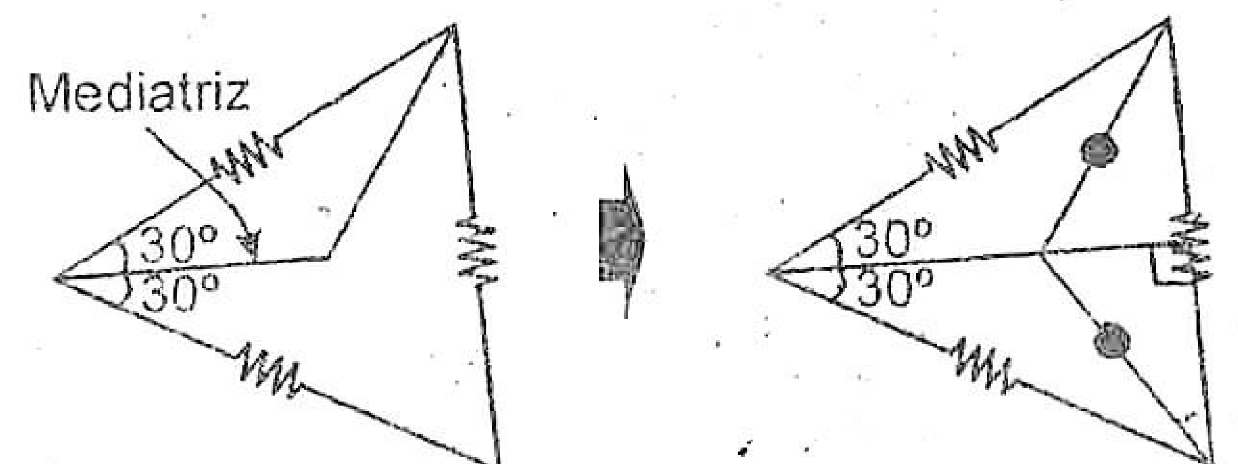
$\Rightarrow$ $x = 30°$

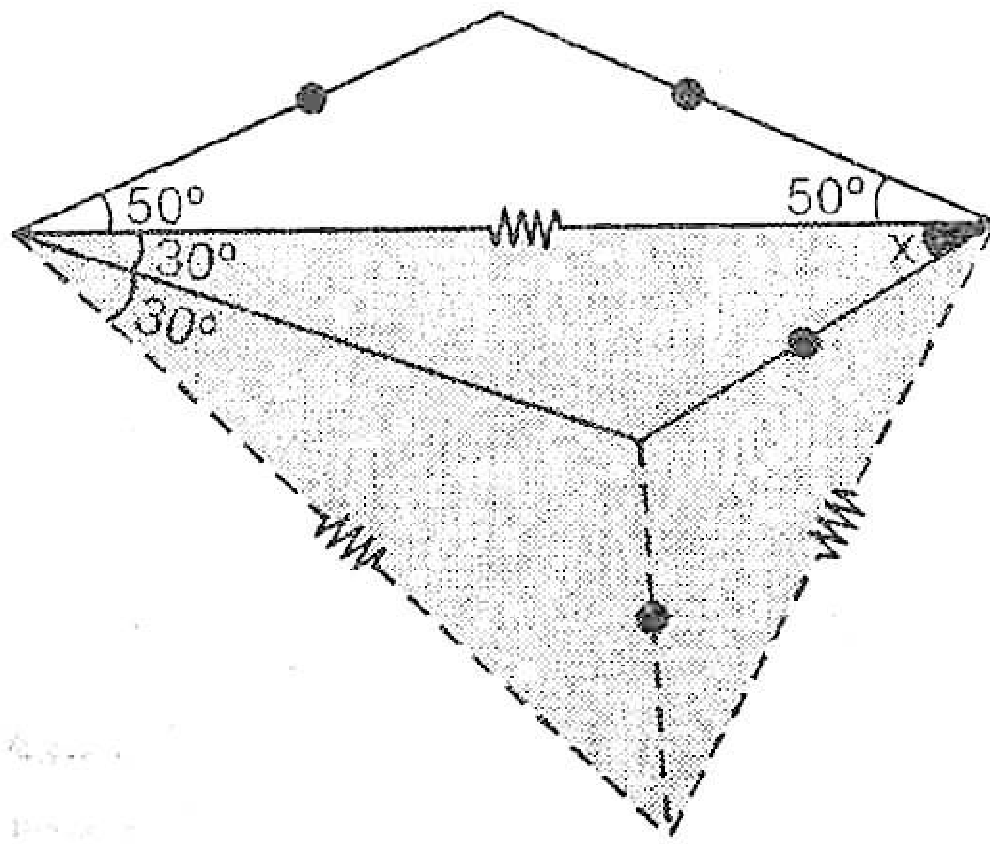
Solución N° 16

Paso N° 1
Se observa en la figura un ángulo de 30°, entonces formamos un triángulo equilátero exteriormente (tercer criterio de construcción)

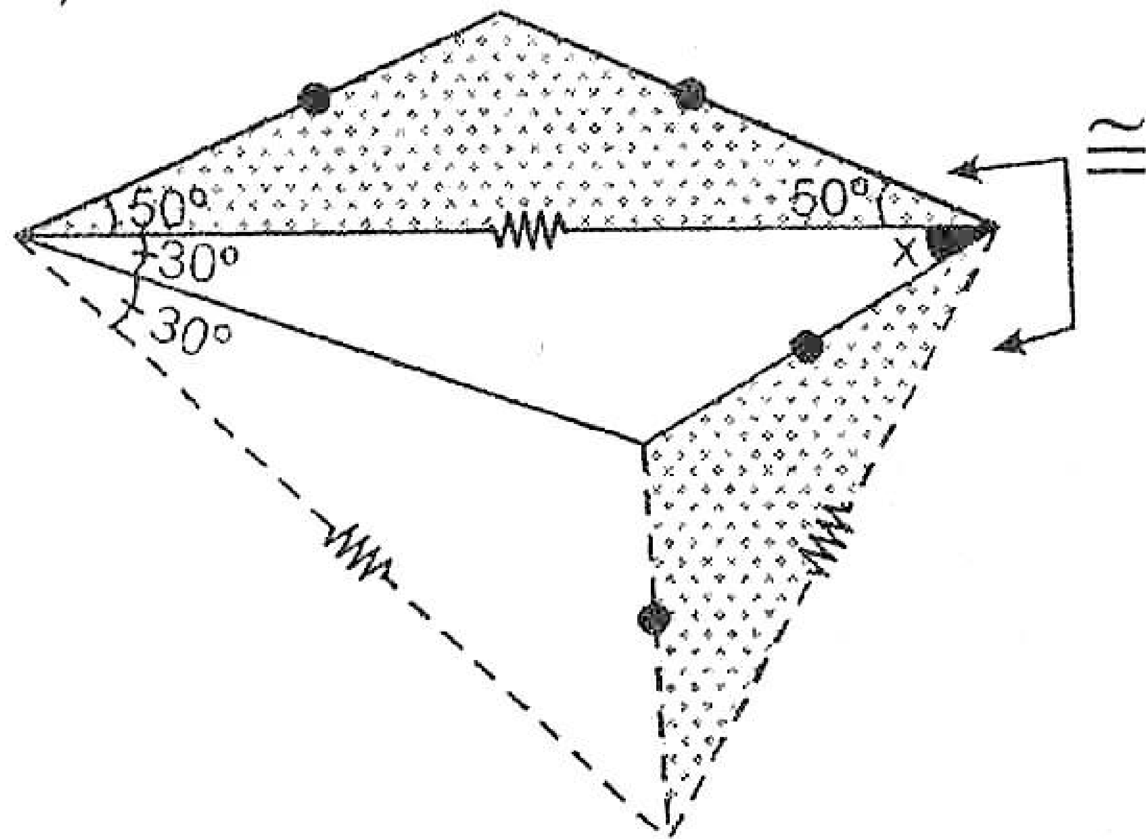


Paso N° 2
En el triángulo equilátero formado, se cumple:

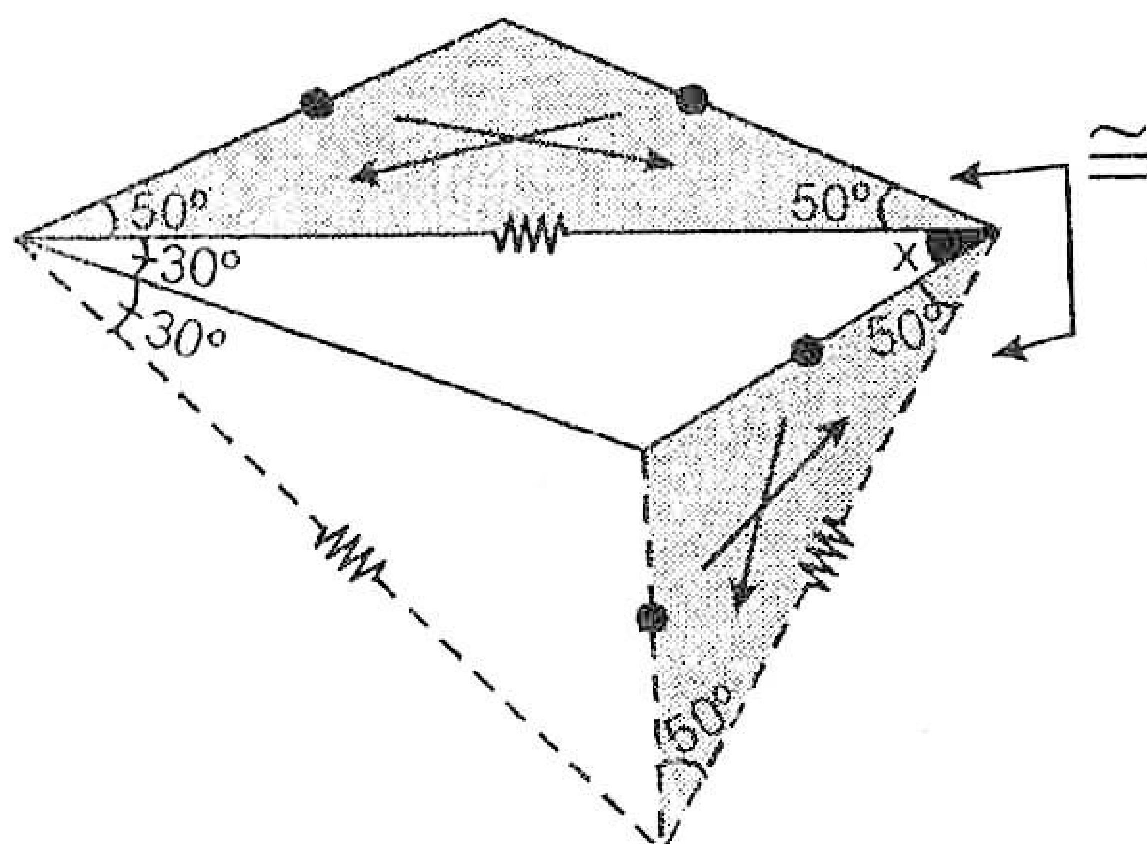




Paso N° 3
Se observa dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



Paso N° 4
Aplicando el principio de congruencia: "A ángulos iguales se oponen lados iguales".



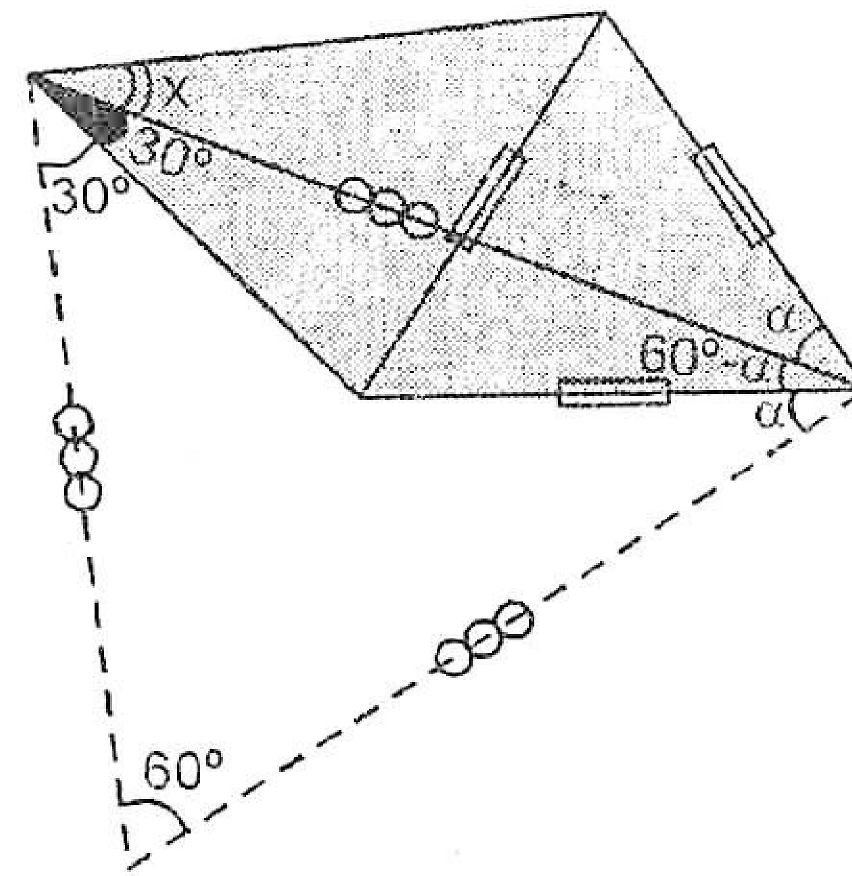
Luego la figura se cumple:

$$\therefore\ x + 50° = 60°$$

$$x = 10°$$

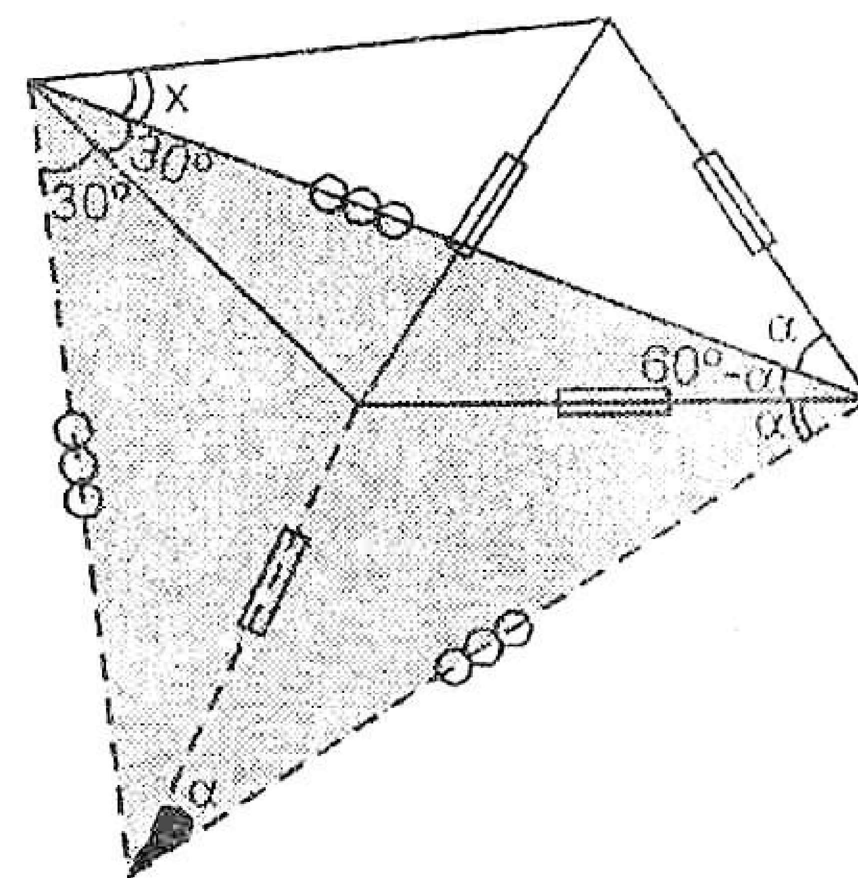
Solución N° 17

Paso N° 1
Se observa en la figura un ángulo de 30° entonces se forma un triángulo equilátero, externamente.

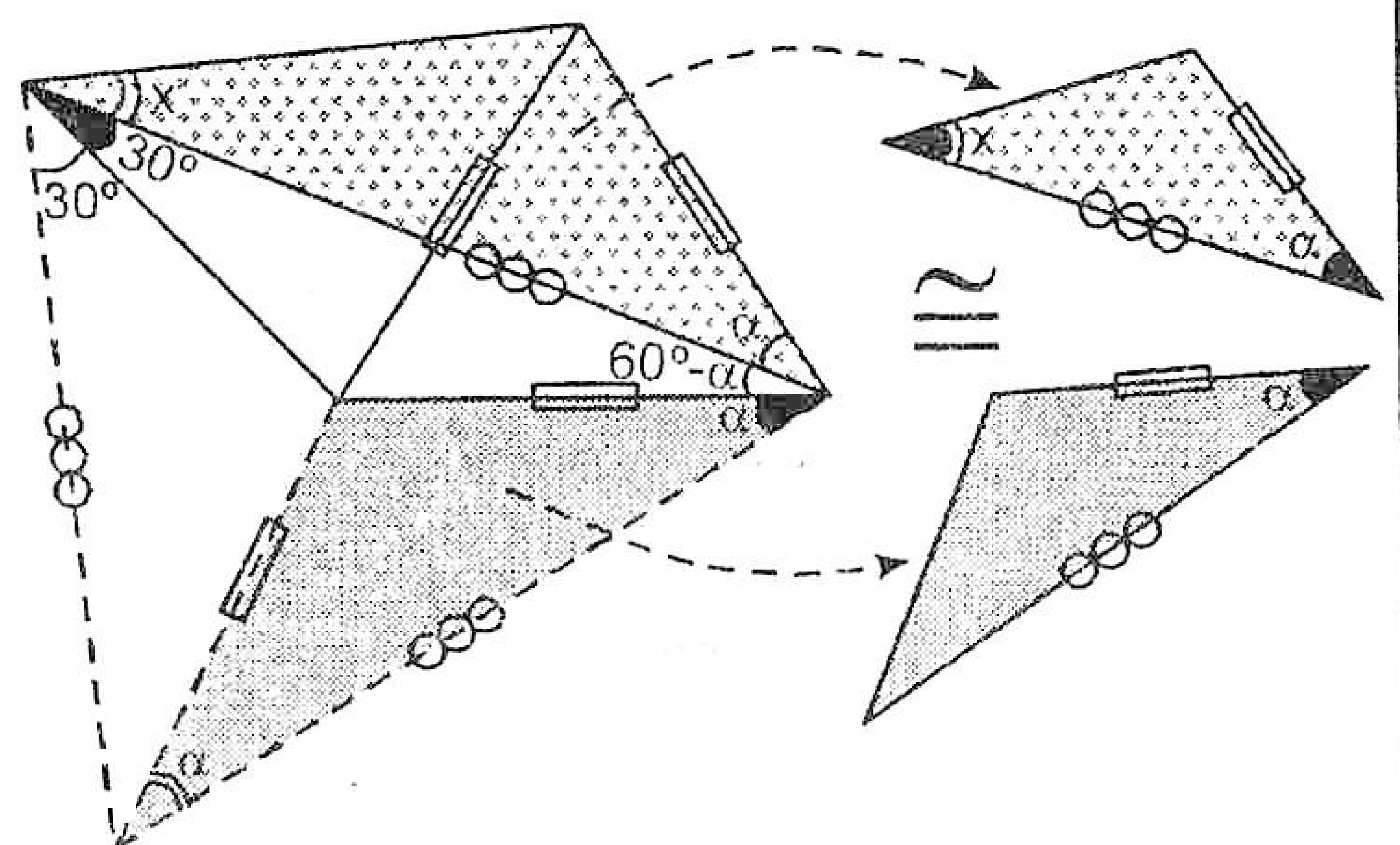


Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:

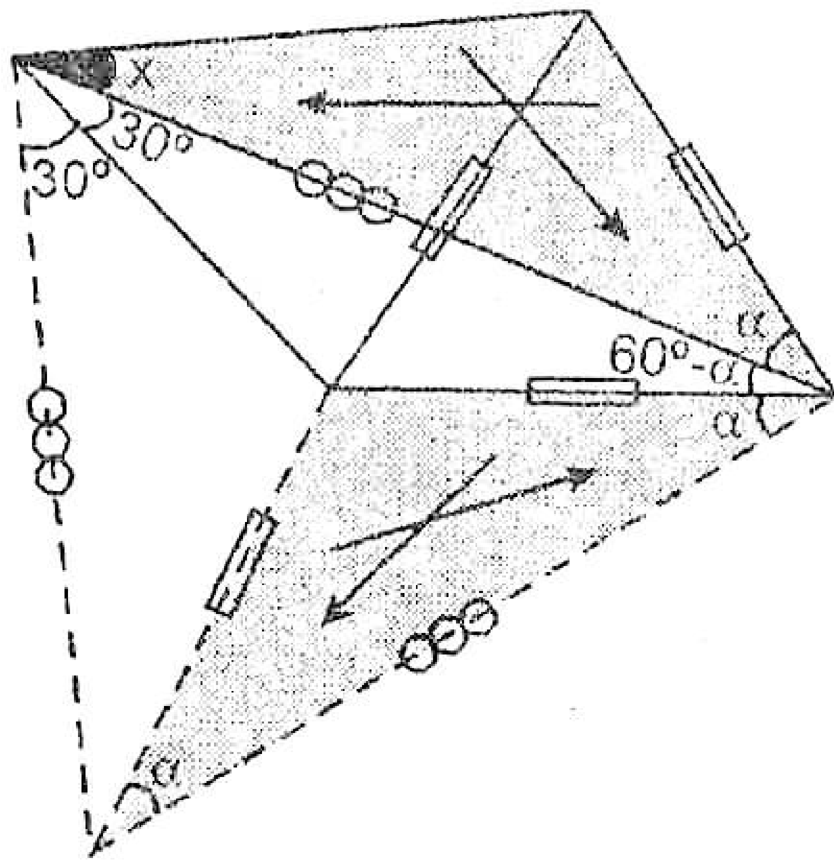




Paso N° 3: Con el trazo realizado se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Paso N° 4
Aplicando el principio de congruencia: "A ángulos iguales se oponen lados iguales".

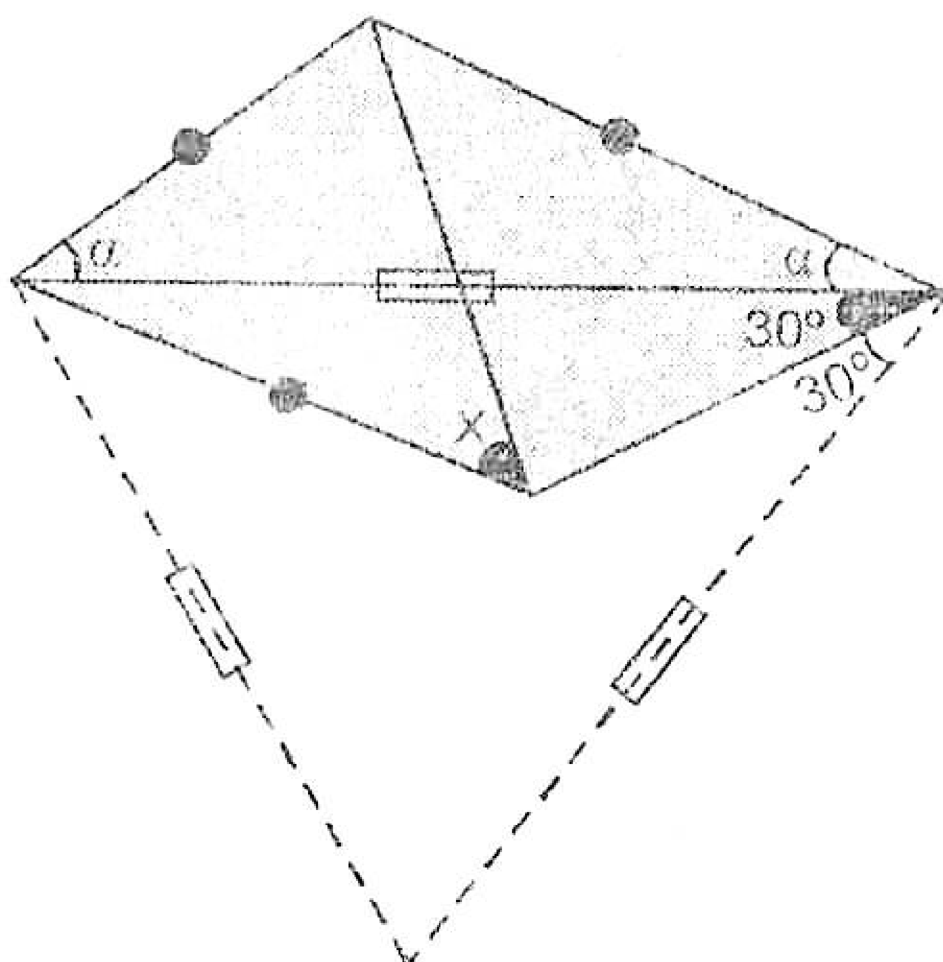


∴ de la figura se cumple:

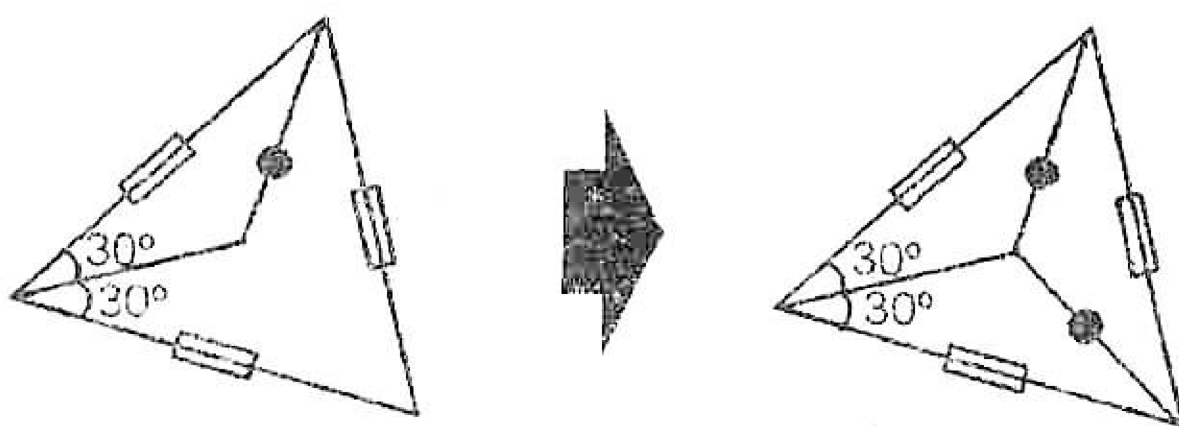
$x = \alpha$

Solución N° 18

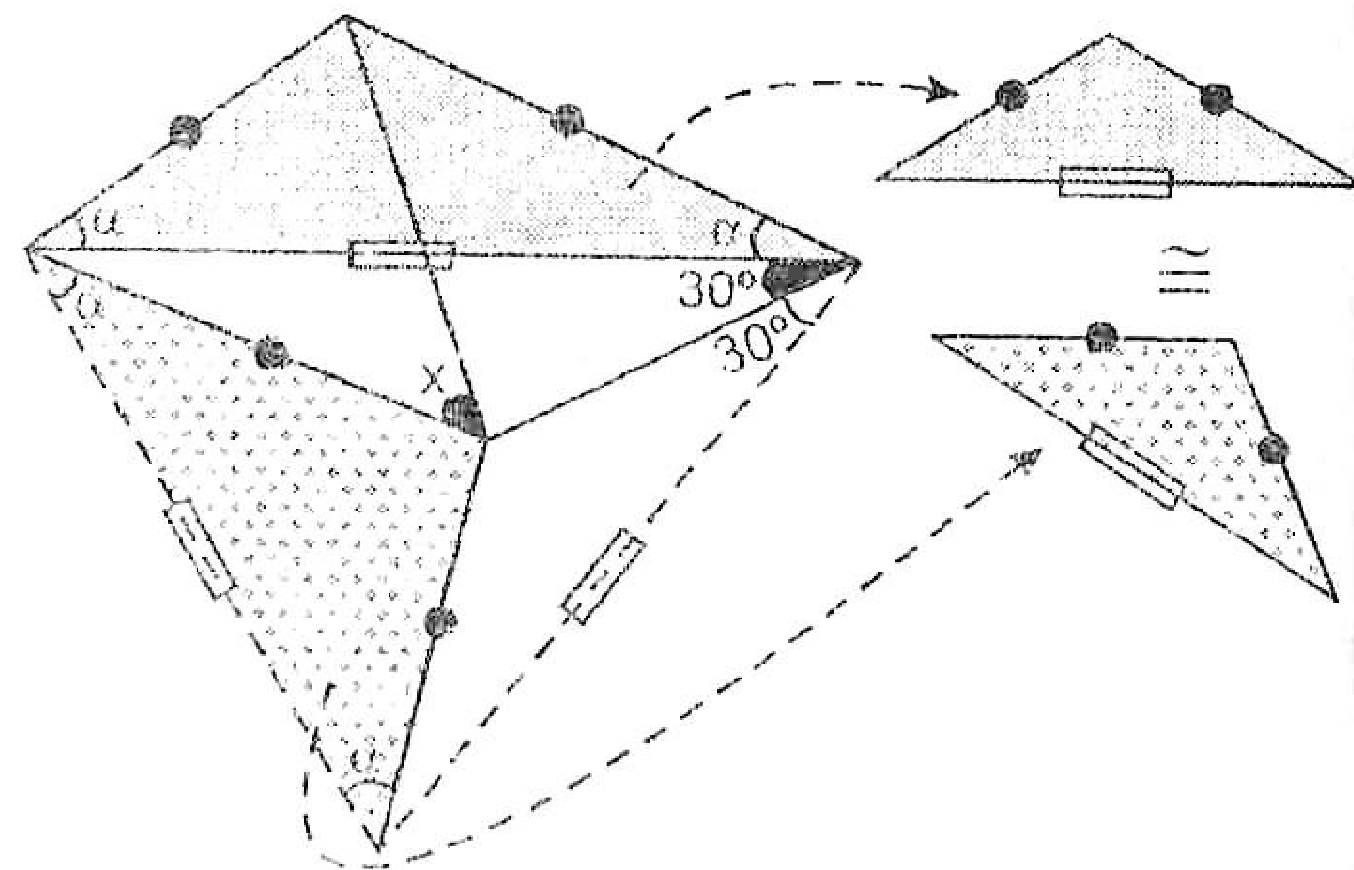
Paso N° 1
Se observa en la figura un ángulo de 30° entonces se forma un triángulo equilátero, externamente (tercer criterio de construcción)



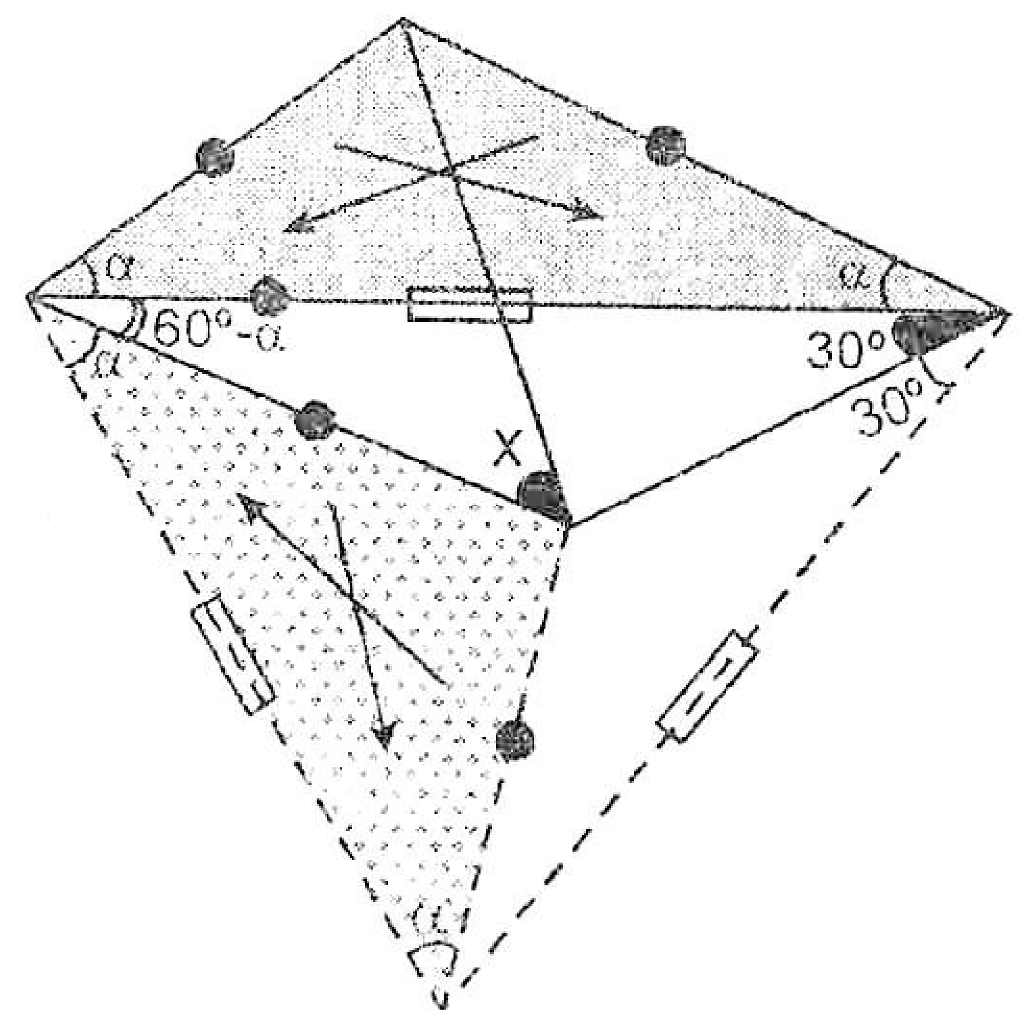
Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



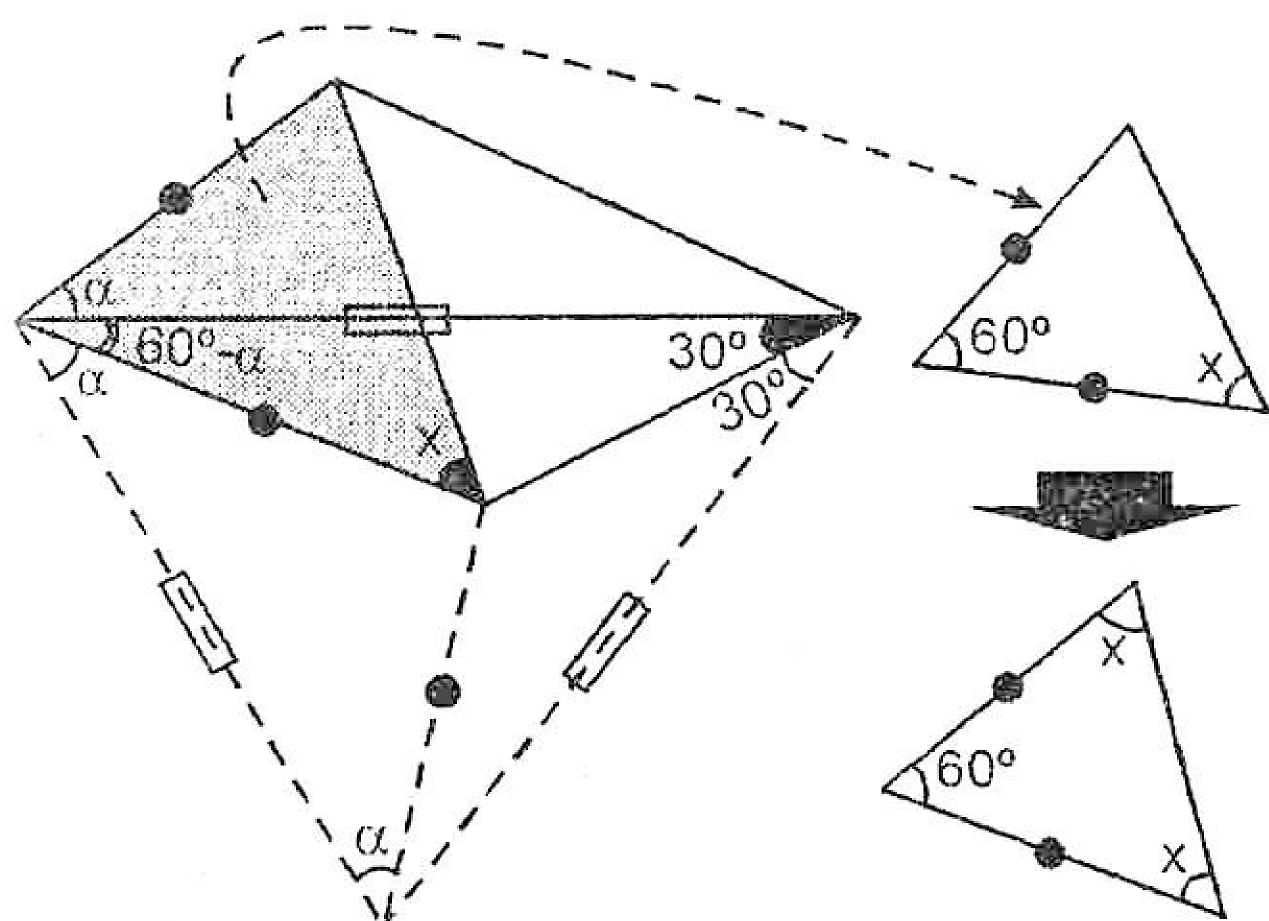
Paso N° 3: Con el trazo realizado, se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



Paso N° 4: Aplicando el principio de congruencia "A ángulos iguales se oponen lados iguales y viceversa"



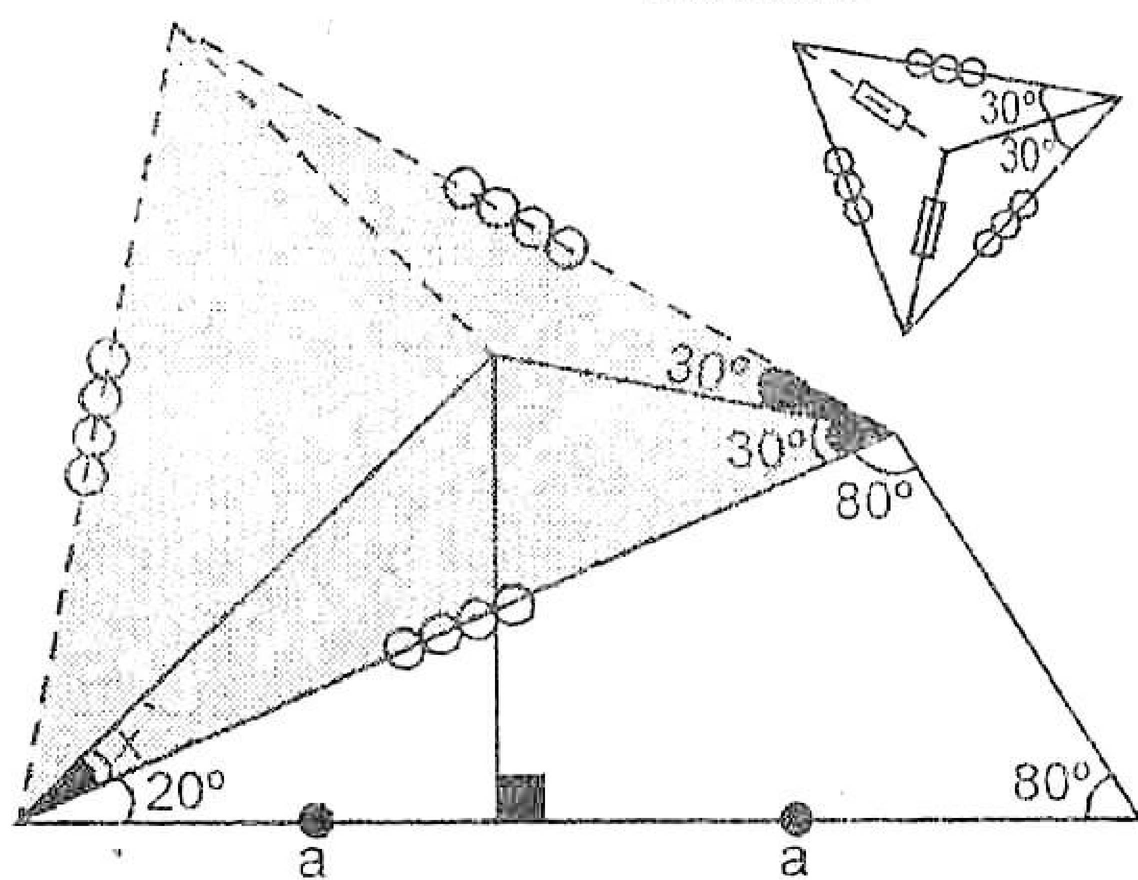
Paso N° 5
Se observa en la figura sombreada un triángulo equilátero donde se cumple:



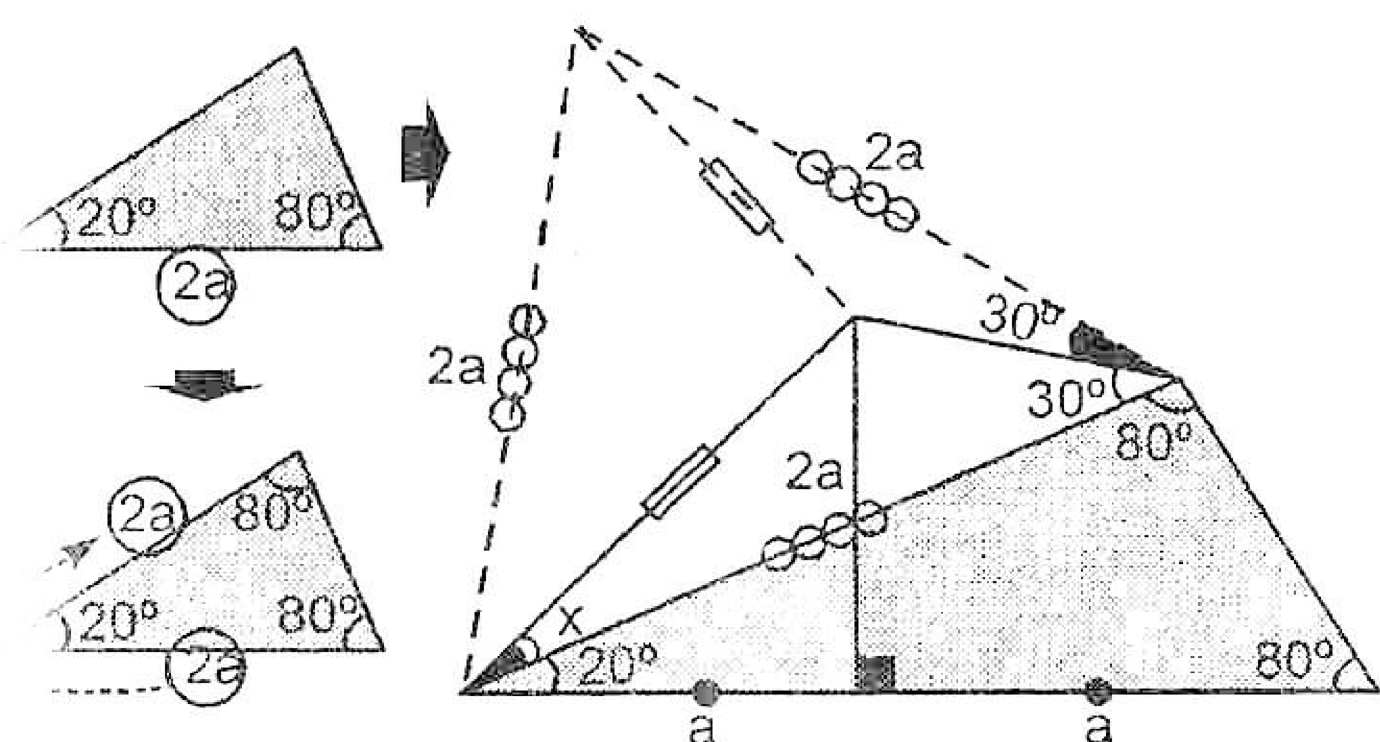
$\therefore\ x = 60°$

Solución N° 19

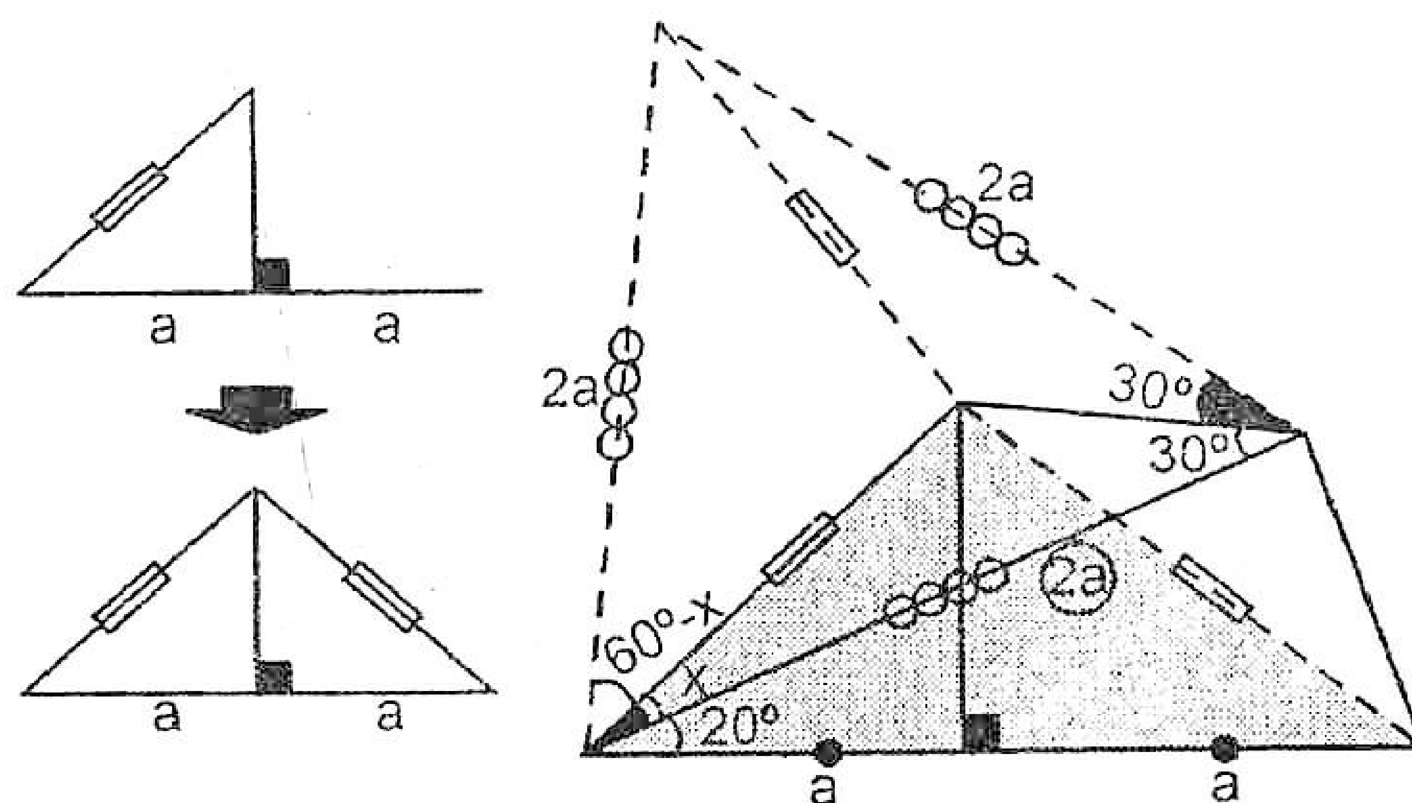
Paso N° 1
Se observa un ángulo de 30° entonces se forma exteriormente un triángulo equilátero.



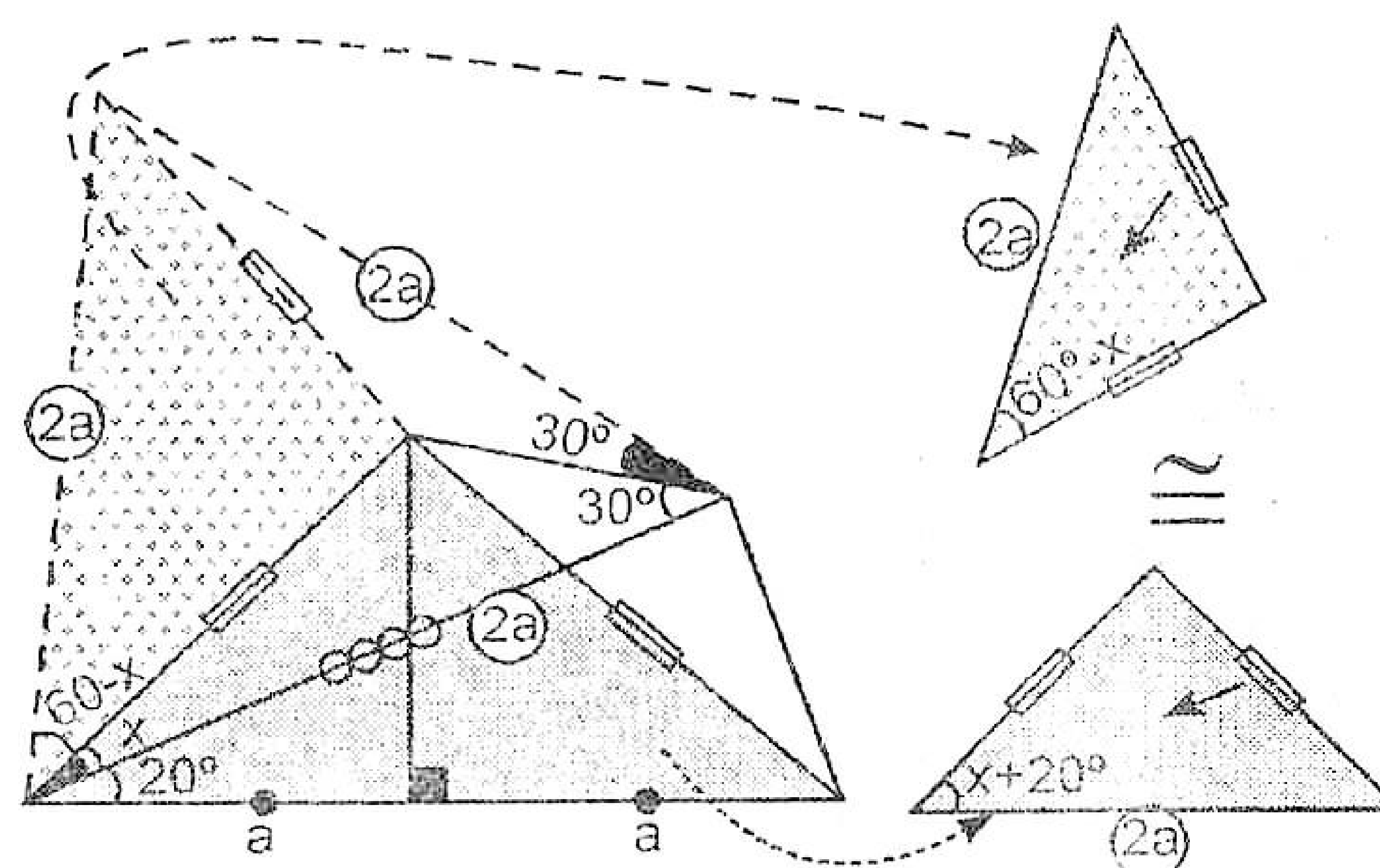
Paso N° 2: En la nueva figura se observa un triángulo isósceles.



Paso N° 3: Se tiene en la figura, una recta mediatriz y se cumple:



Paso N° 4
Se obtiene dos triángulos congruentes; caso: (L.A.L)



Aquí se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

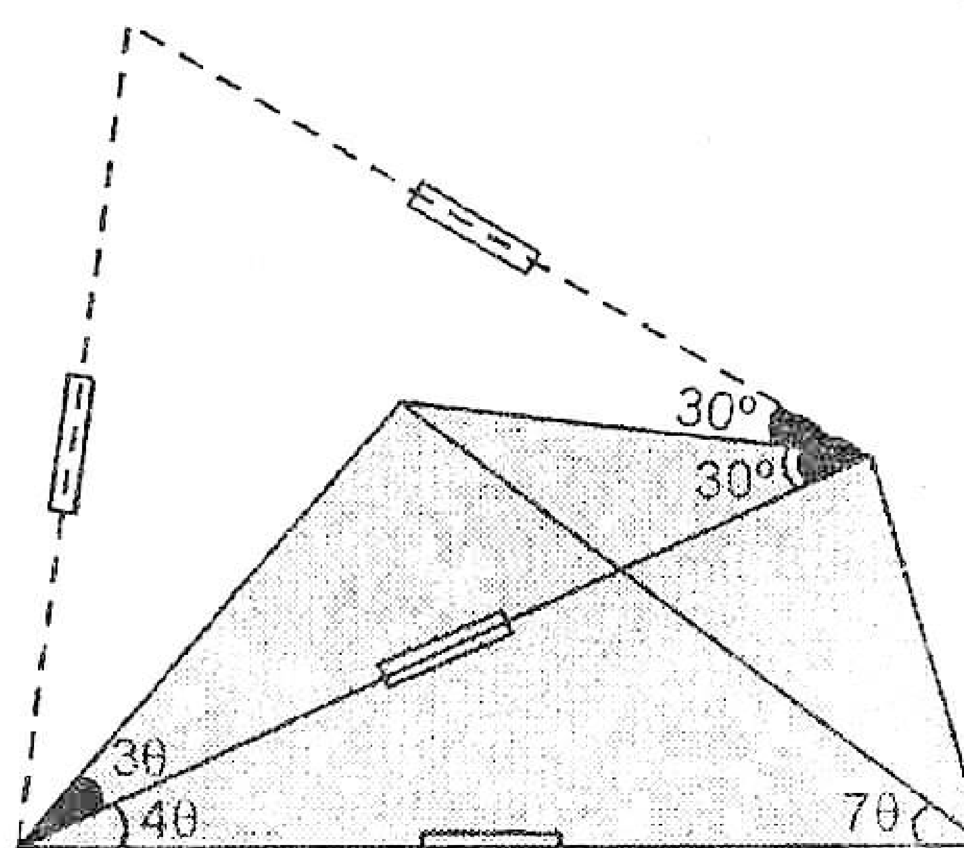
$\therefore\ 60° - x = x + 20°$

$40° = 2x$

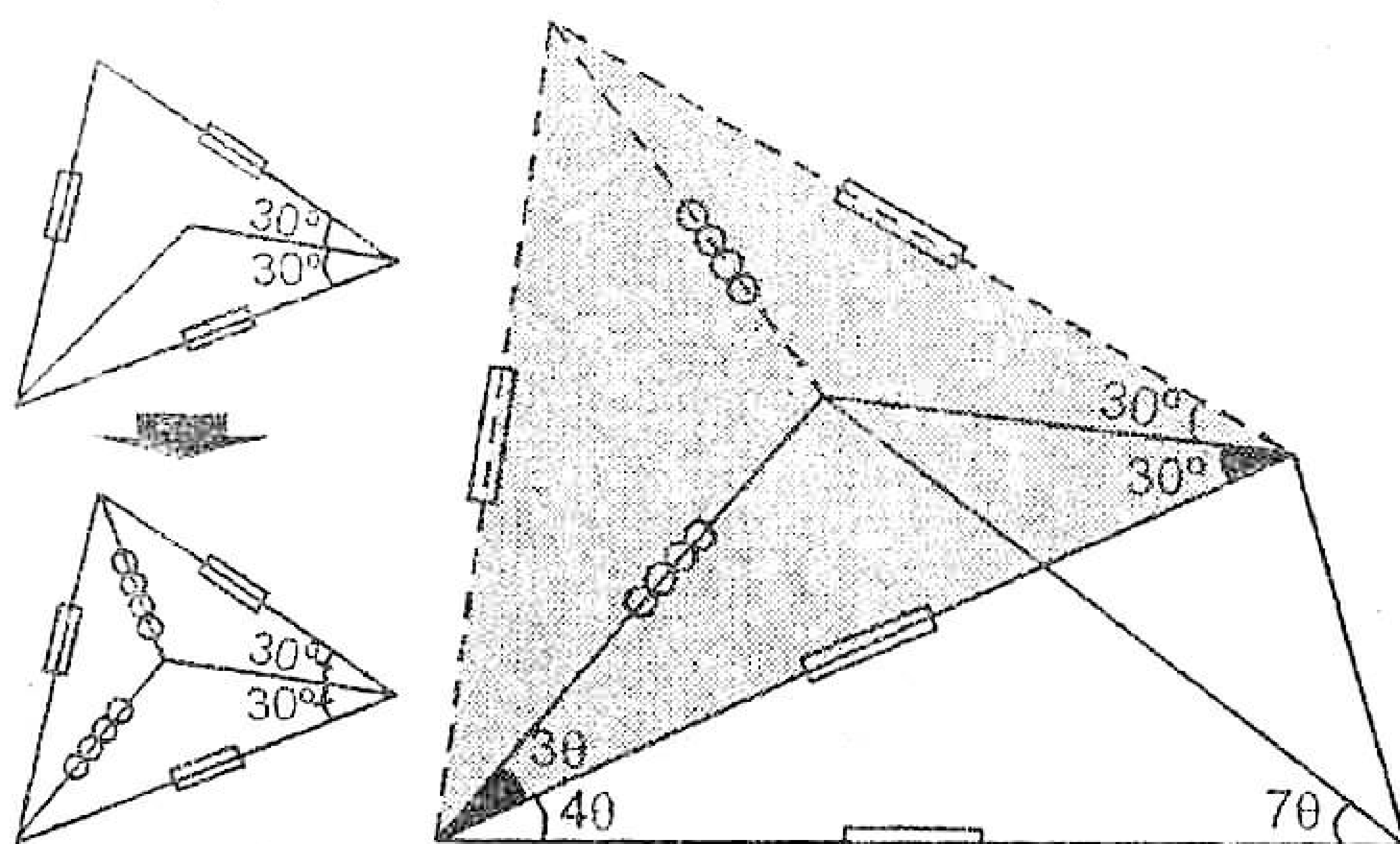
$20° = x$

Solución N° 20

Paso N° 1
Se observa un ángulo de 30°, entonces se traza exteriormente un triángulo equilátero.

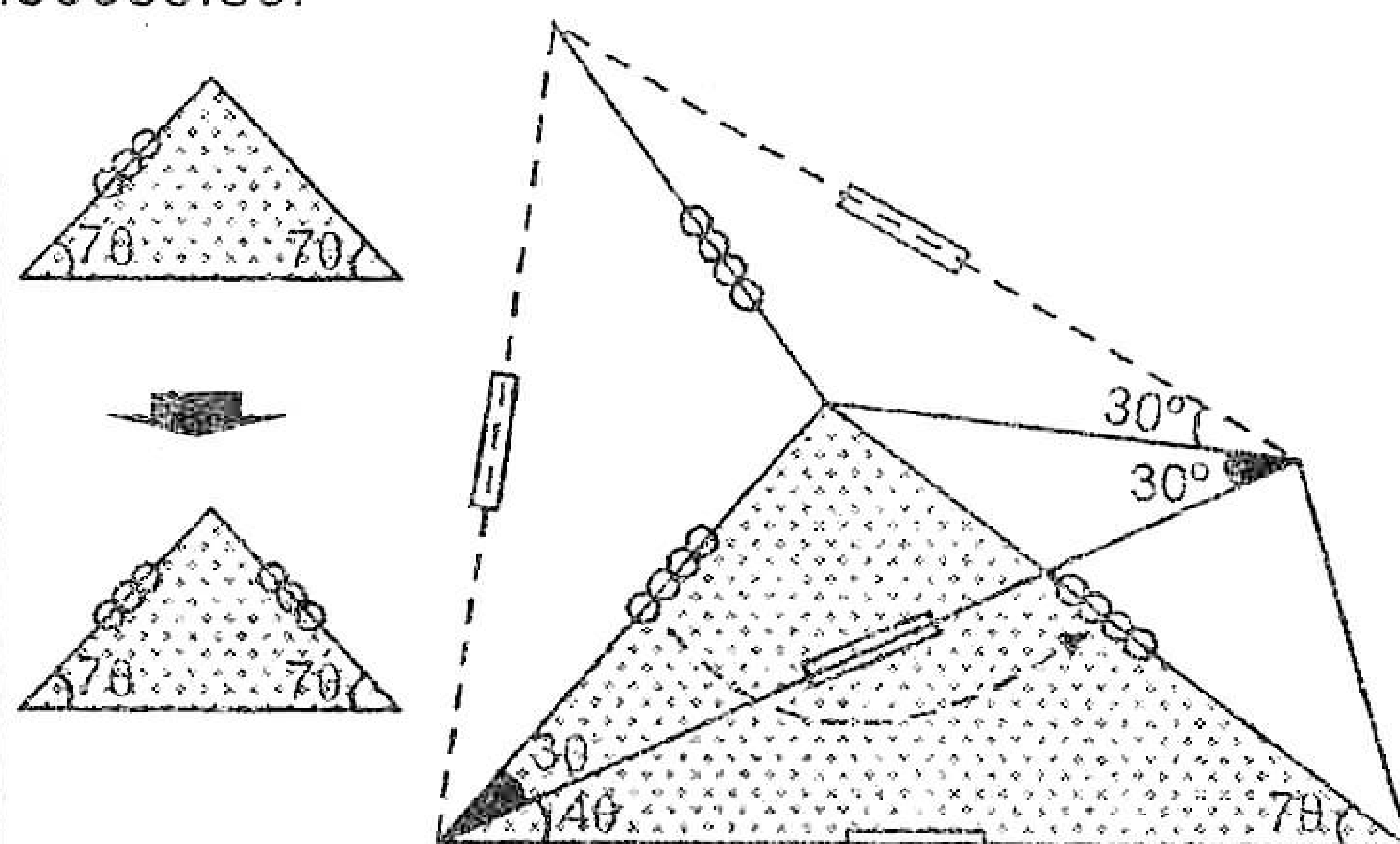


Paso N° 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



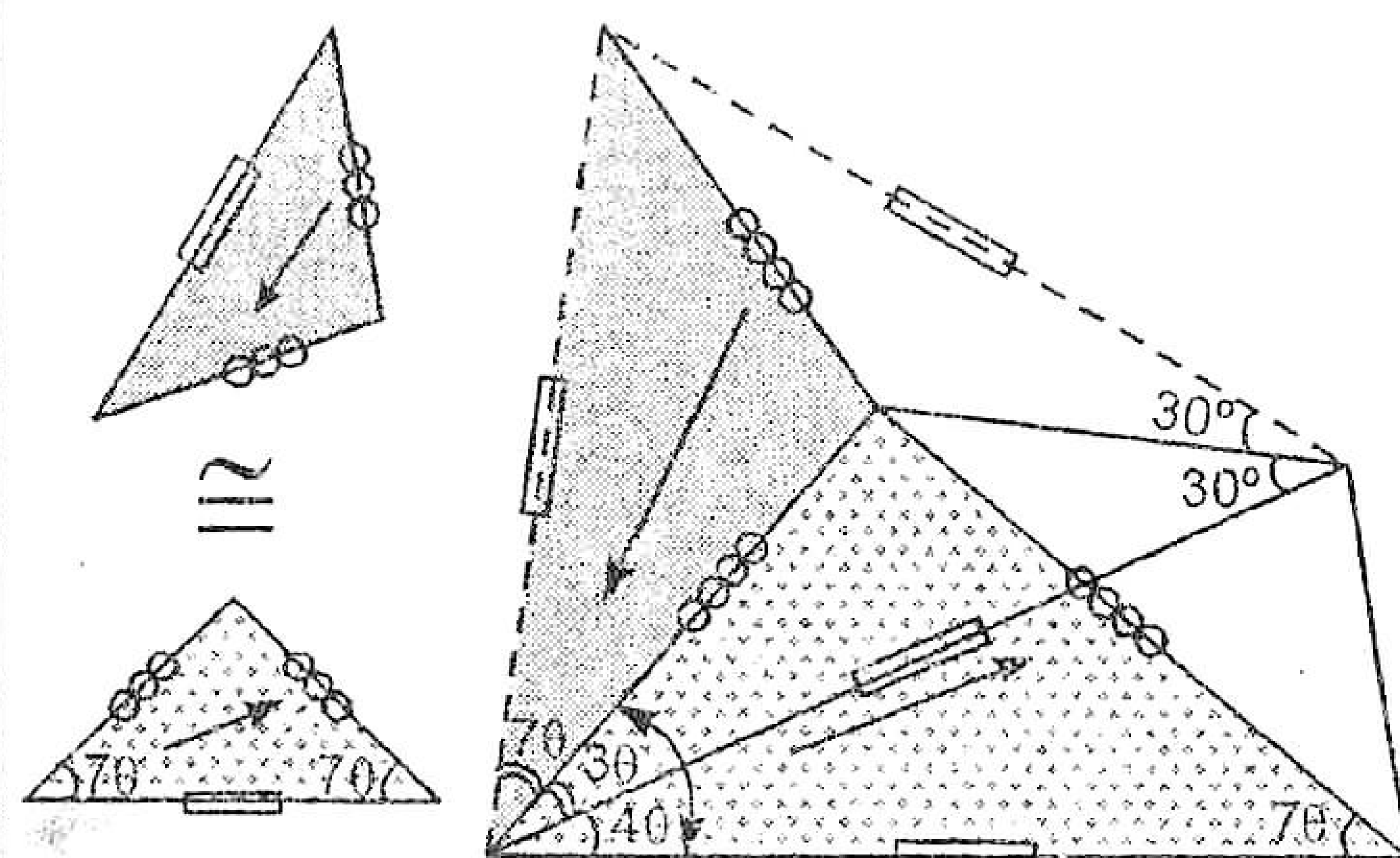
Paso N° 3

Se observa en el interior de la figura un triángulo isósceles.



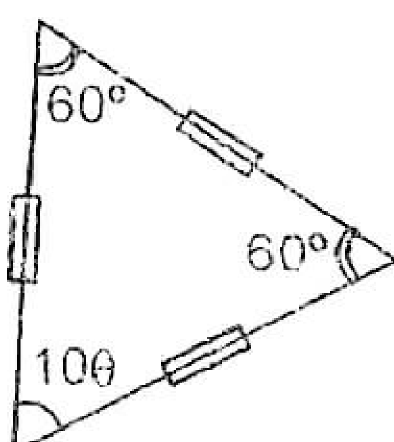
Paso N° 4

Ahora se observa dos triángulos congruentes, caso: (L.L.L)



Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

∴ En la figura se cumple:



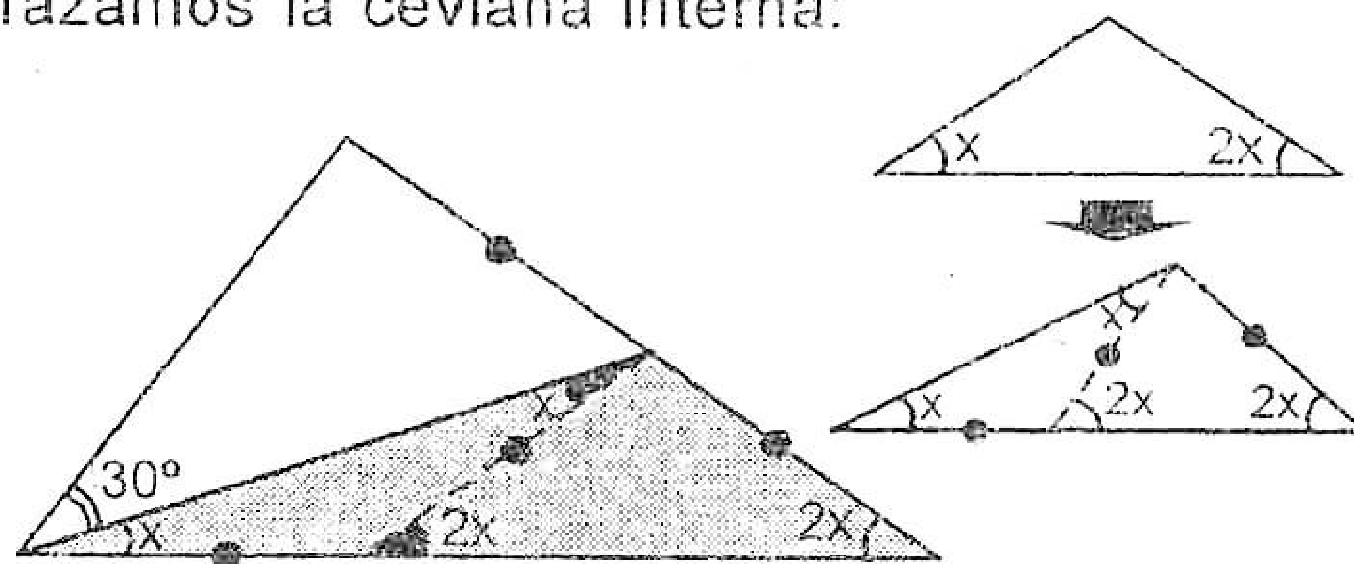
$$7\theta + 3\theta = 60^\circ$$

$$10\theta = 60^\circ$$

$$\theta = 10^\circ$$

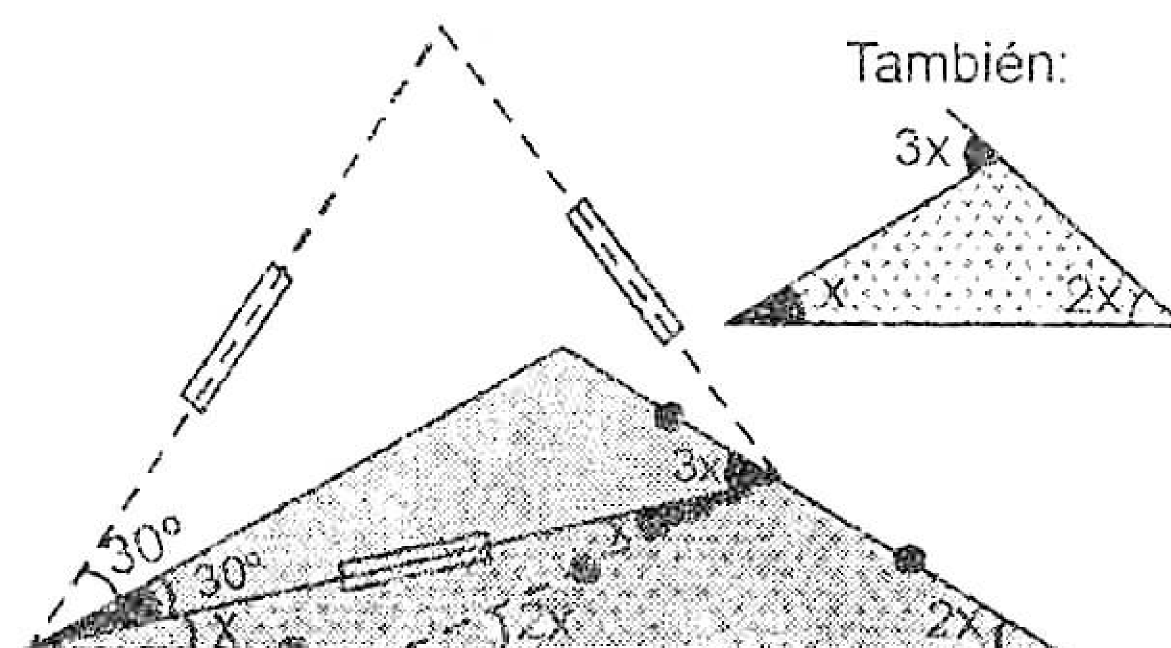
Solución N° 21

Paso N° 1: Se observa en la figura sombreada a ella ángulos en la relación 1 a 2, entonces trazamos la ceviana interna:

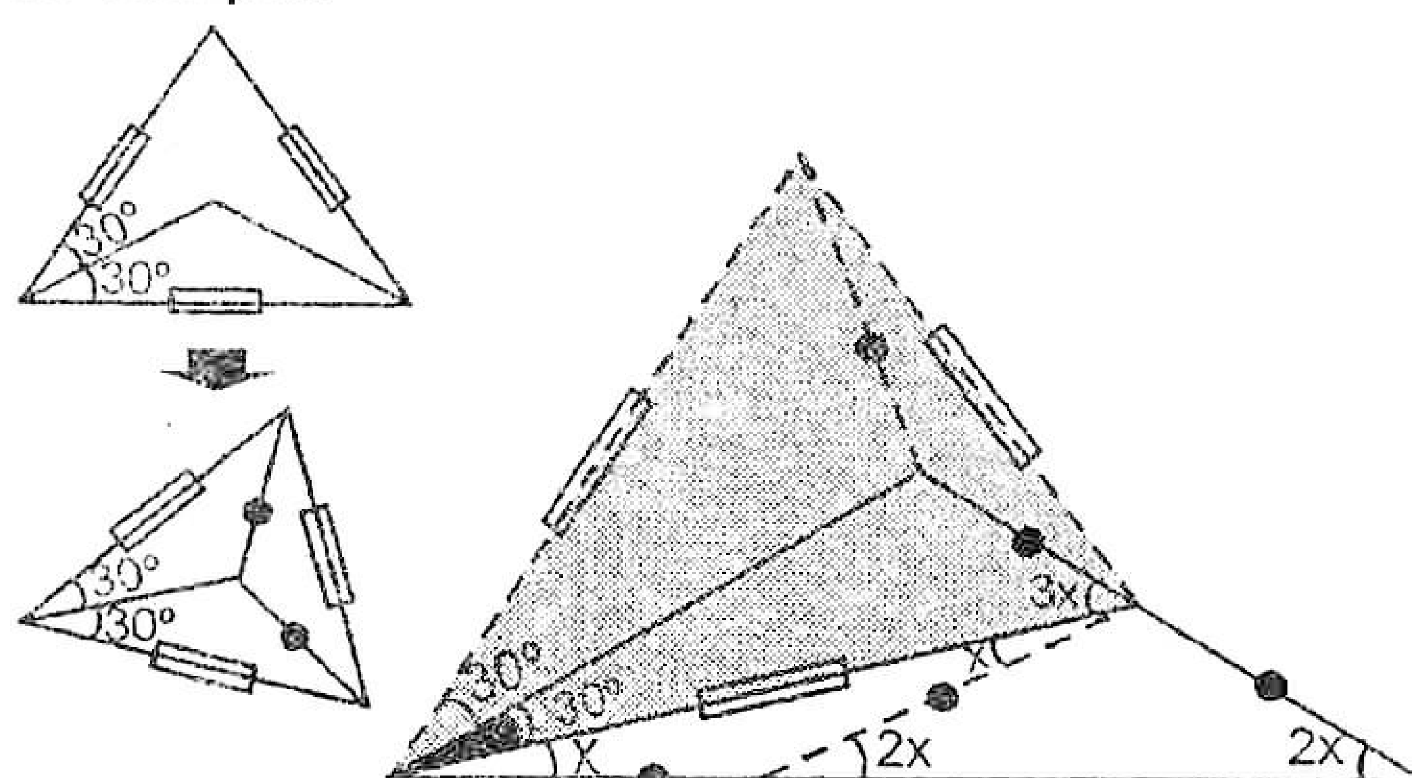


Paso N° 2

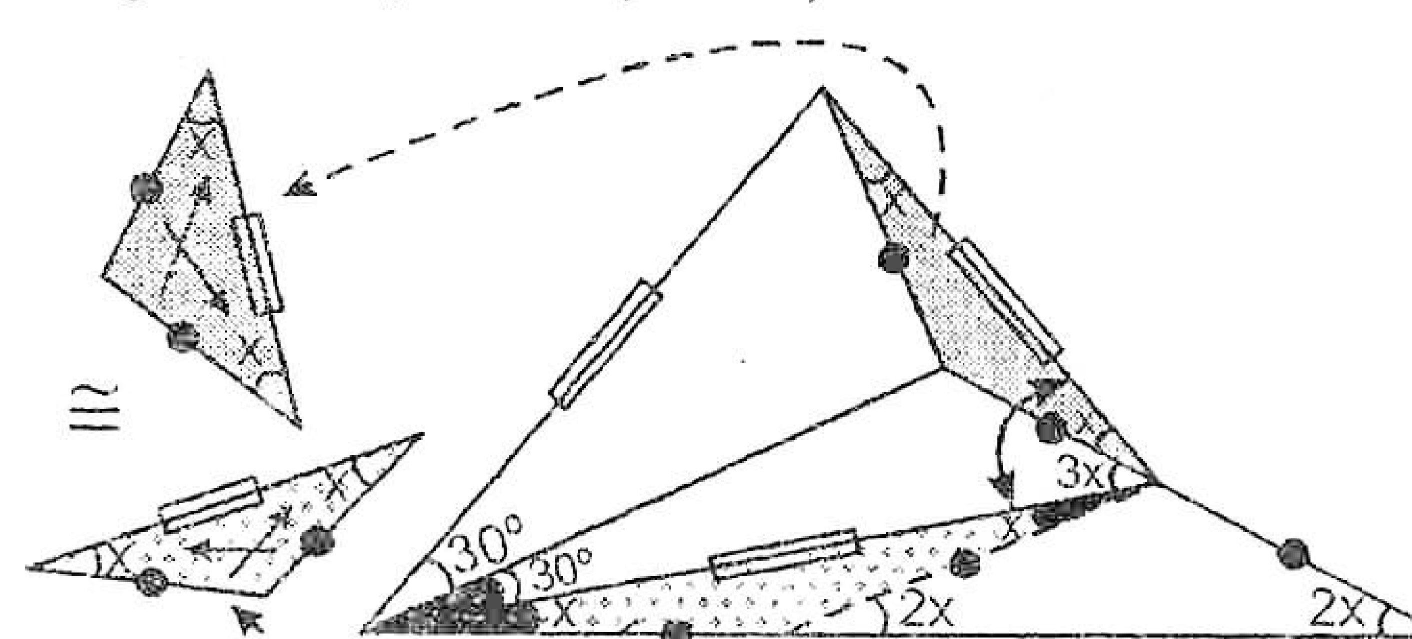
Ahora se observa un ángulo de 30° entonces trazamos exteriormente un triángulo equilátero.



Paso N° 3: En el triángulo equilátero formado, se cumple:



Paso N° 4: Ahora se observa dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



∴ De la figura observa:

$$x + 3x = 60^\circ$$

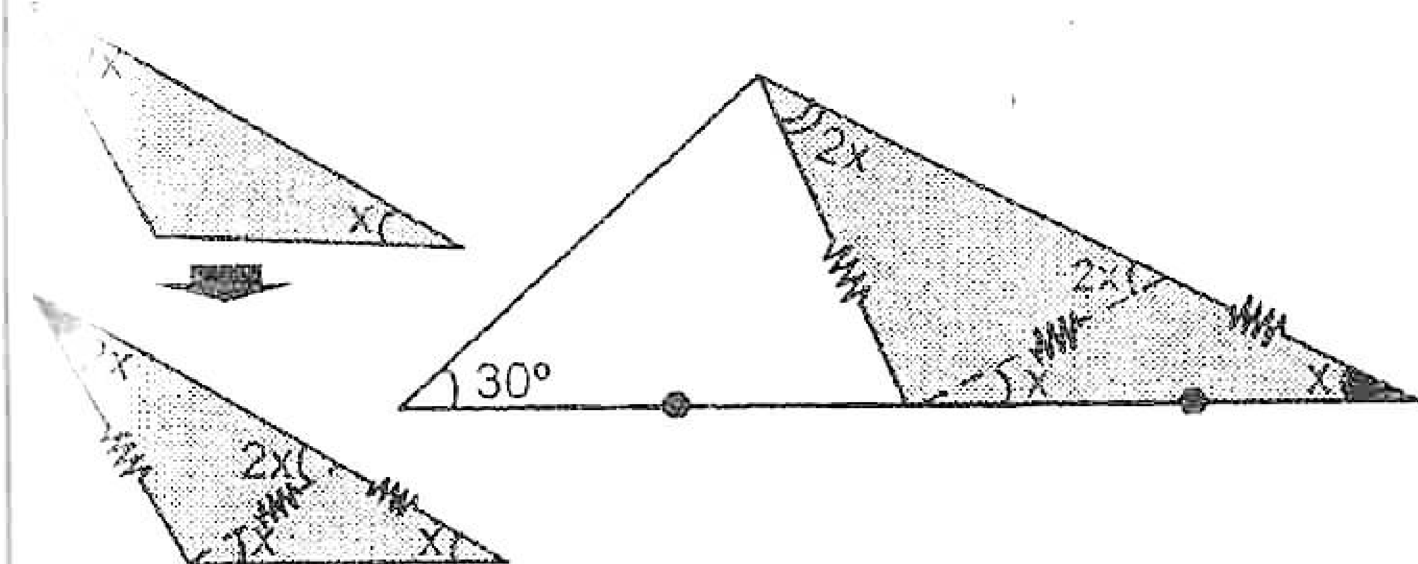
$$4x = 60^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

Solución N° 22

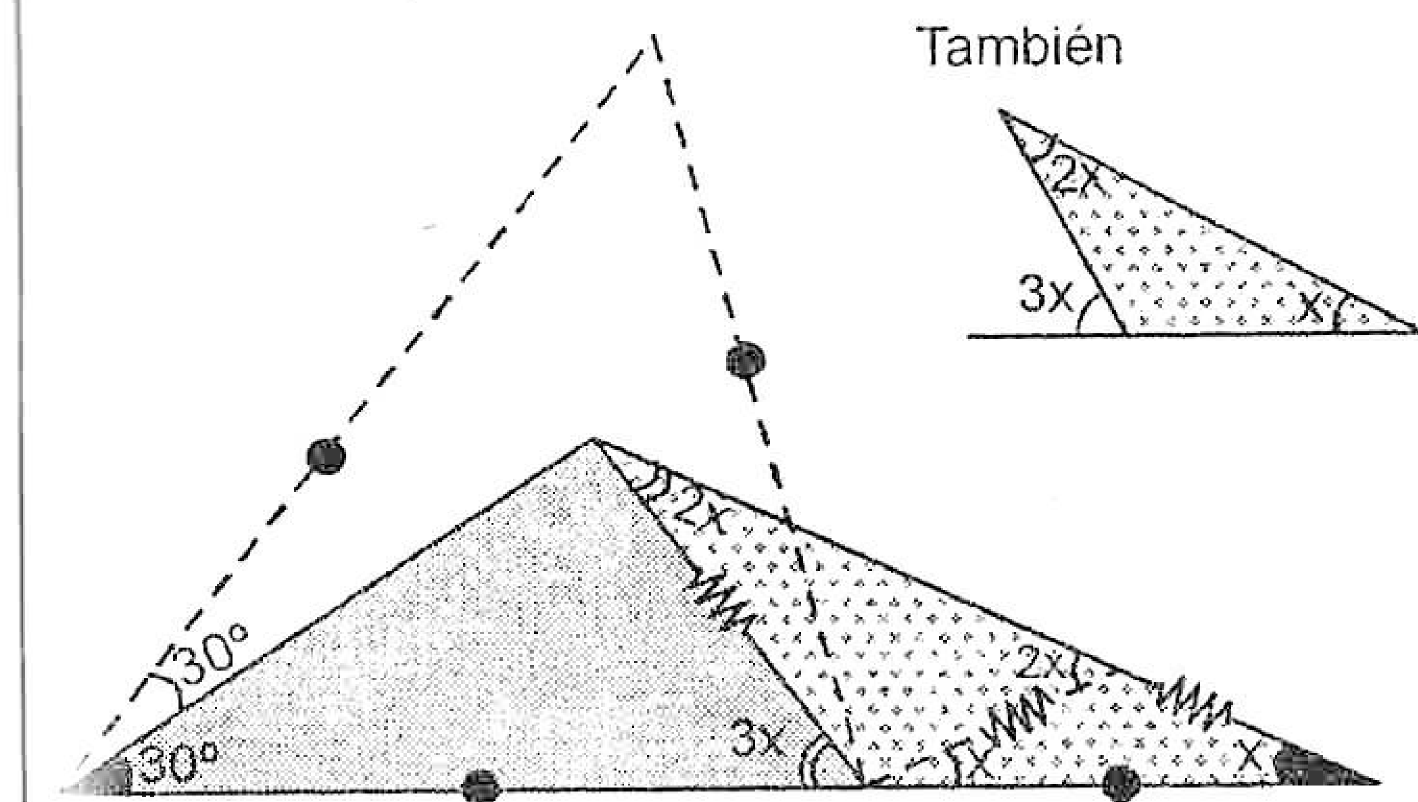
Paso N° 1

Interiormente en la figura se observa ángulos en la relación de 1 a 2, entonces trazamos la ceviana interna. (Primer criterio de construcción)

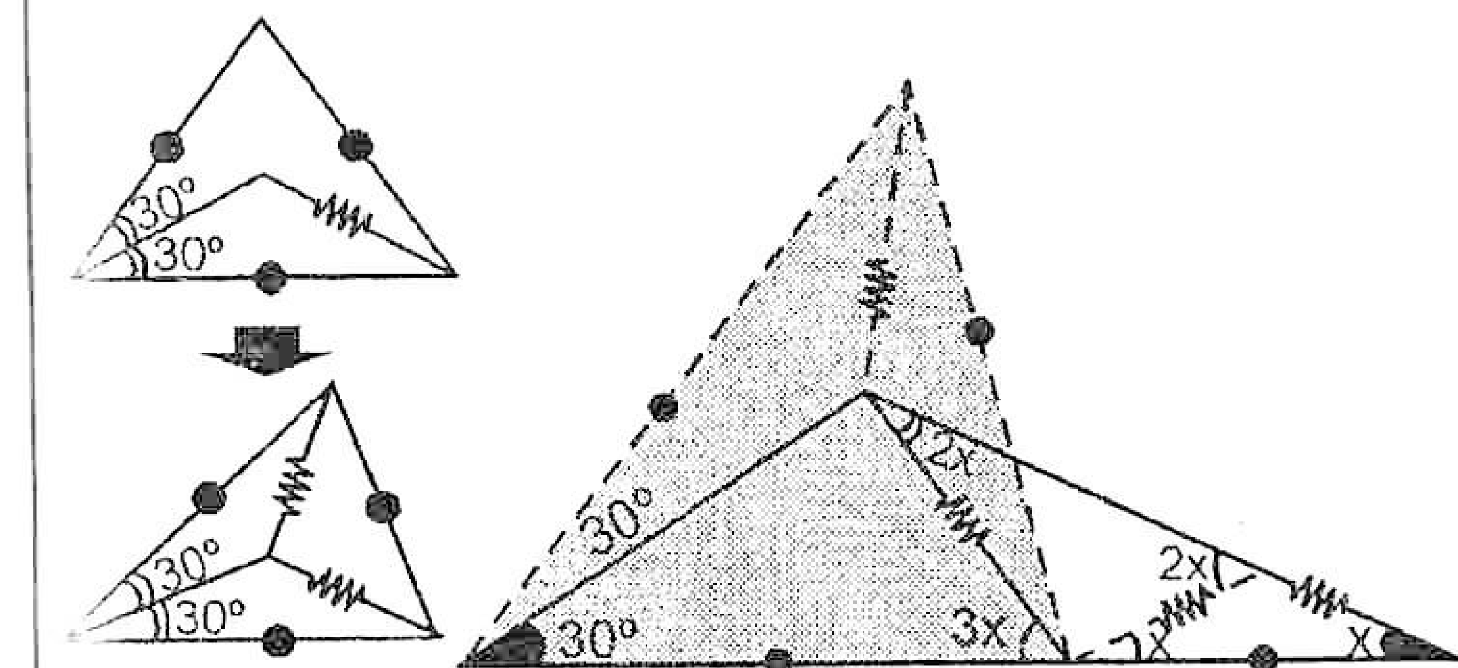


Paso N° 2

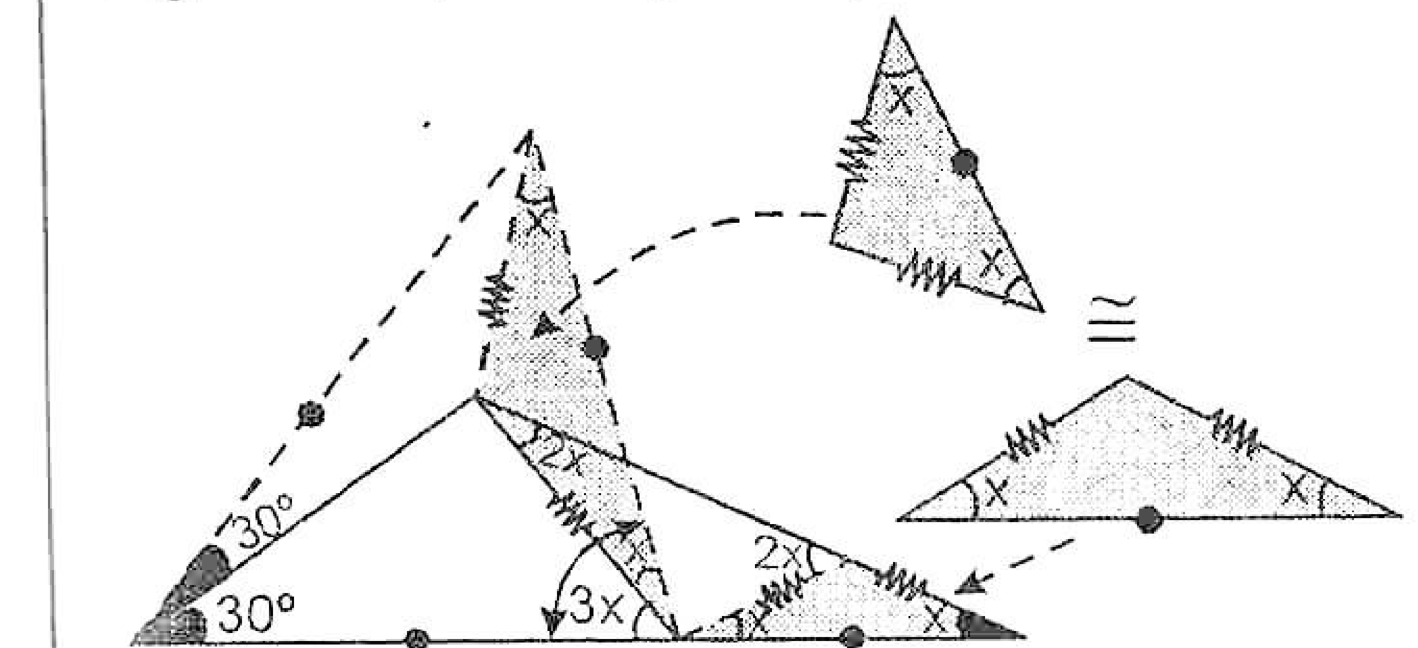
Ahora observamos un ángulo de 30°, entonces trazamos exteriormente un triángulo equilátero, (tercer criterio de construcción)



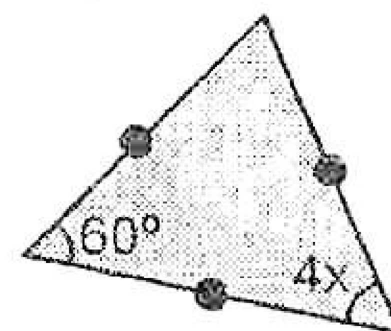
Paso N° 3: En el triángulo equilátero trazado, se cumple:



Paso N° 4: Se observa dos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



∴ Se observa de la figura en el triángulo equilátero.



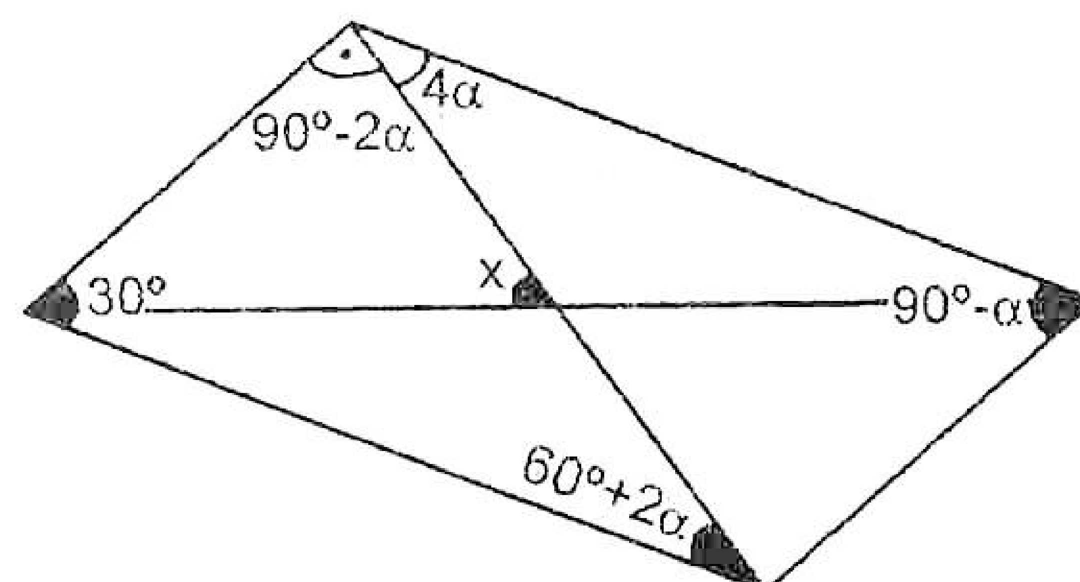
$$3x + x = 60°$$

$$4x = 60°$$

$$x = 15°$$

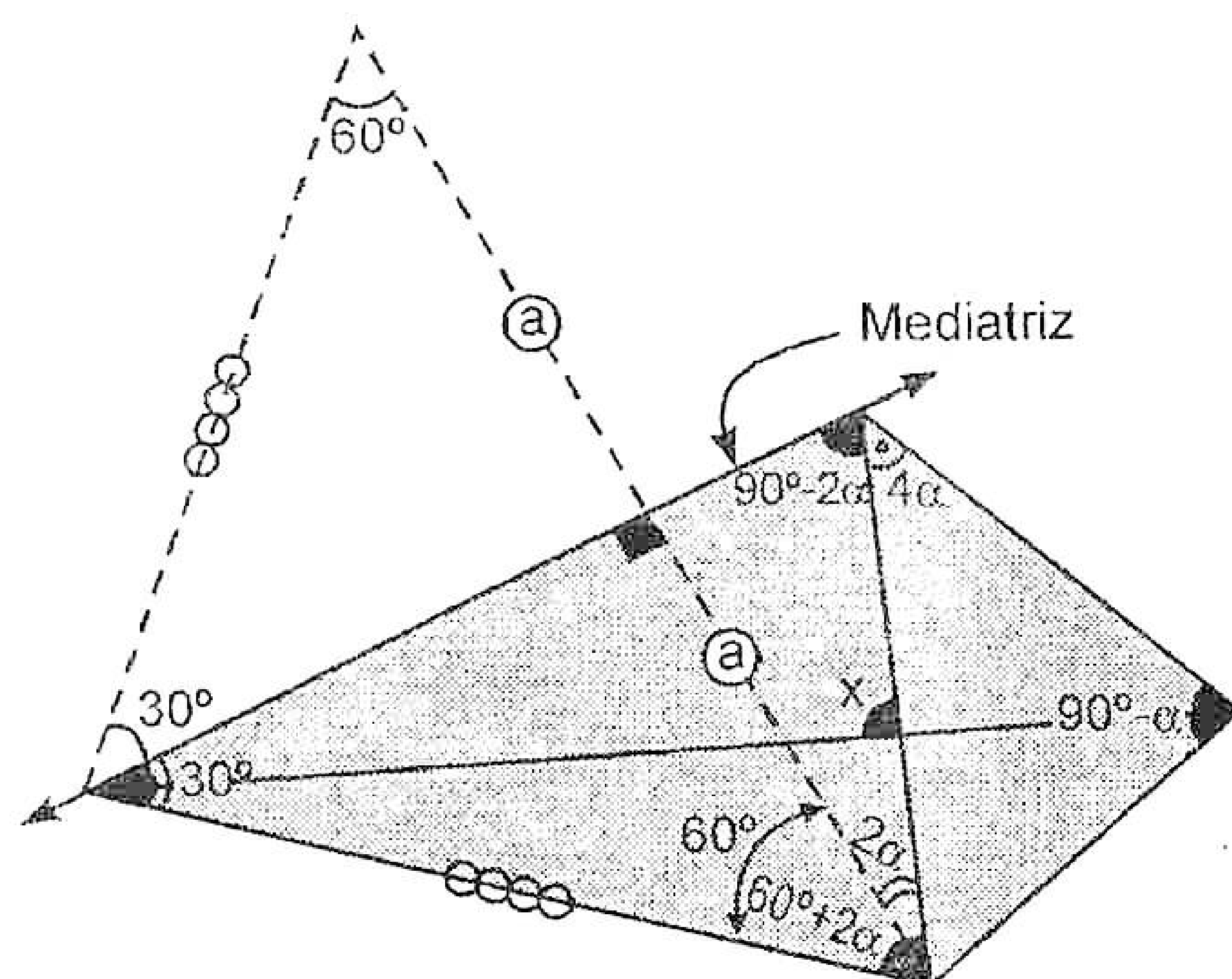
Solución N° 23

Completamos los ángulos internos en el triángulo.

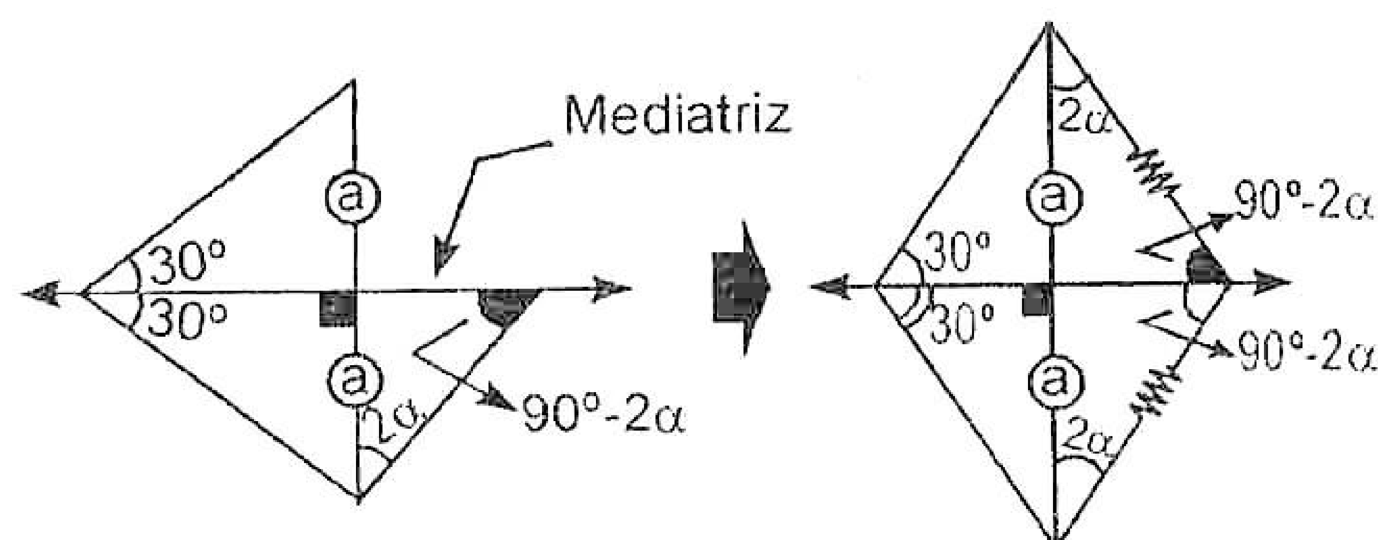


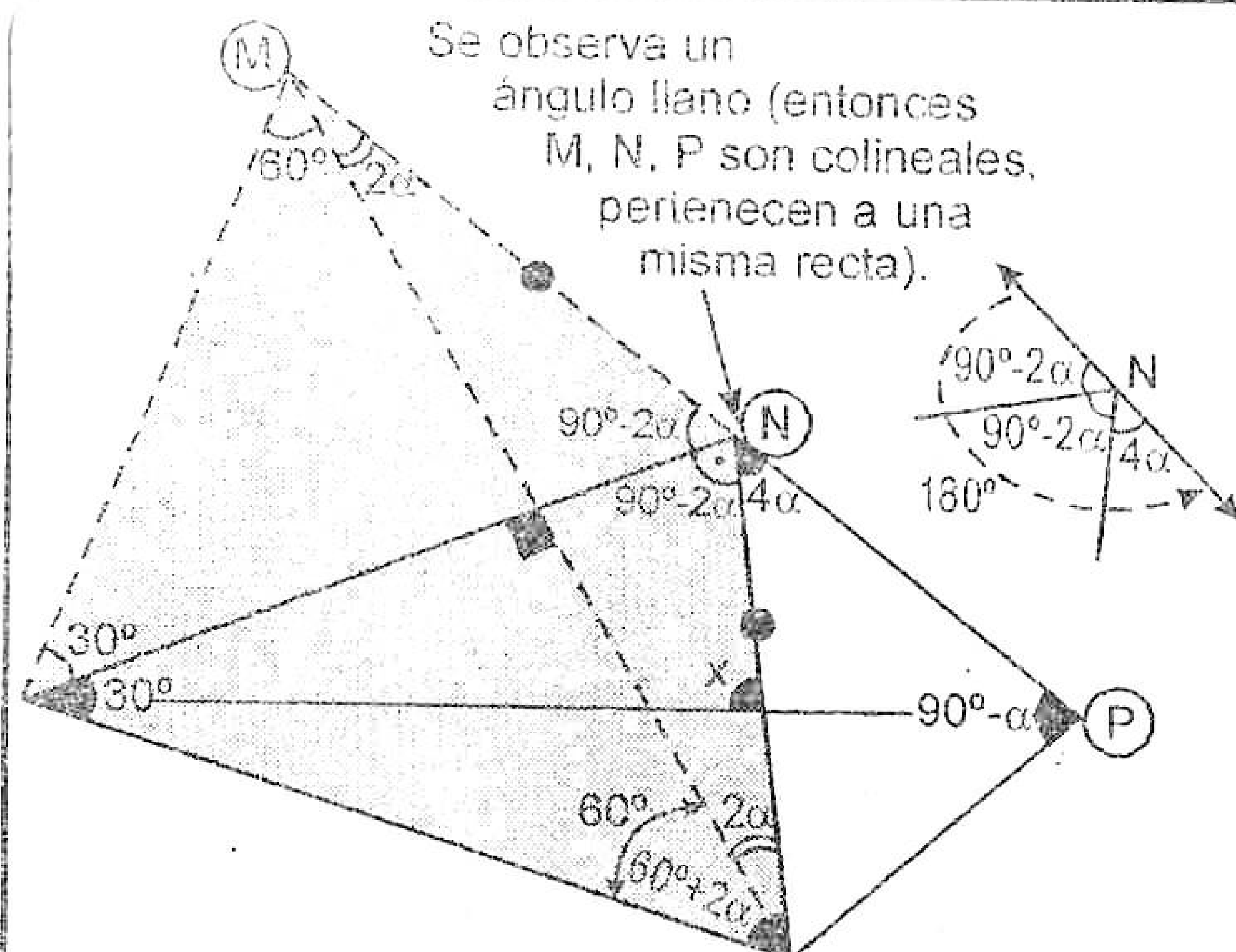
Paso N° 1

Observamos un ángulo de 30°, entonces construimos exteriormente un triángulo equilátero de la siguiente manera.



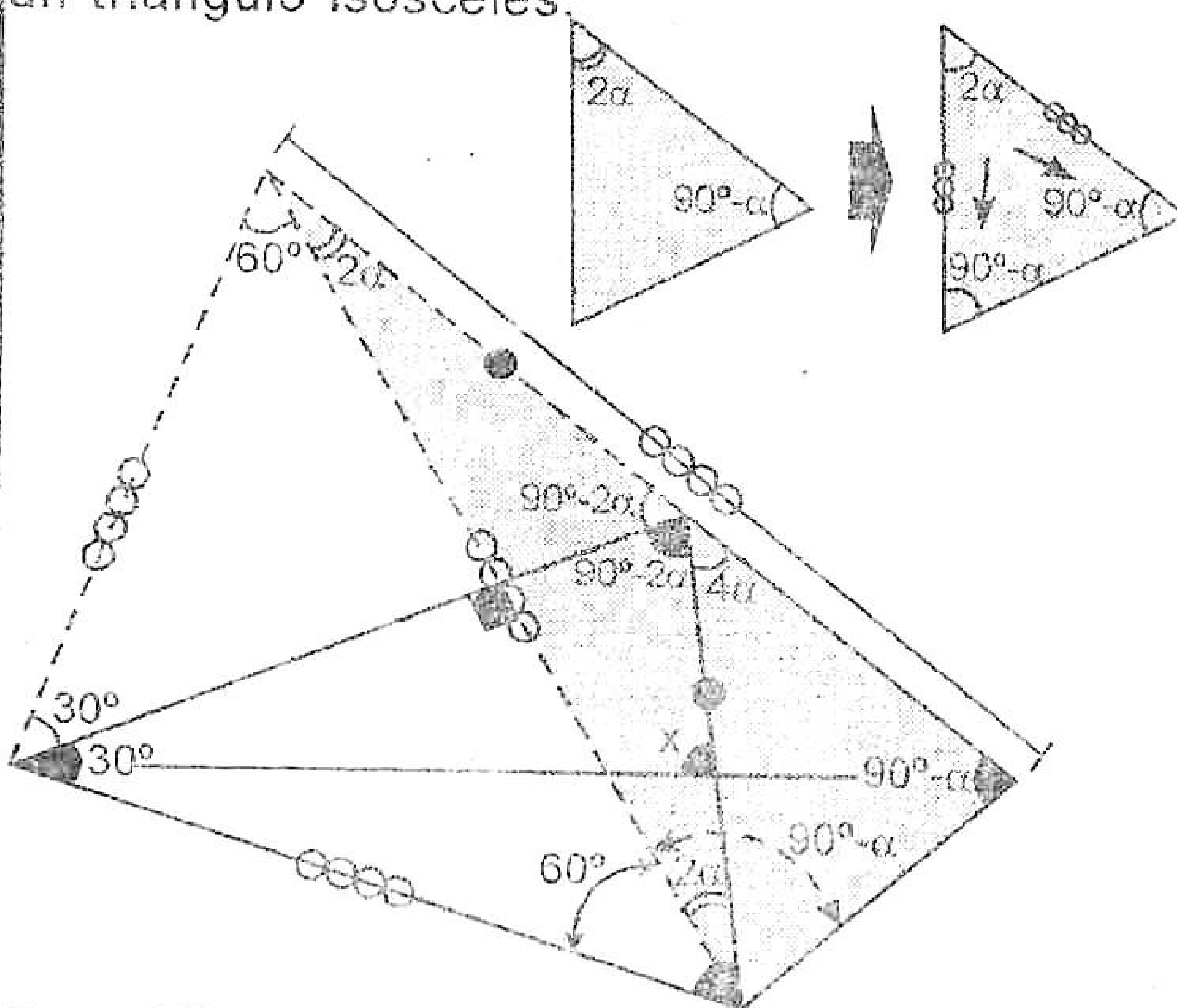
Paso N° 2: En el triángulo equilátero trazado, se cumple:





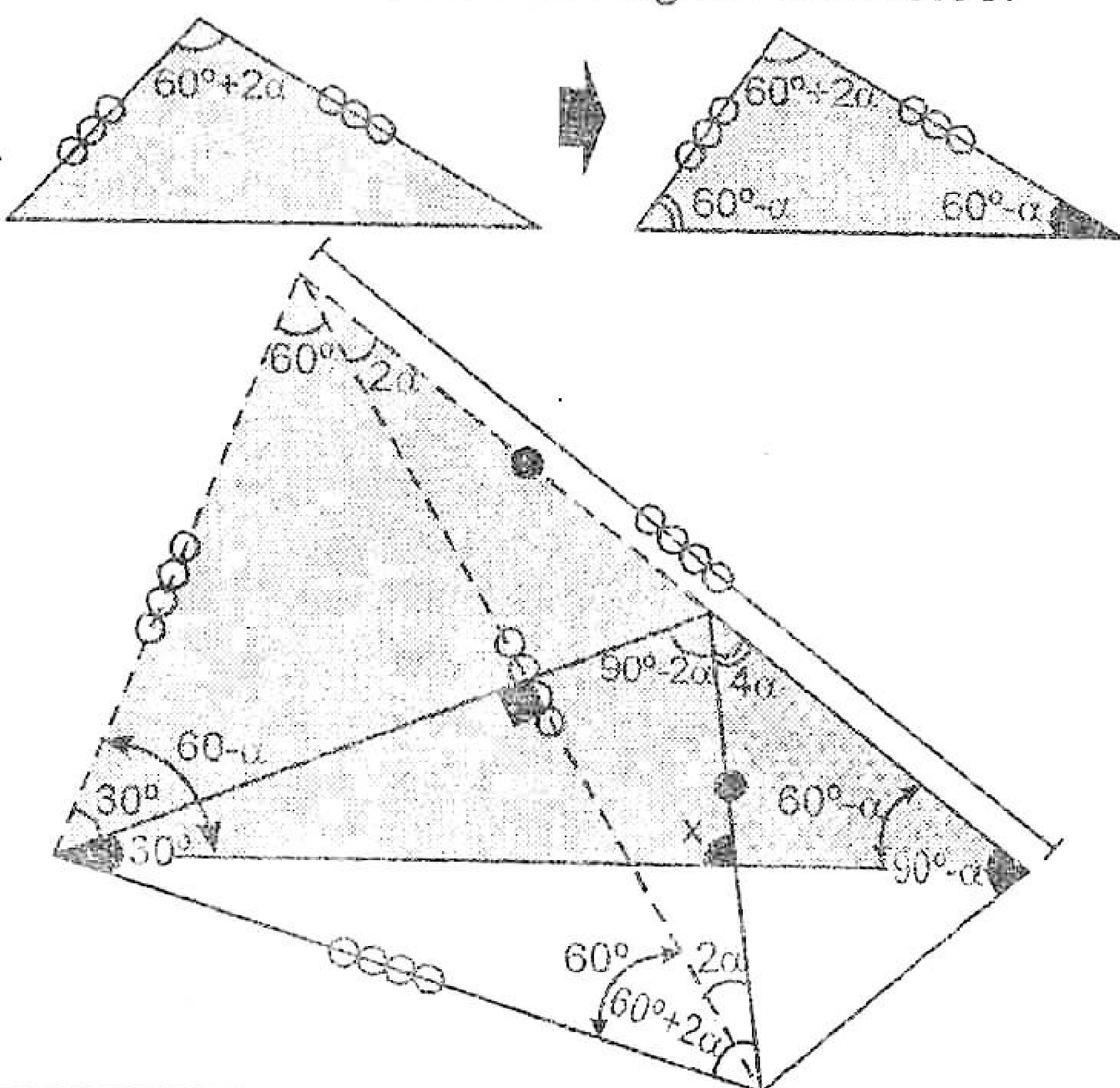
Paso Nº 3

Se observa, la siguiente figura sombreada es un triángulo isósceles.



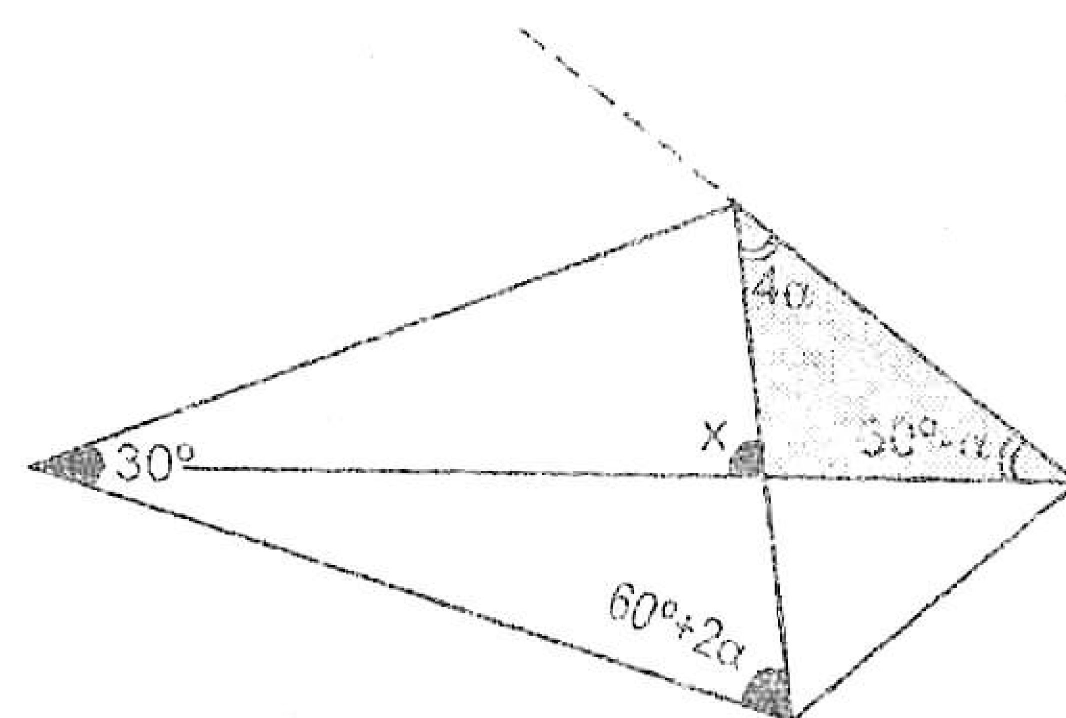
Paso Nº 4

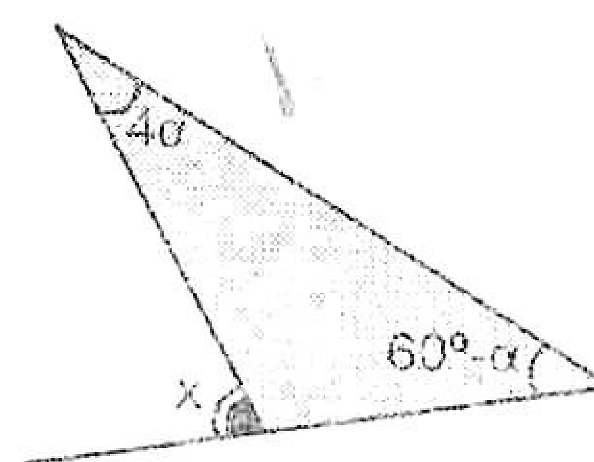
Se observa un nuevo triángulo isósceles.



Paso Nº 6

Ahora se observa interiormente de en figura resultante un triángulo con las siguientes características:



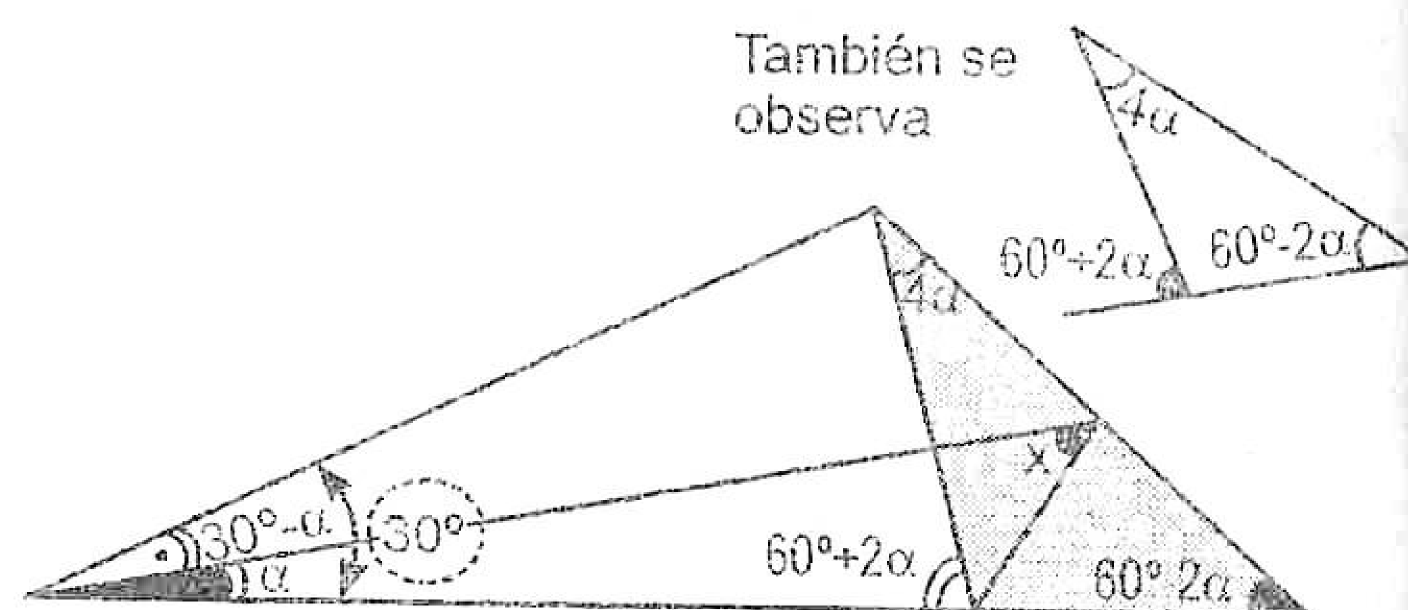


$$x = 4\alpha + 60^\circ - \alpha$$
$$x = 60^\circ + 3\alpha$$

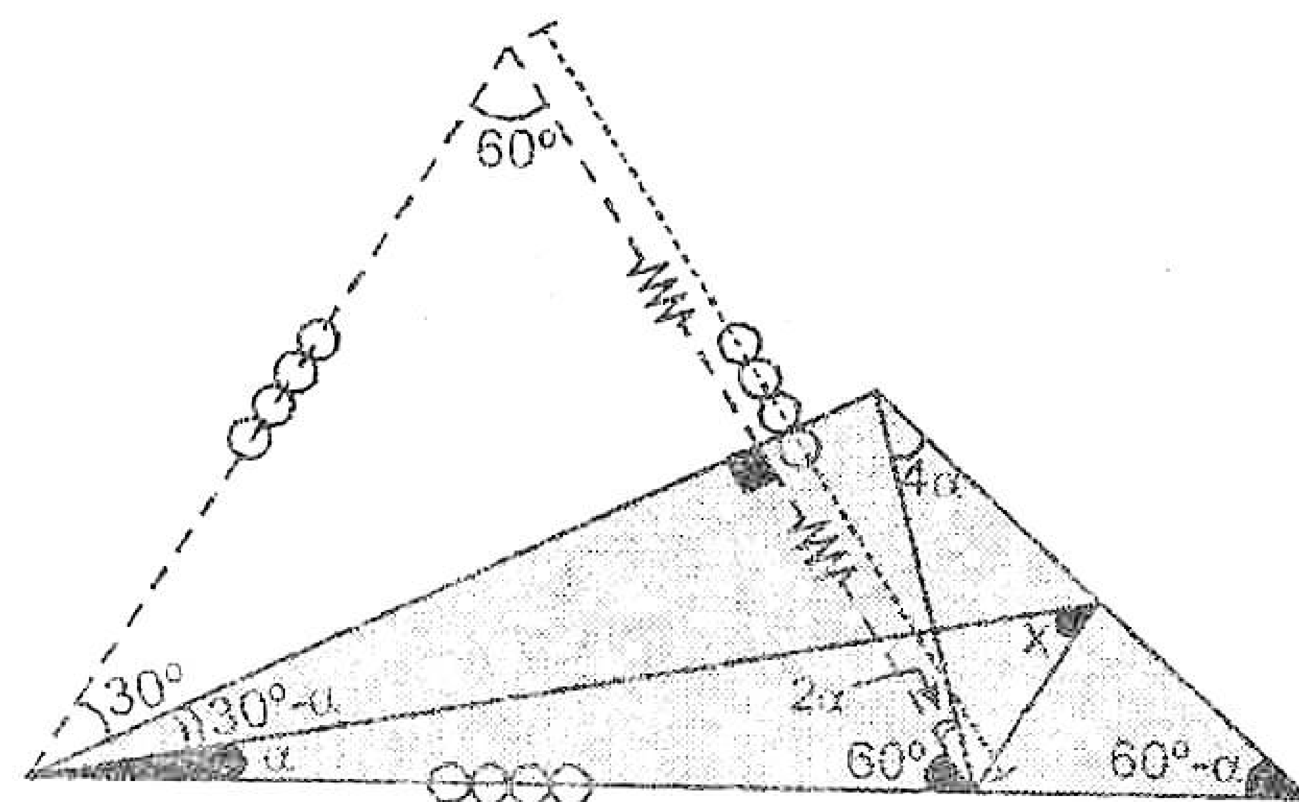
Solución Nº 24

Paso Nº 1

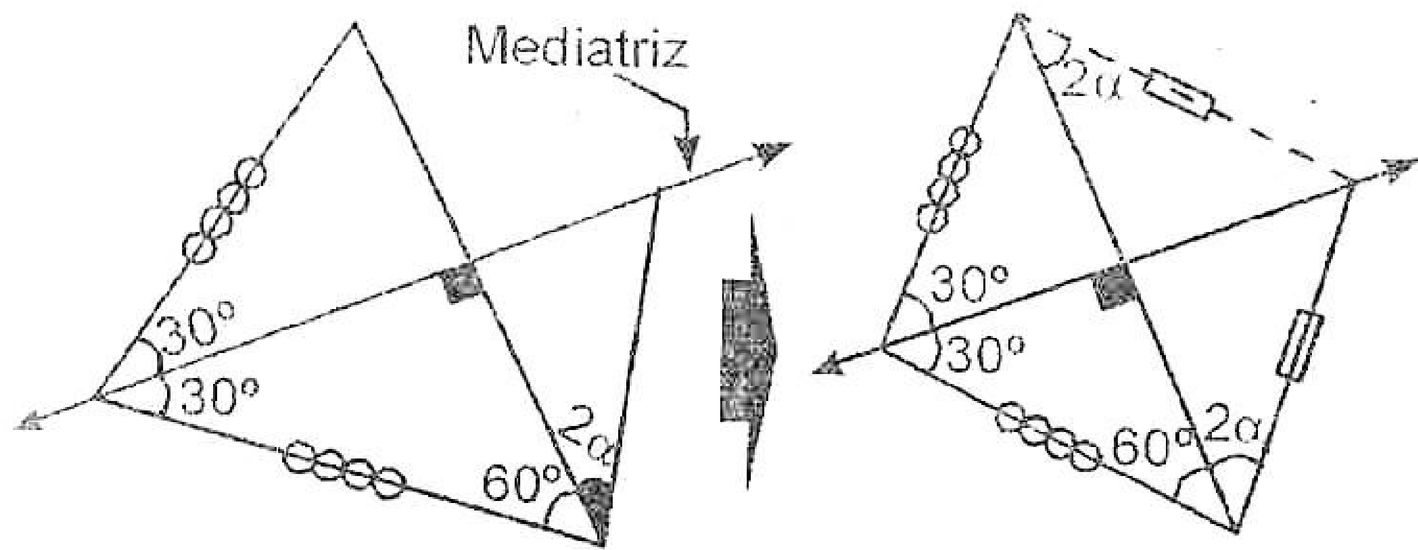
En la figura se observa un ángulo de 30°



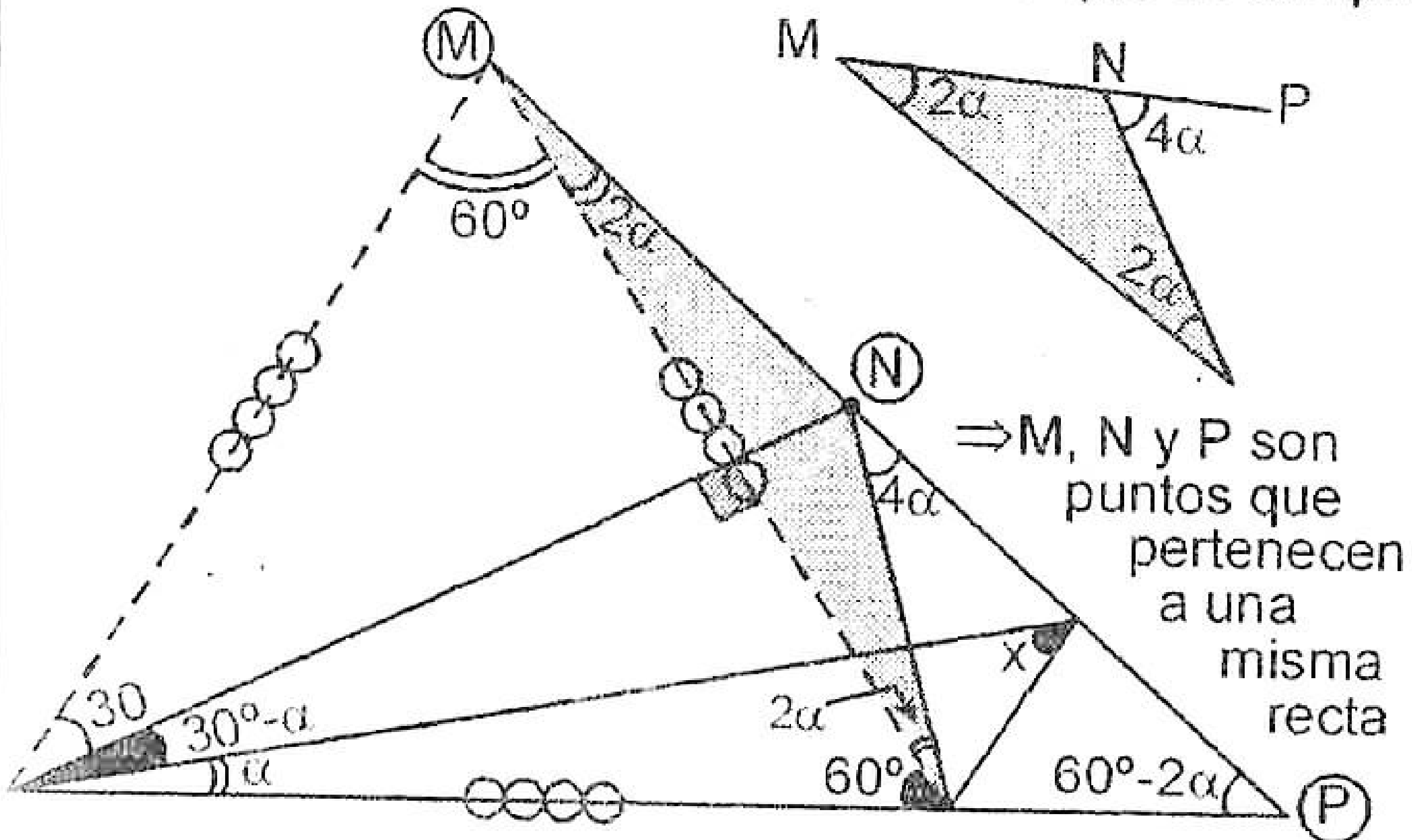
Ahora trazamos un triángulo equilátero exteriormente.



Paso Nº 2: En el triángulo equilátero formado, se cumple:

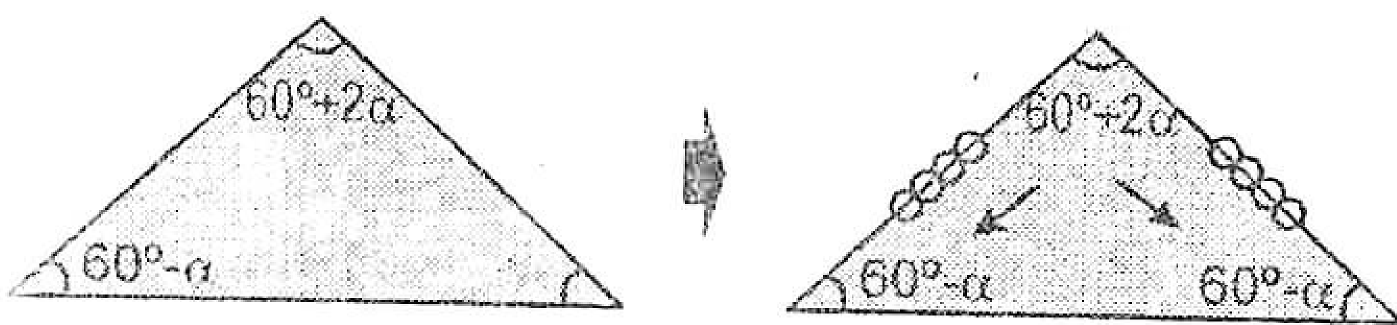


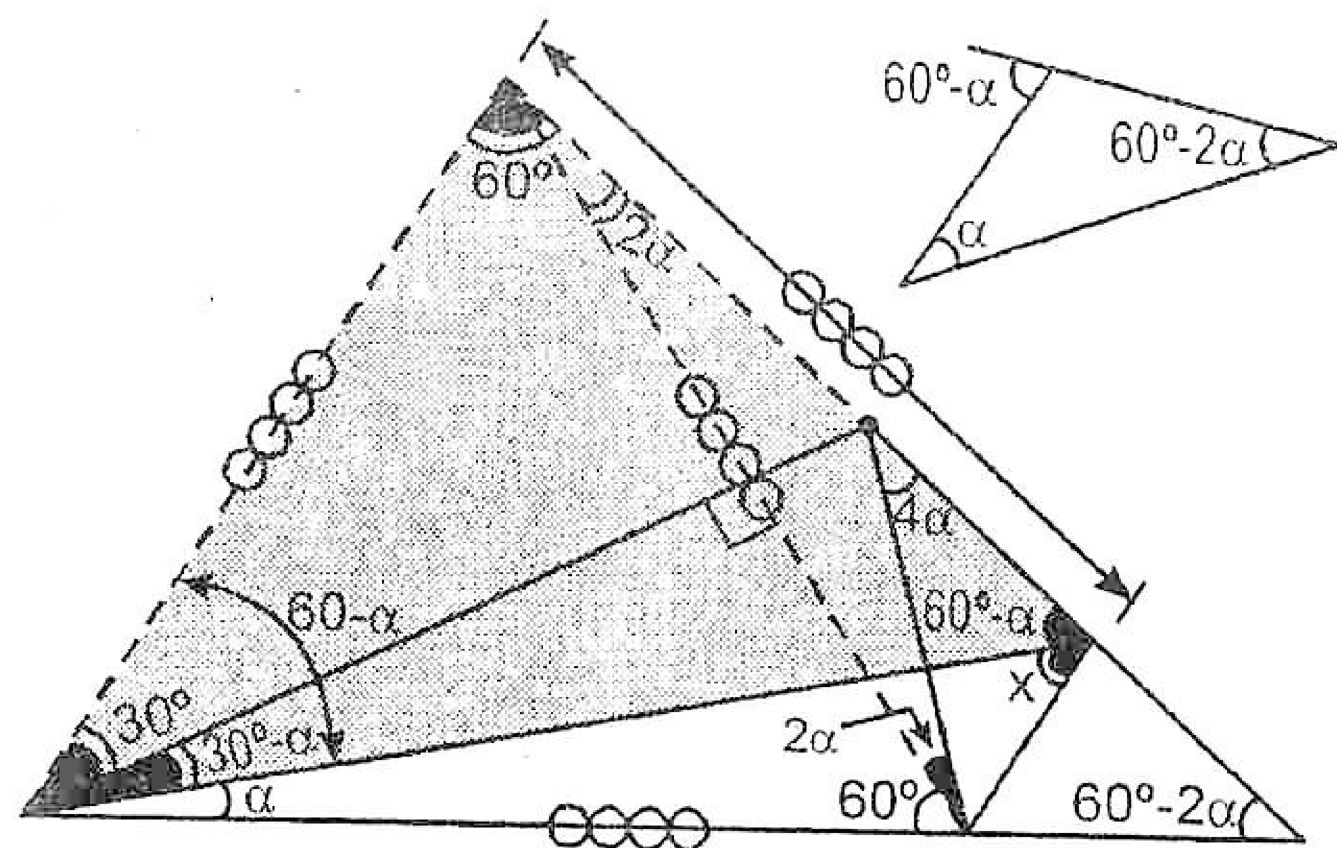
También se observa que se cumple:



Paso Nº 3

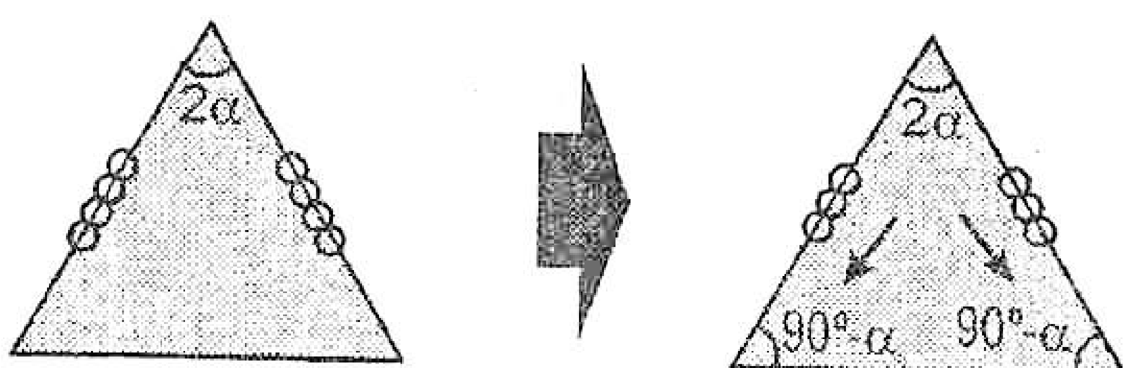
Se obtiene un triángulo isósceles.

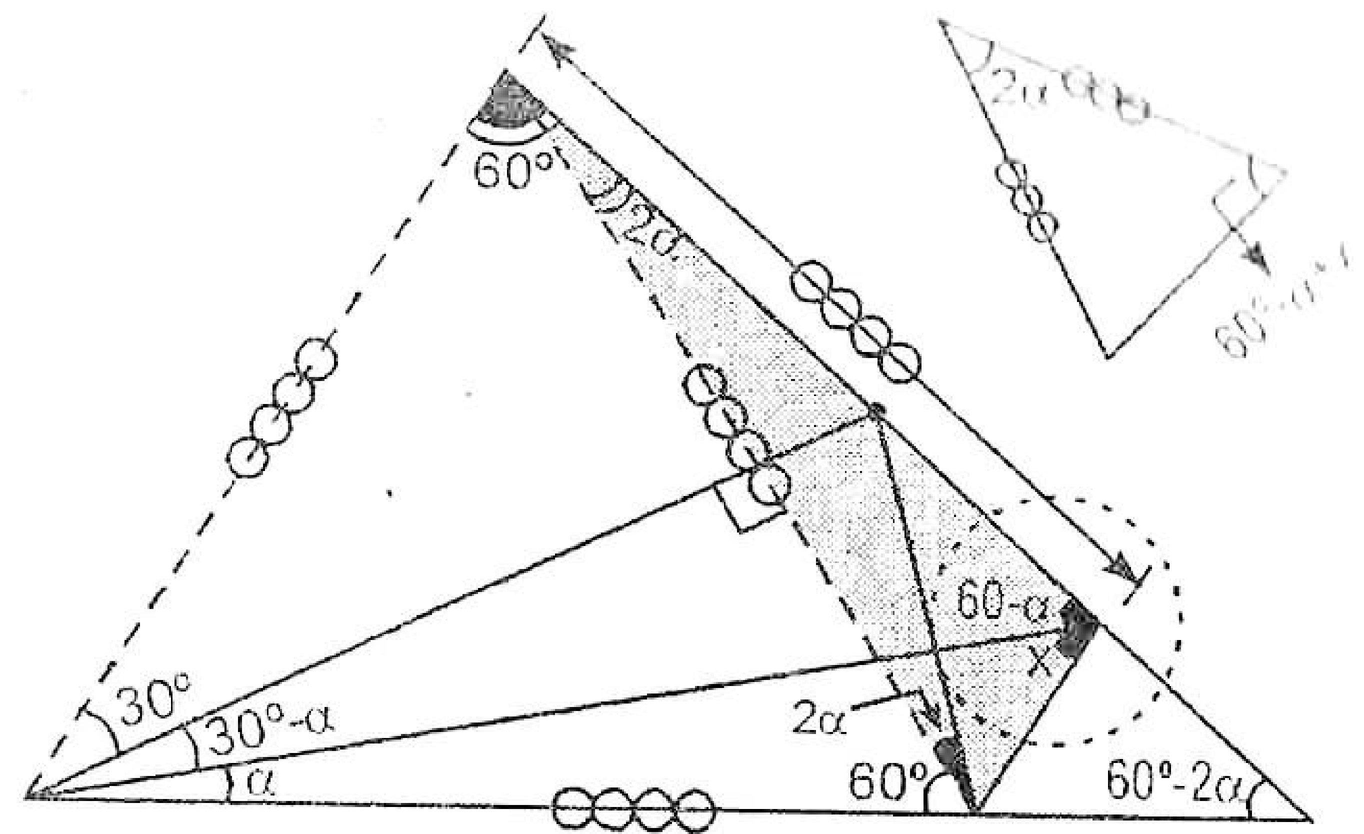




Paso Nº 4

Se observa en la figura sombreada un nuevo triángulo isósceles, donde se cumple:





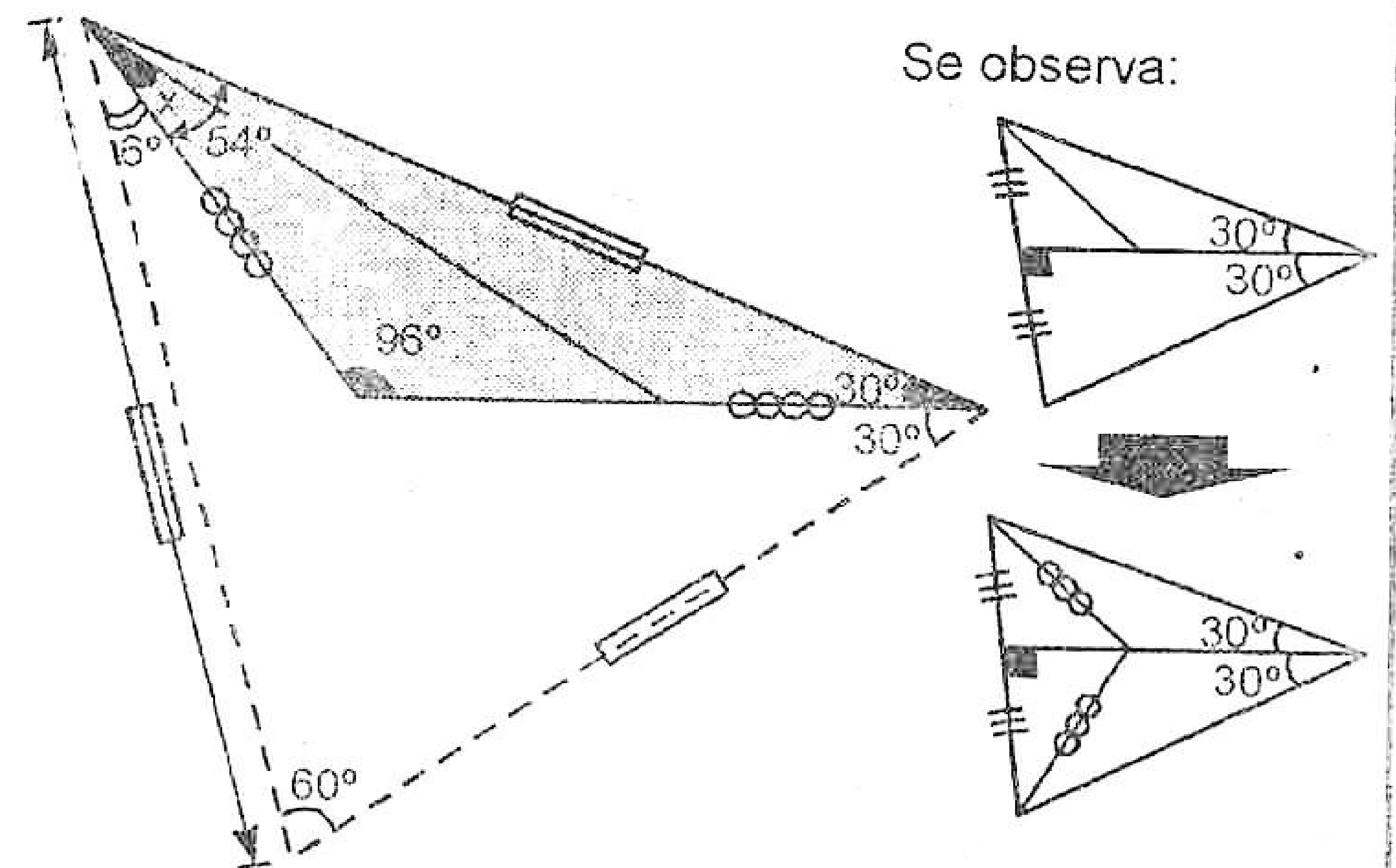
$$\Rightarrow \quad 60° - \alpha + x = 90° - \alpha$$

$$\mathbf{x = 30°}$$

Solución Nº 25

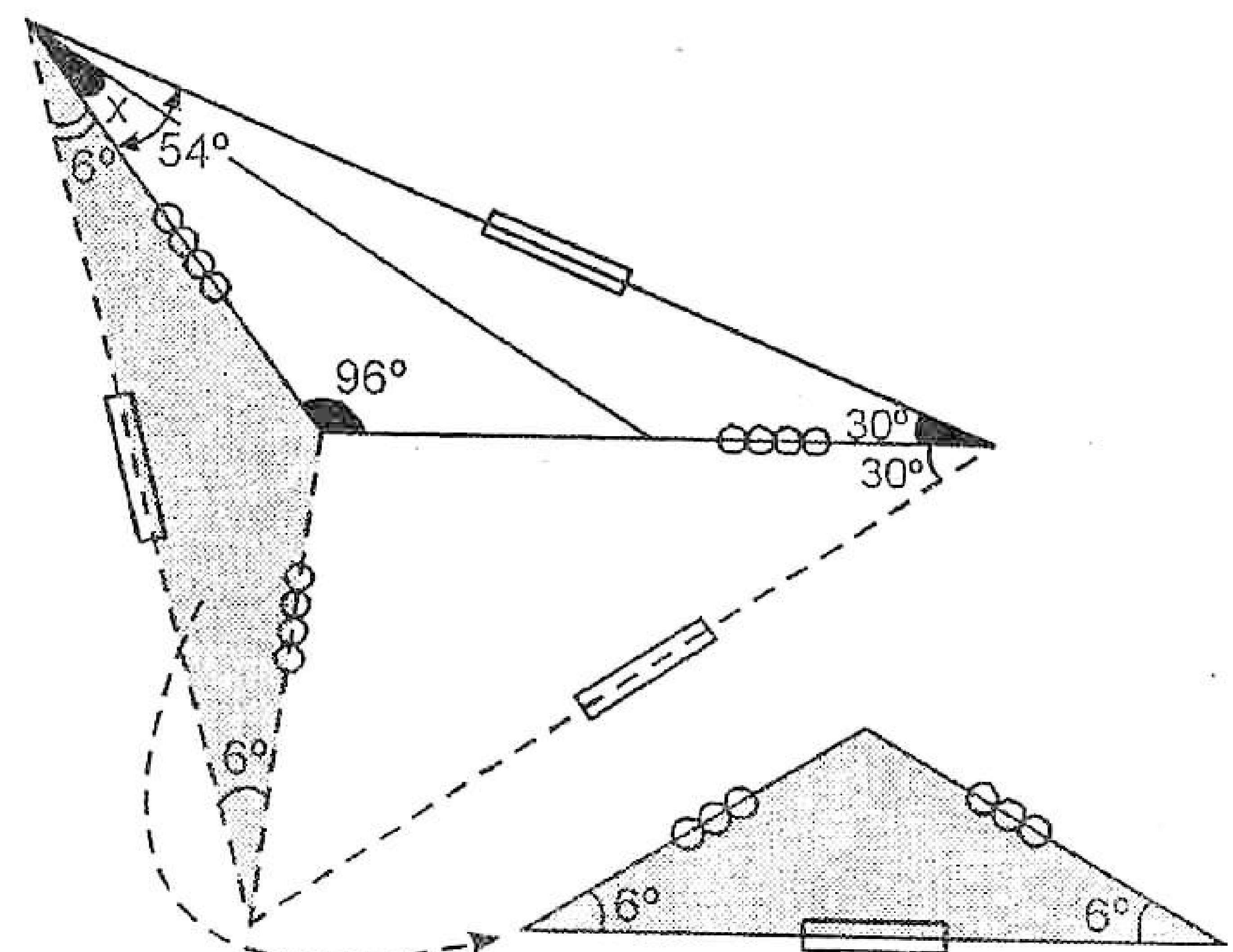
Paso Nº 1

Se observa un ángulo de 30°, entonces trazamos un triángulo equilátero externamente de la siguiente manera.

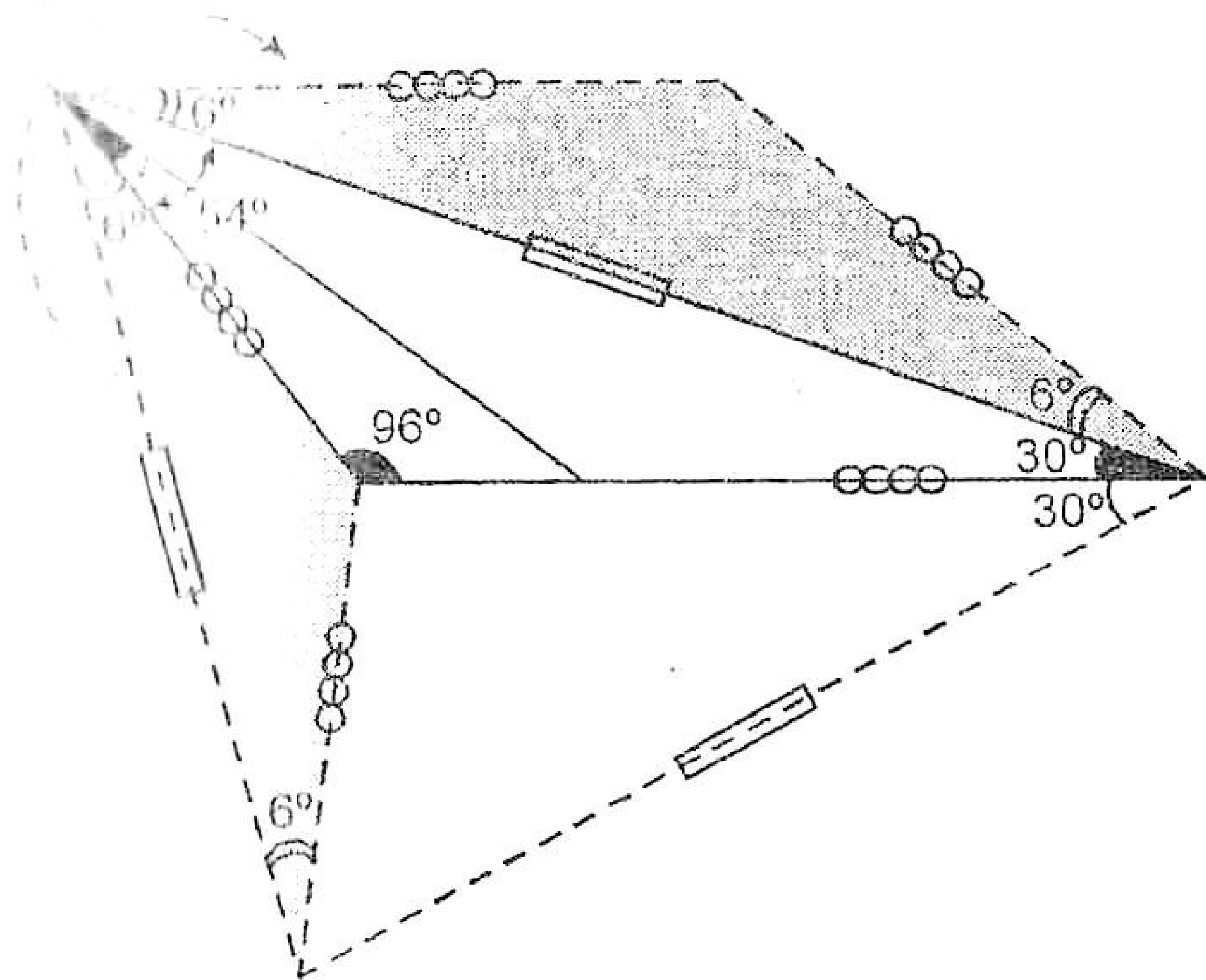


Paso Nº 2

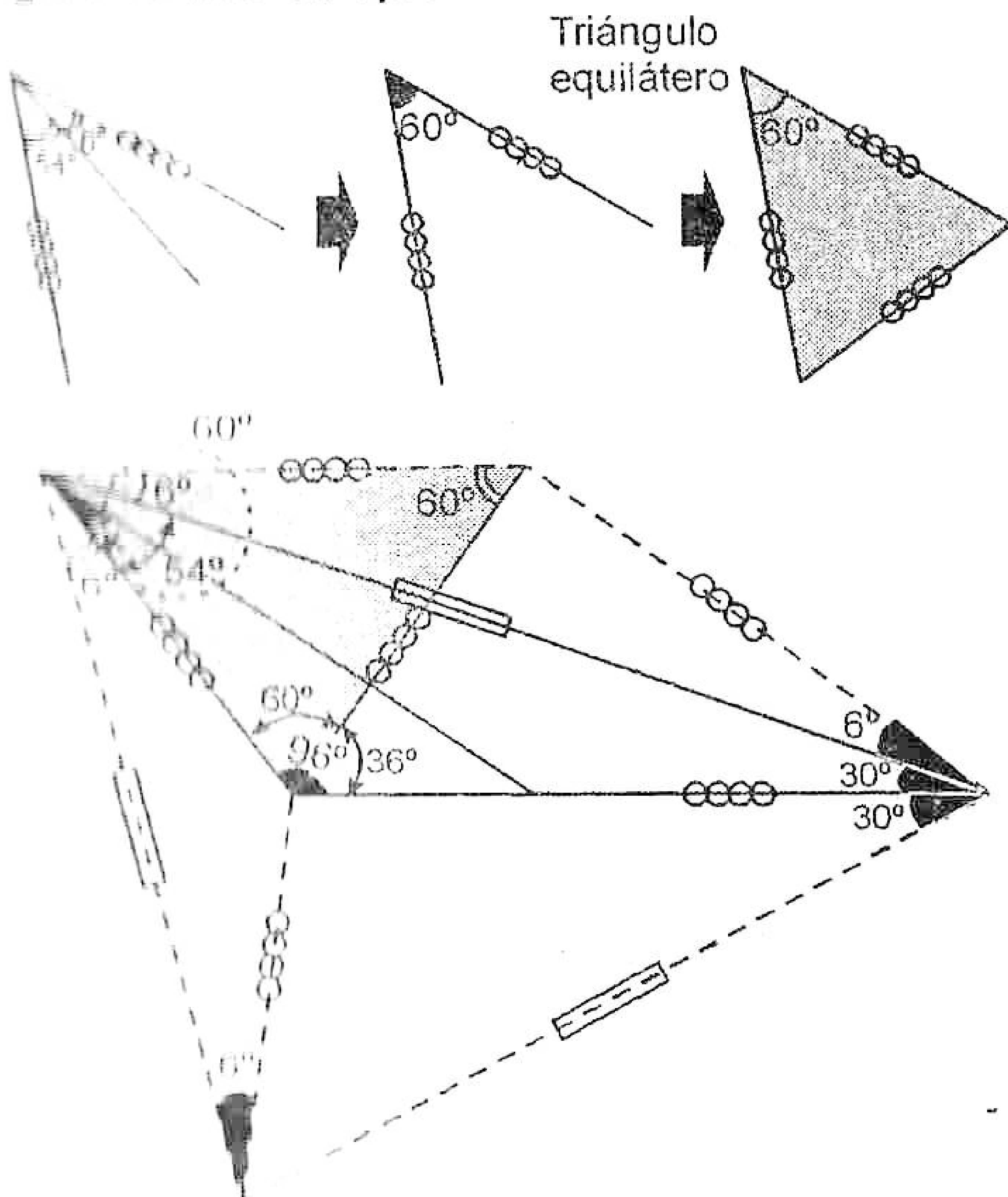
En el triángulo equilátero formado, se cumple:



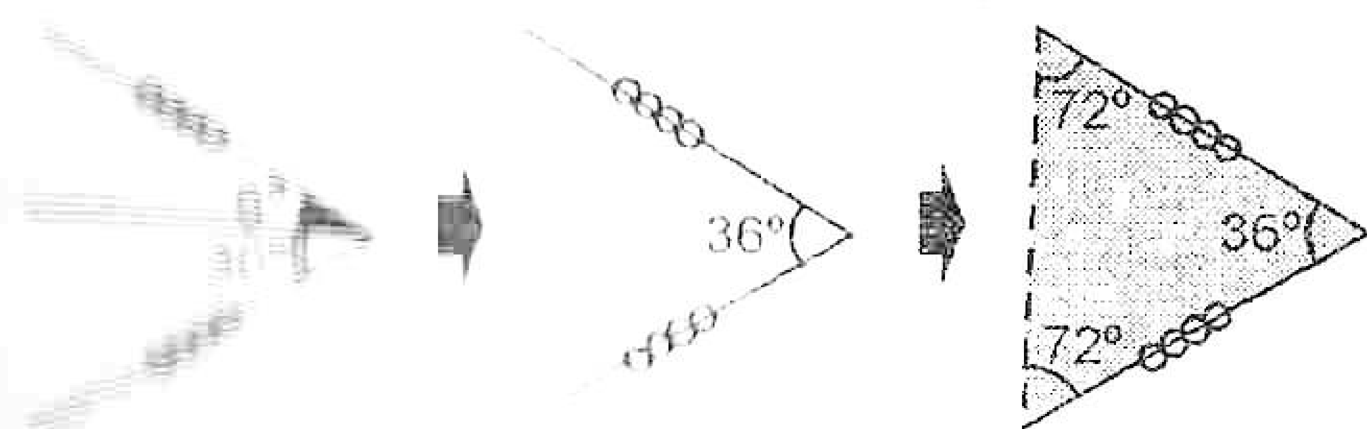
Paso N° 3
Ahora buscamos un triángulo externo congruente al triángulo isósceles obtenido en el paso anterior.

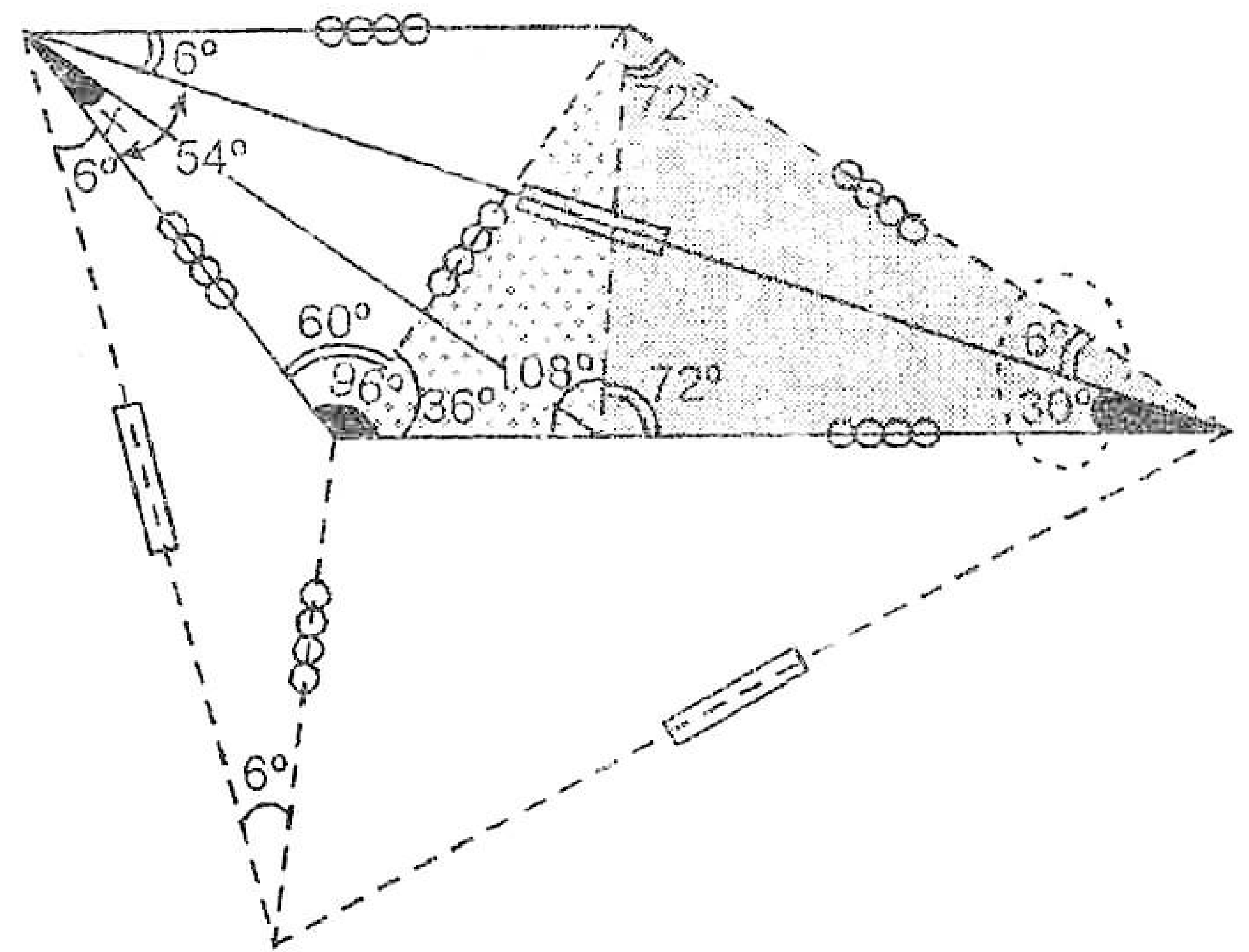


Paso N° 4: Y observa que se obtiene la siguiente figura donde cumple:

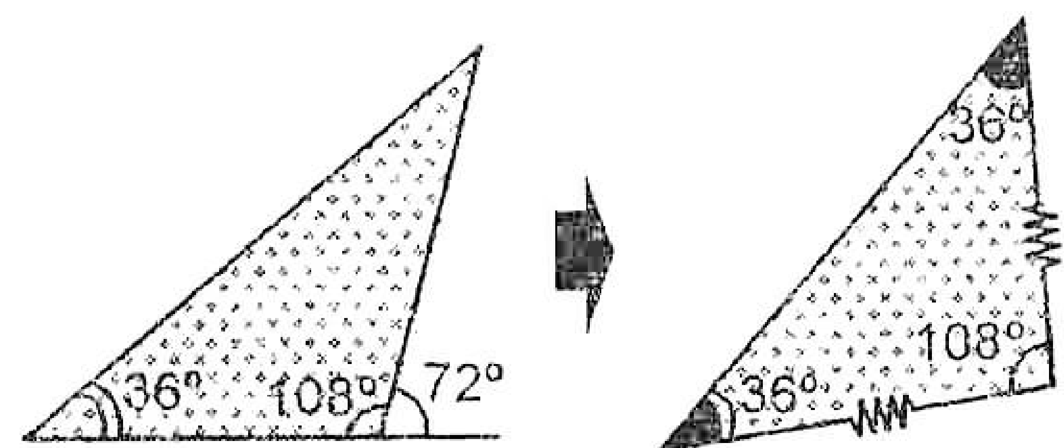


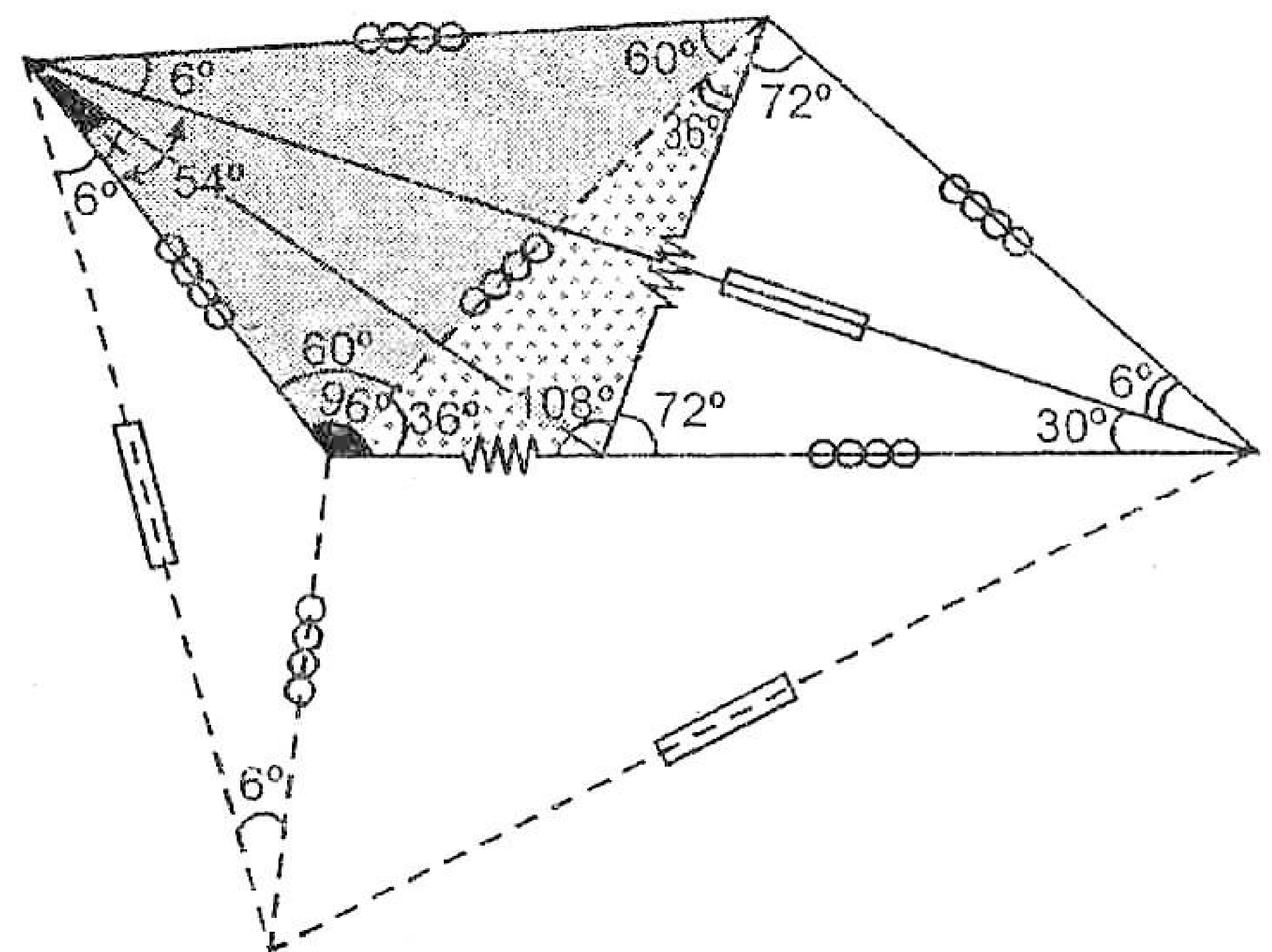
Paso N° 5: En la figura se obtiene un triángulo isósceles, de la siguiente manera:



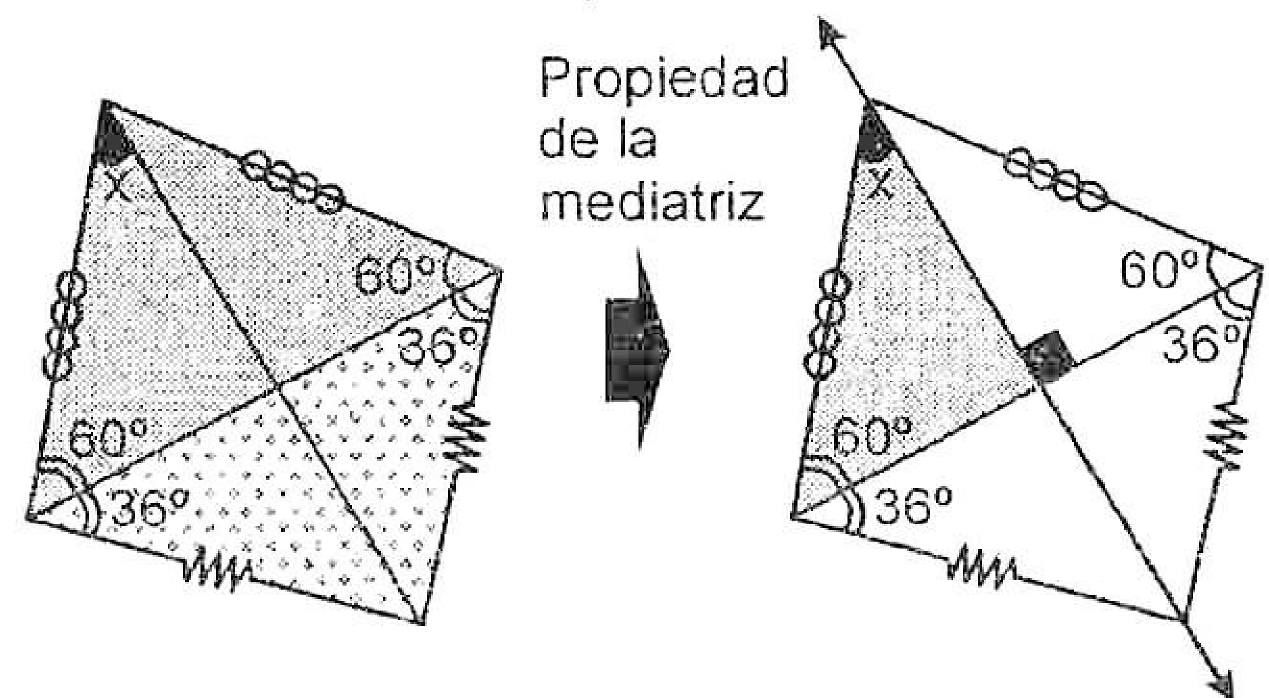


Se observa también un nuevo triángulo isósceles:





Con los trazos realizados se obtiene la siguiente figura, donde se cumple:

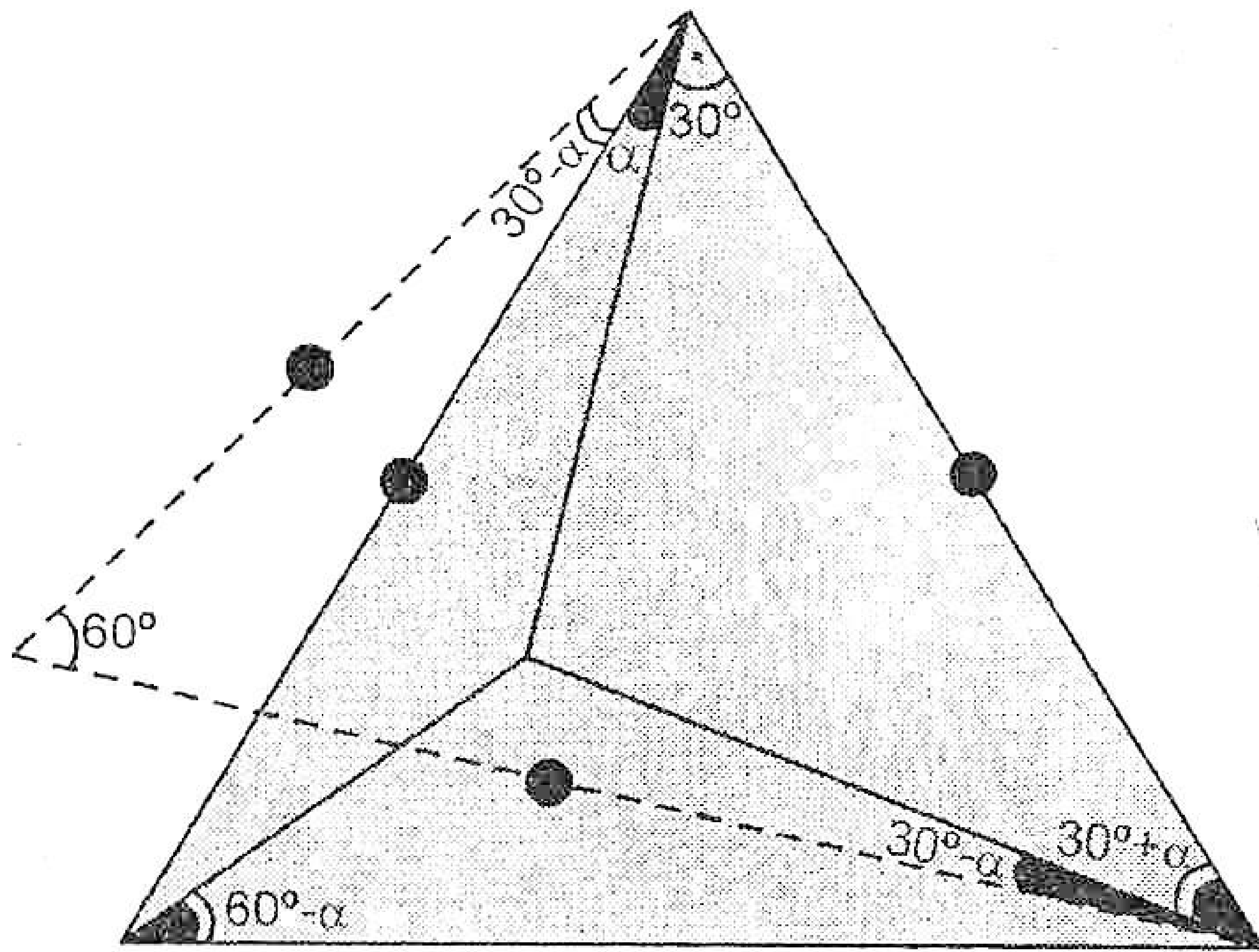


$\therefore \; x = 30°$

Solución Nº 26

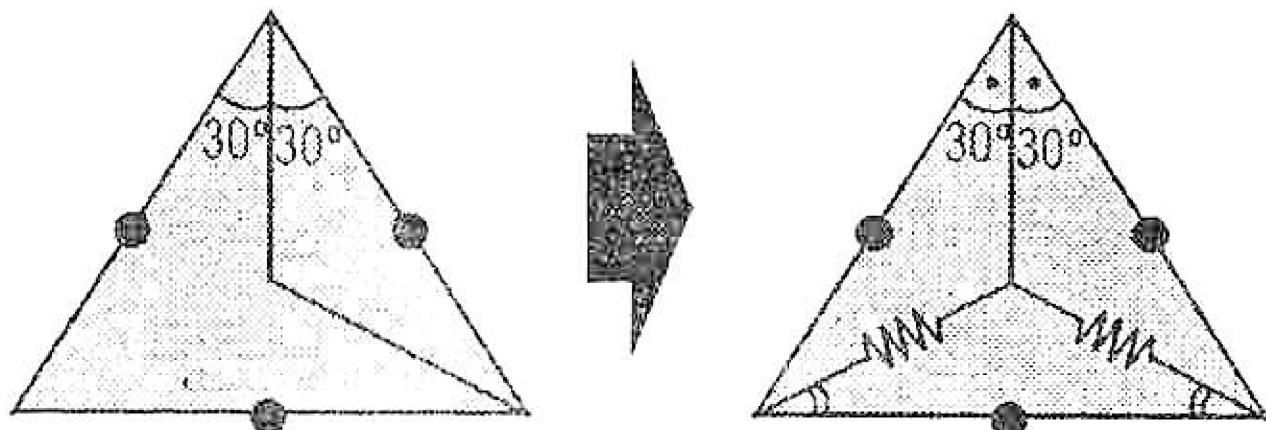
Paso Nº 1 :

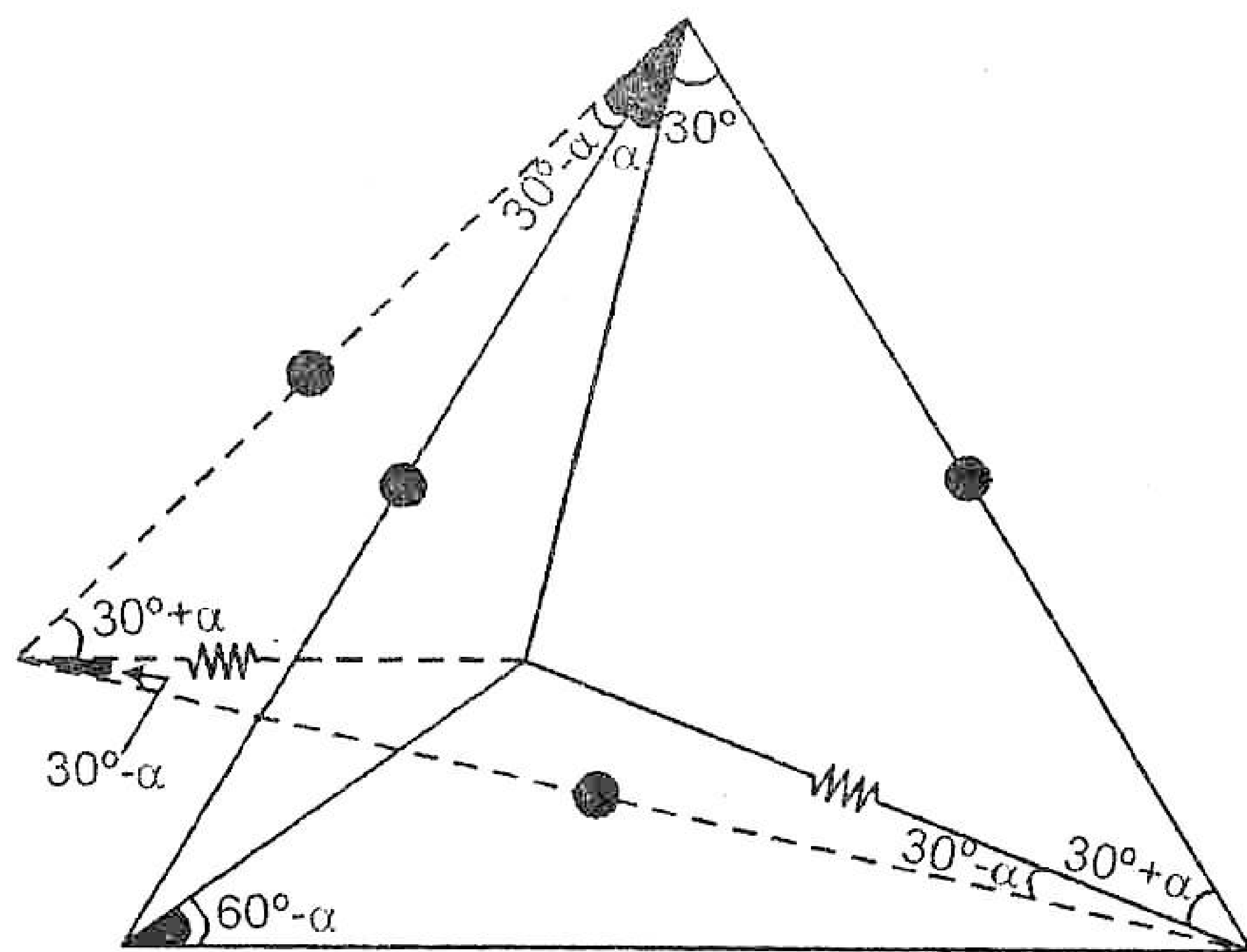
Se observa un ángulo de 30º entonces trazamos un triángulo equilátero externamente de la siguiente manera:



Paso Nº 2:

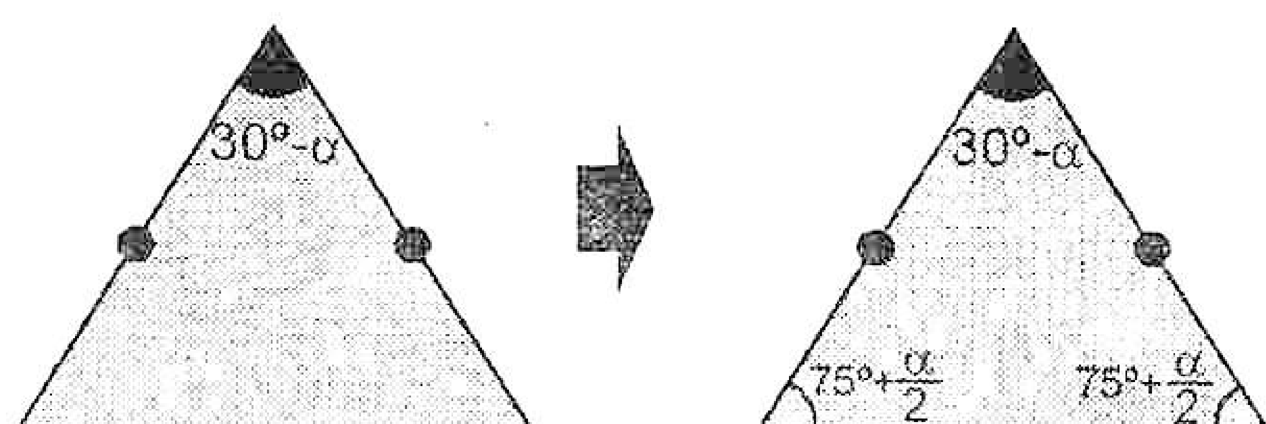
En el triángulo equilátero trazado, se cumple:

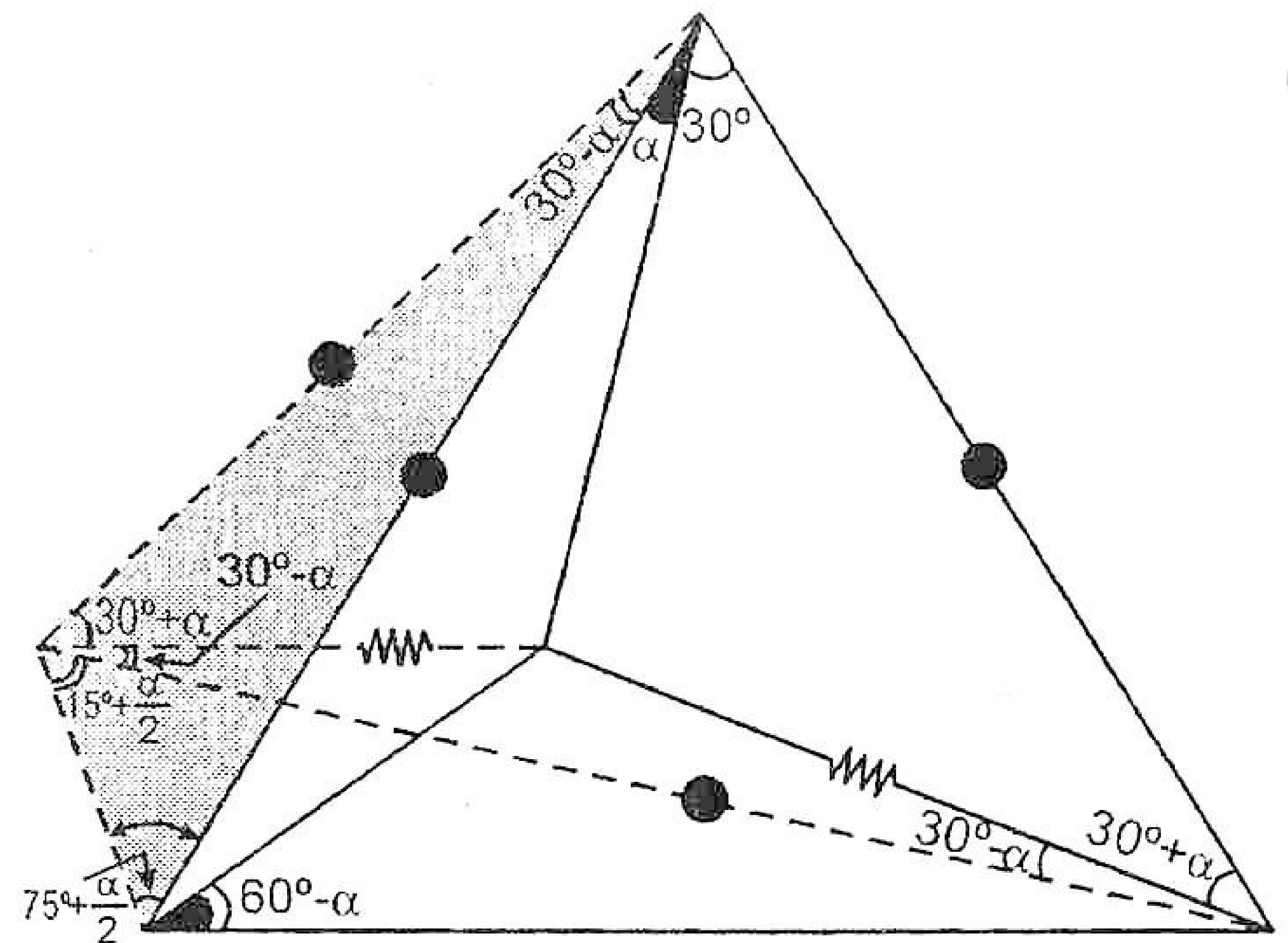




Paso Nº 3:

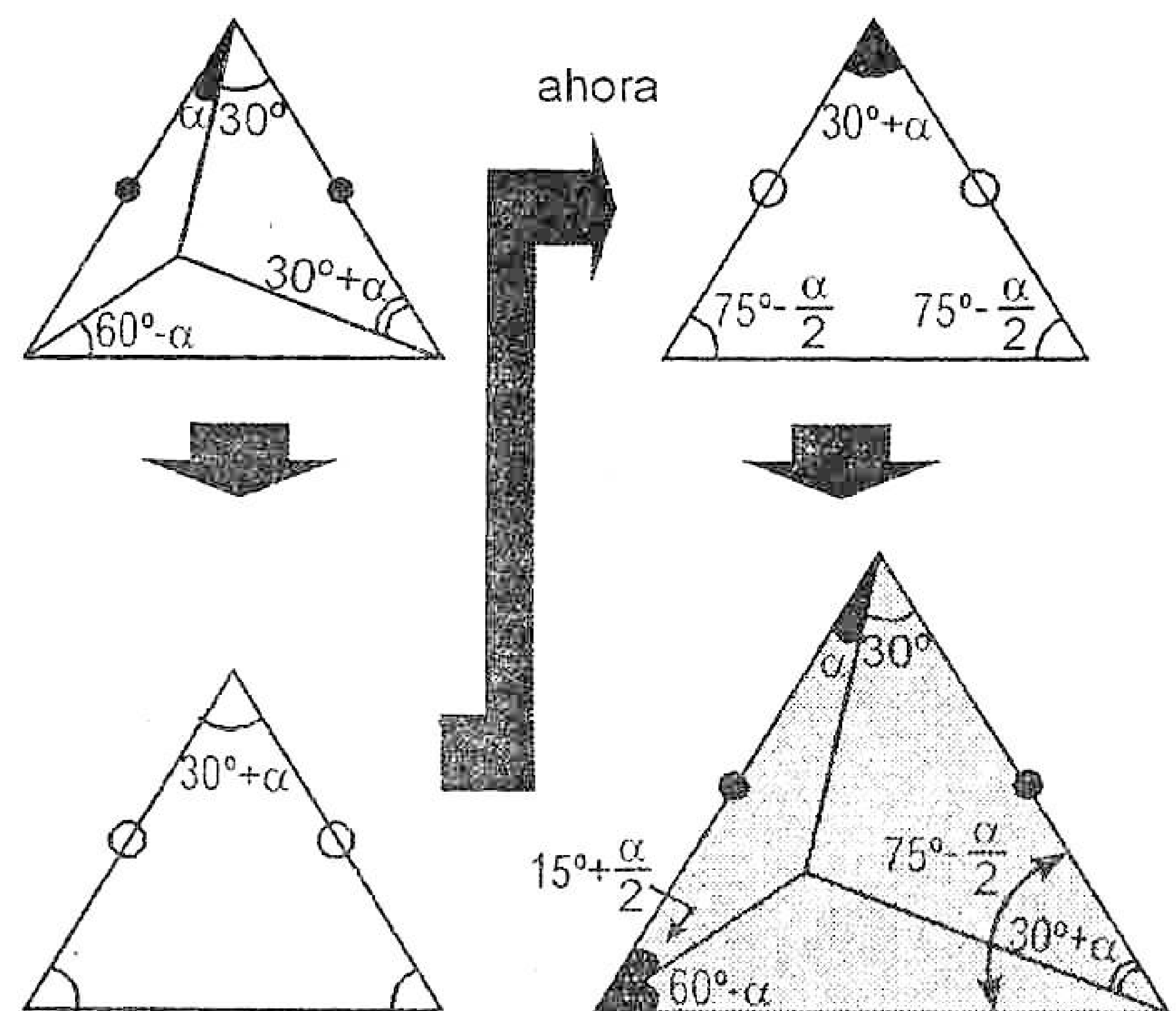
Observamos un triángulo isósceles:

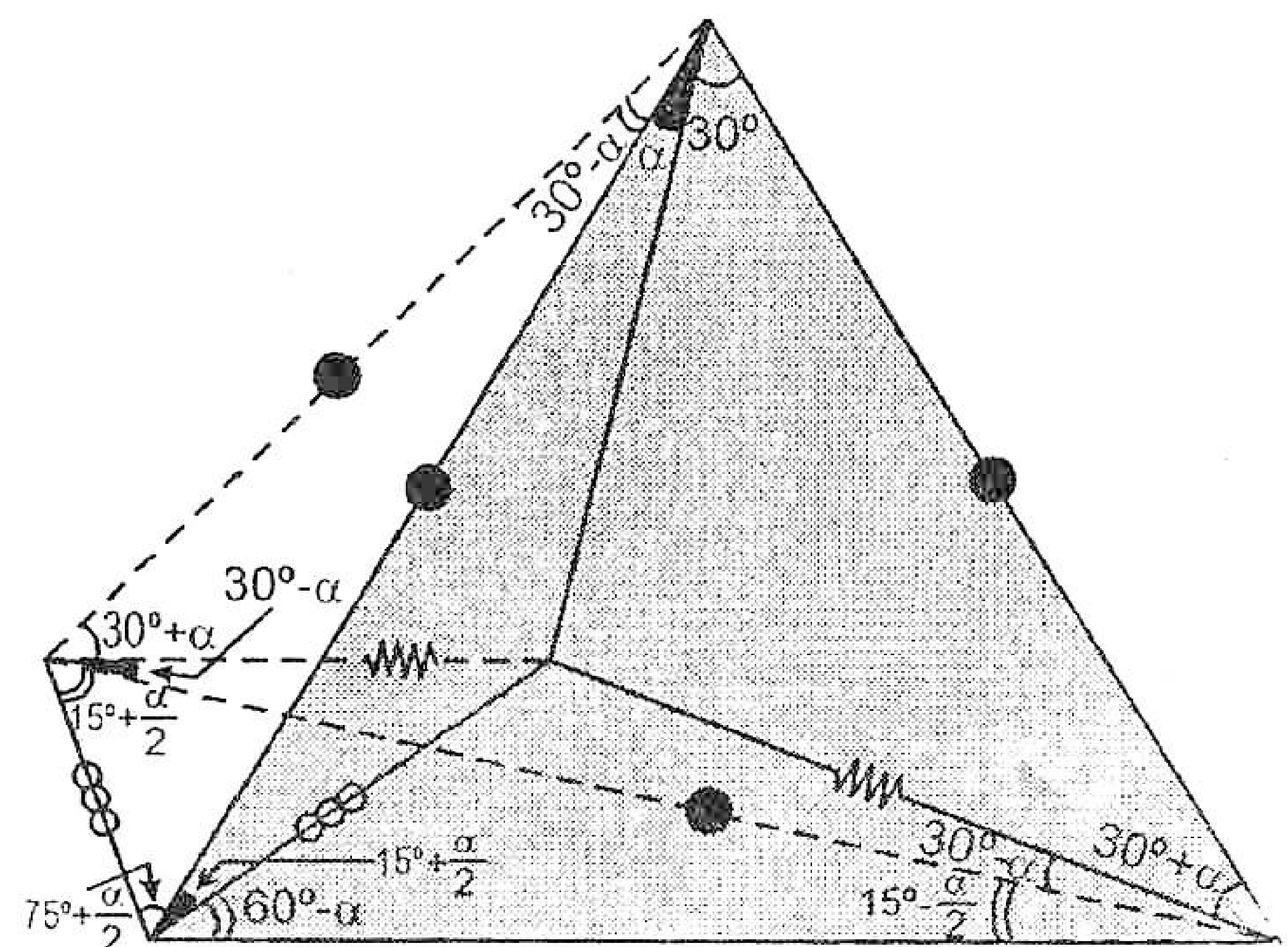




Paso Nº 4:

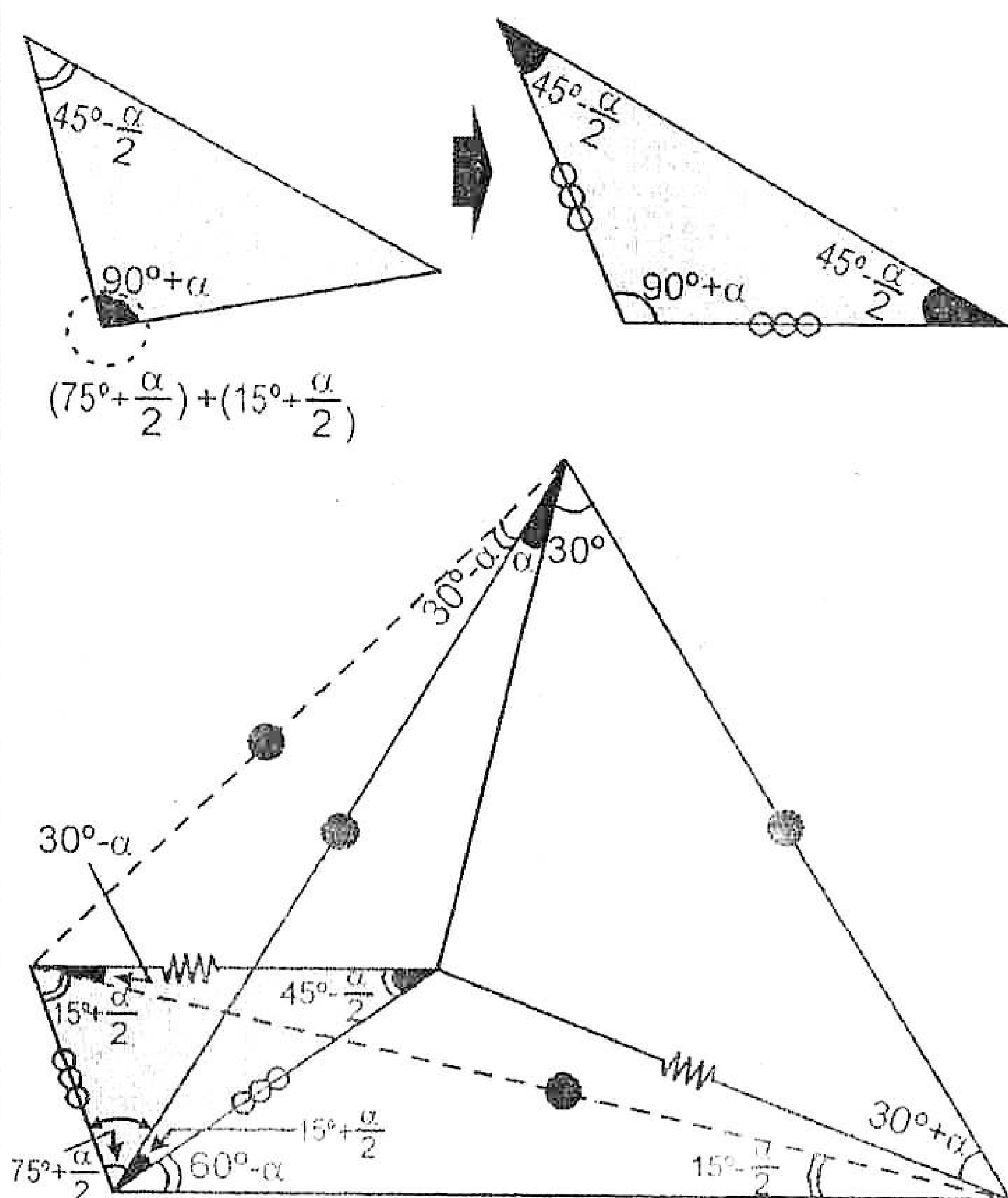
Completando ángulos en el triángulo original.



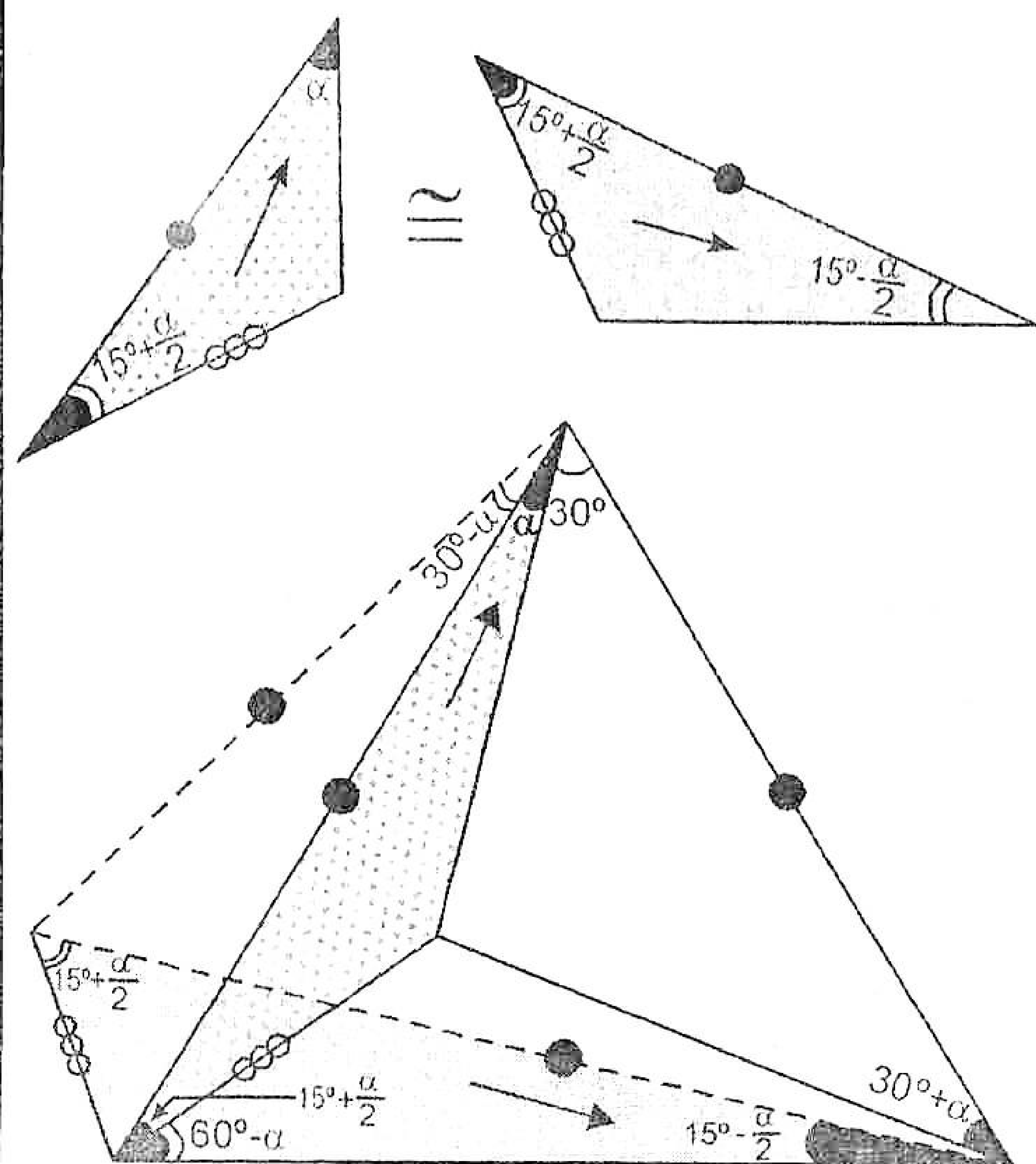


Aquello que la oruga llama fin del mundo, el maestro lo llama mariposa. (Richad Bach)

Paso N° 5:
Se observa el siguiente triángulo sombreado en la figura:



Paso N° 6:
Se obtiene dos triángulos congruentes caso (L.A.L.)



Por principio de congruencia: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".

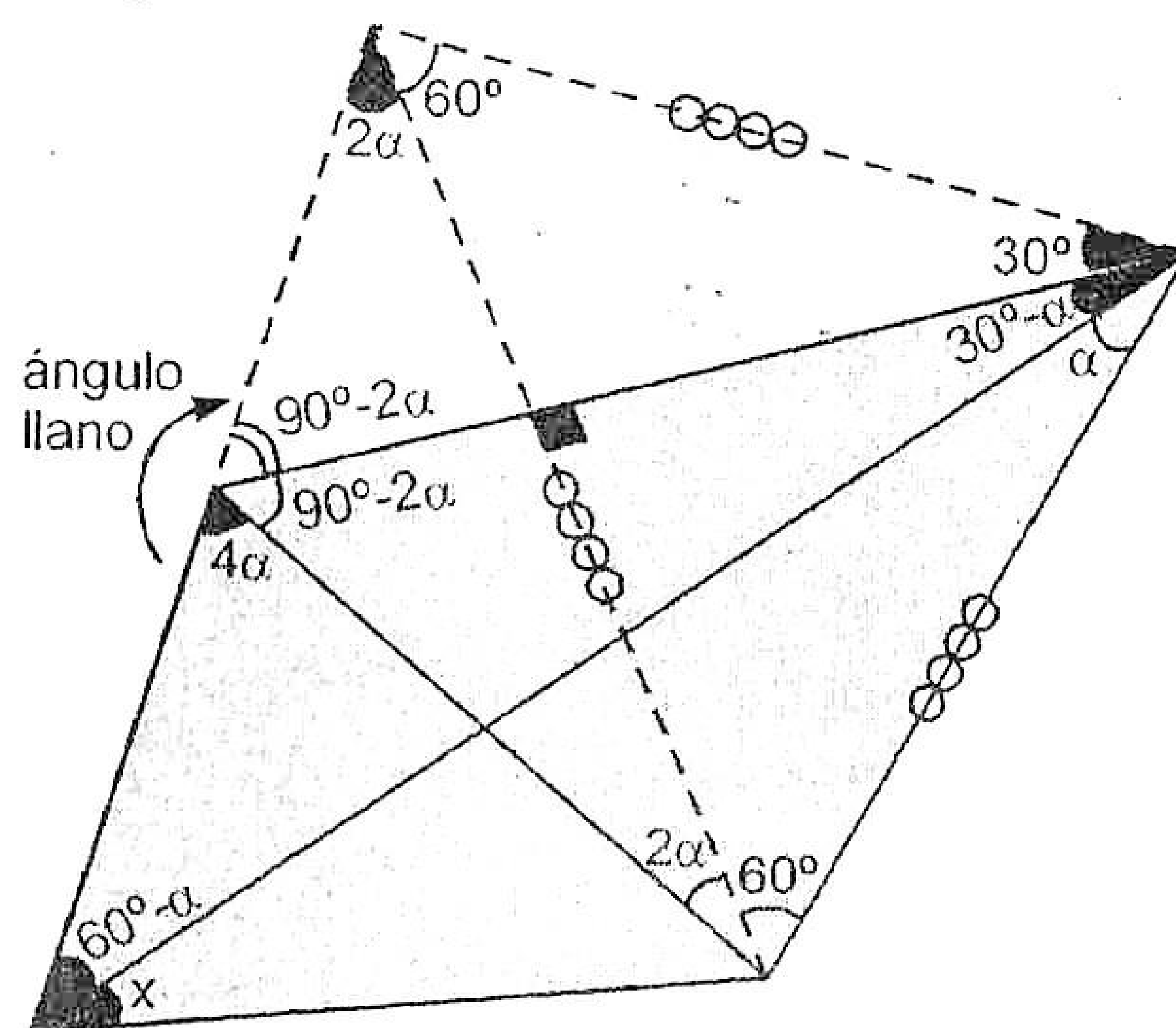
$$\therefore \quad \alpha = 15° - \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{3\alpha}{2} = 15$$

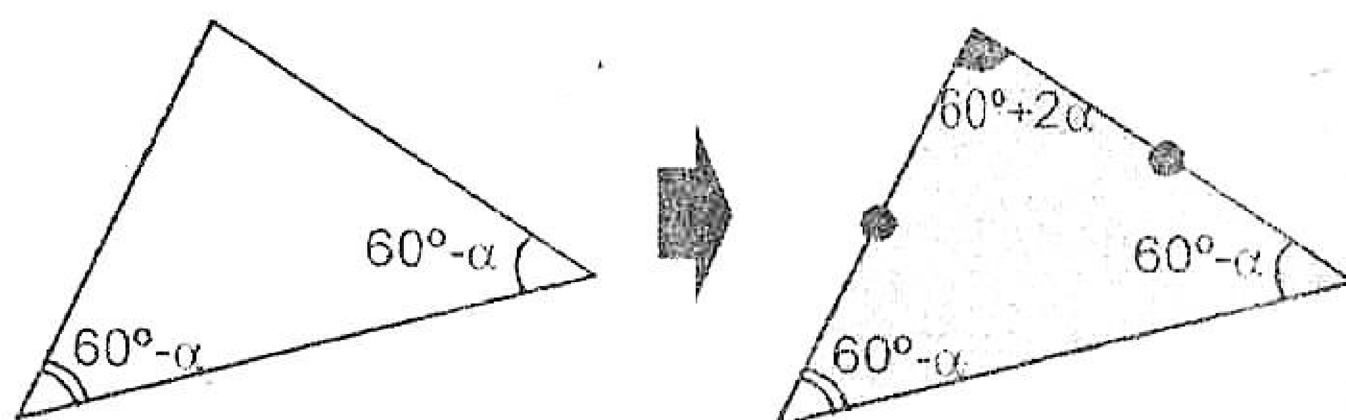
$$\alpha = 10°$$

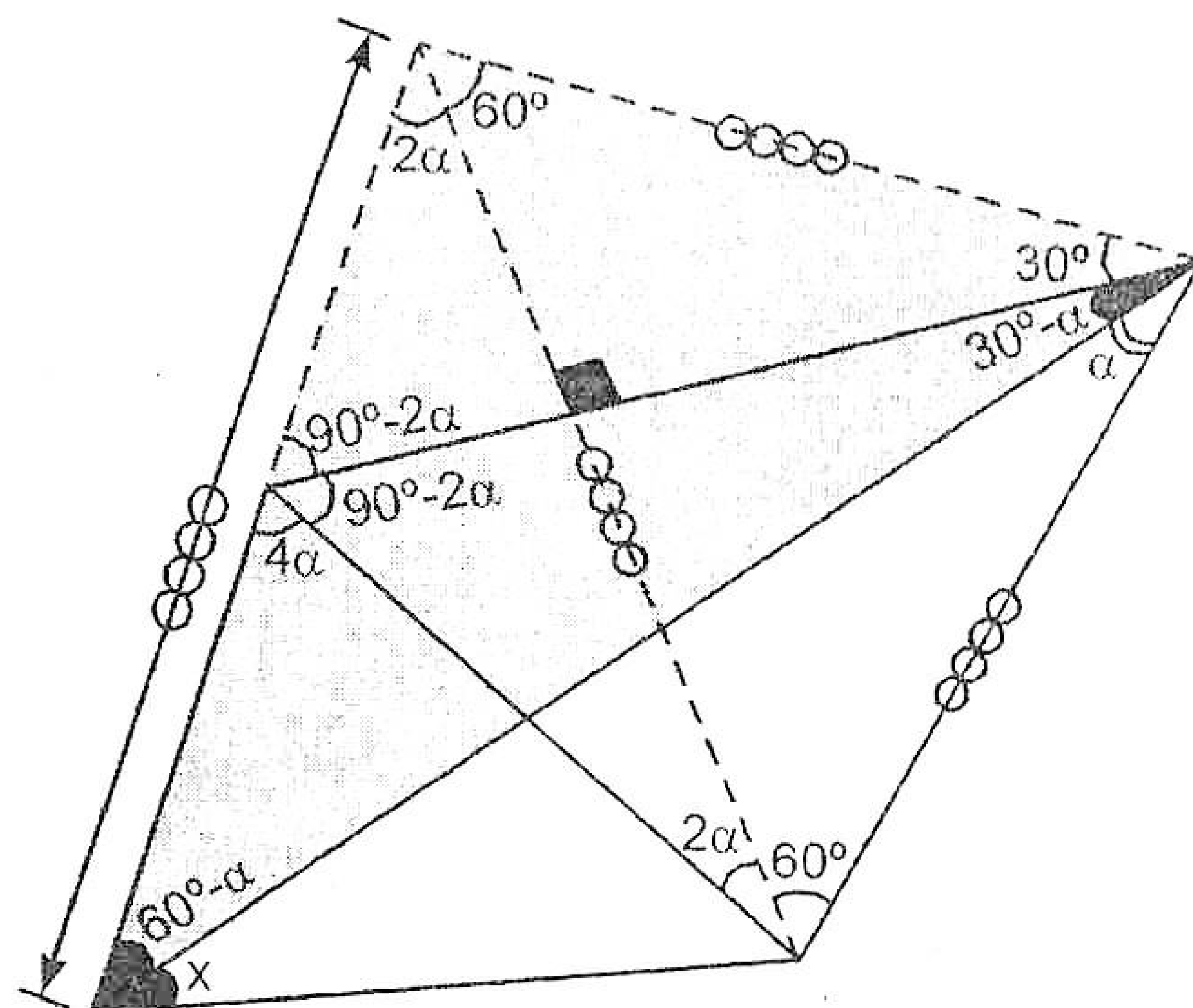
Solución N° 27

Paso N° 1: Construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:

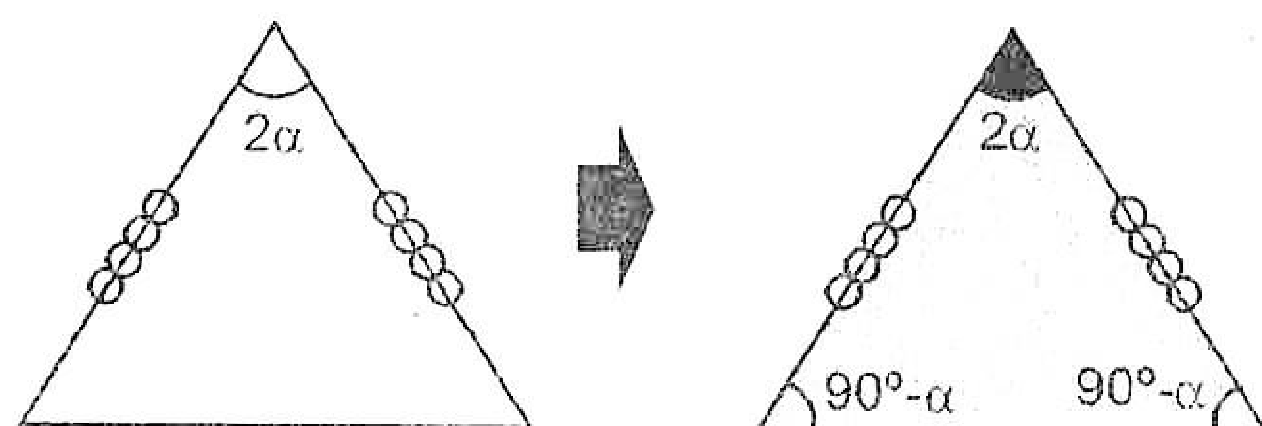


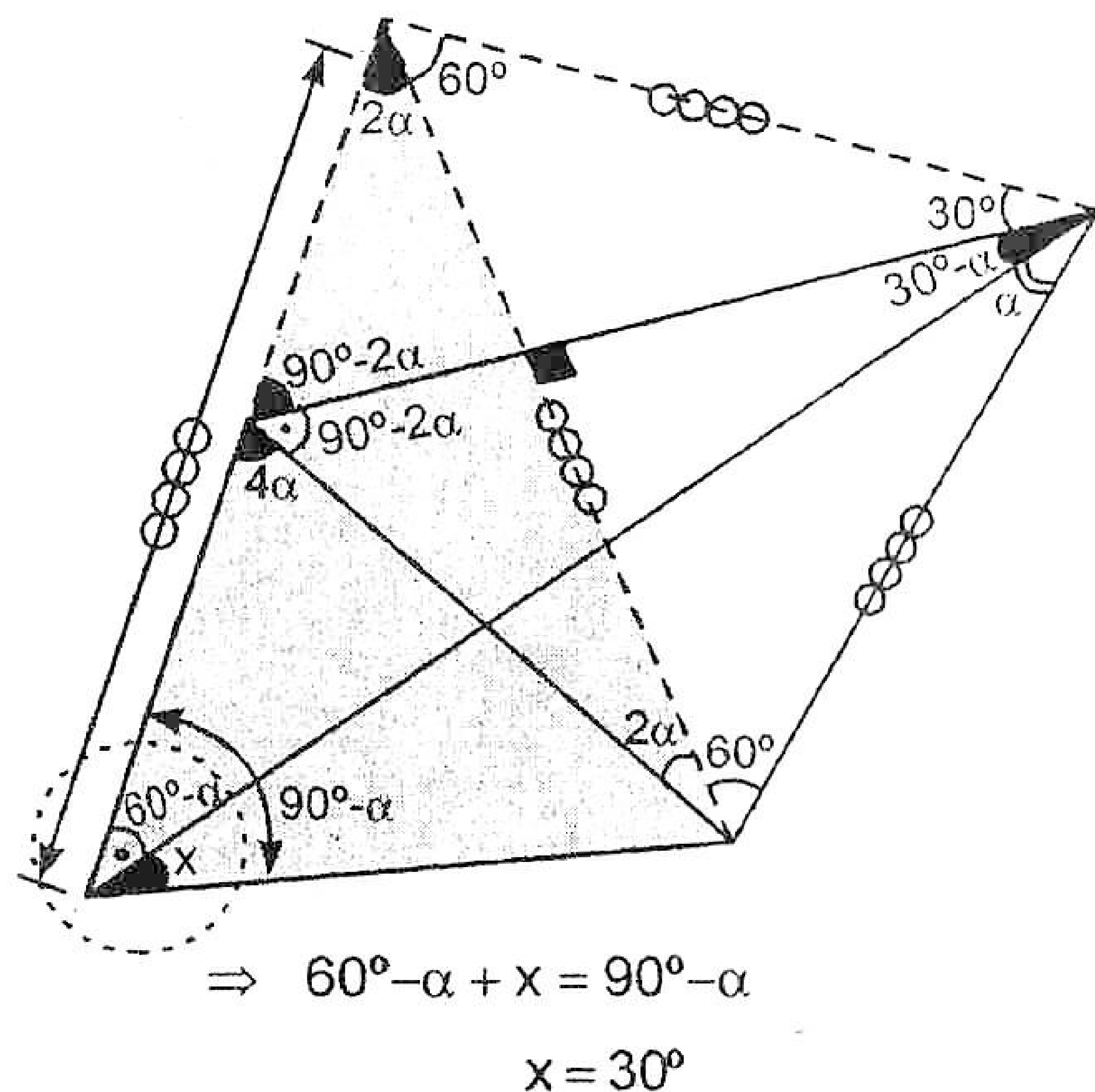
Paso N° 2: Se observa un triángulo isósceles.





Paso N° 3: Se tiene un triángulo isósceles.





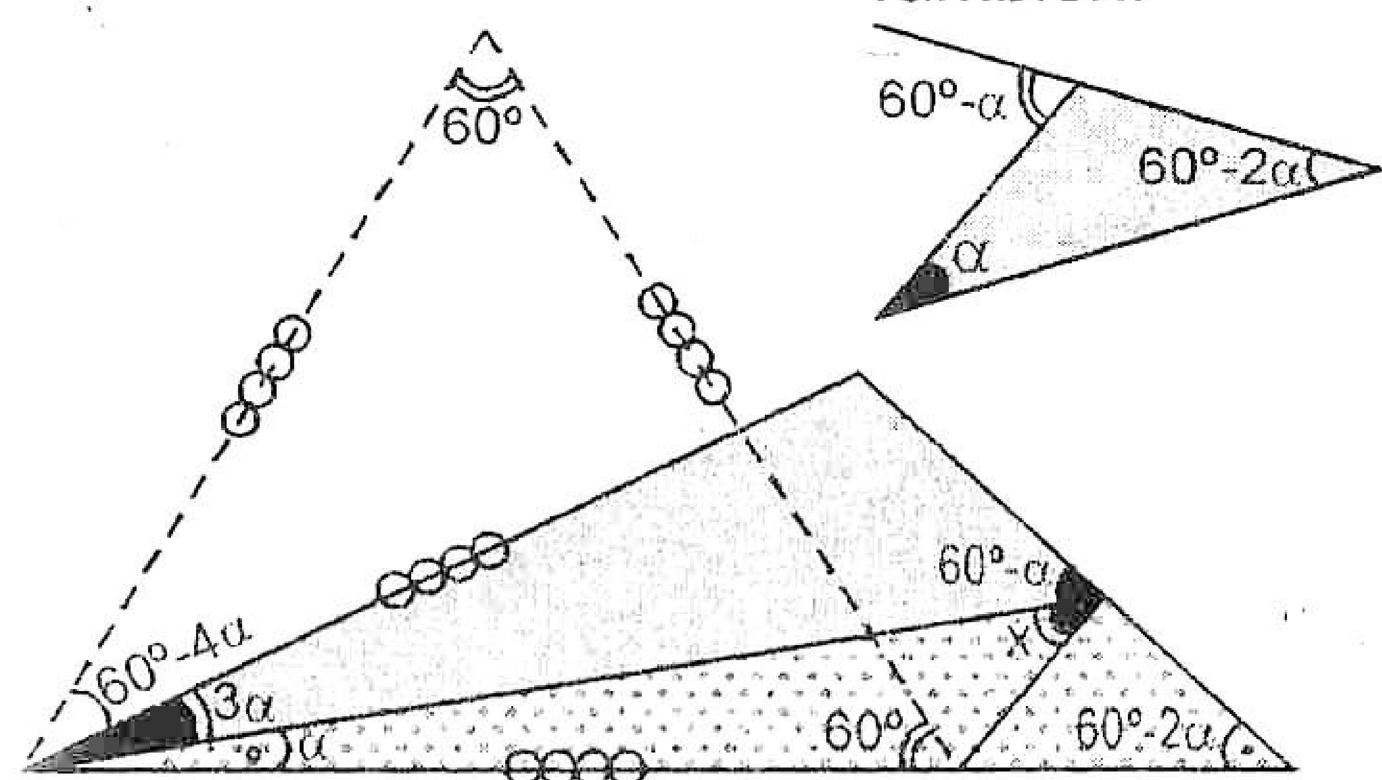
$\Rightarrow \quad 60° - \alpha + x = 90° - \alpha$

$x = 30°$

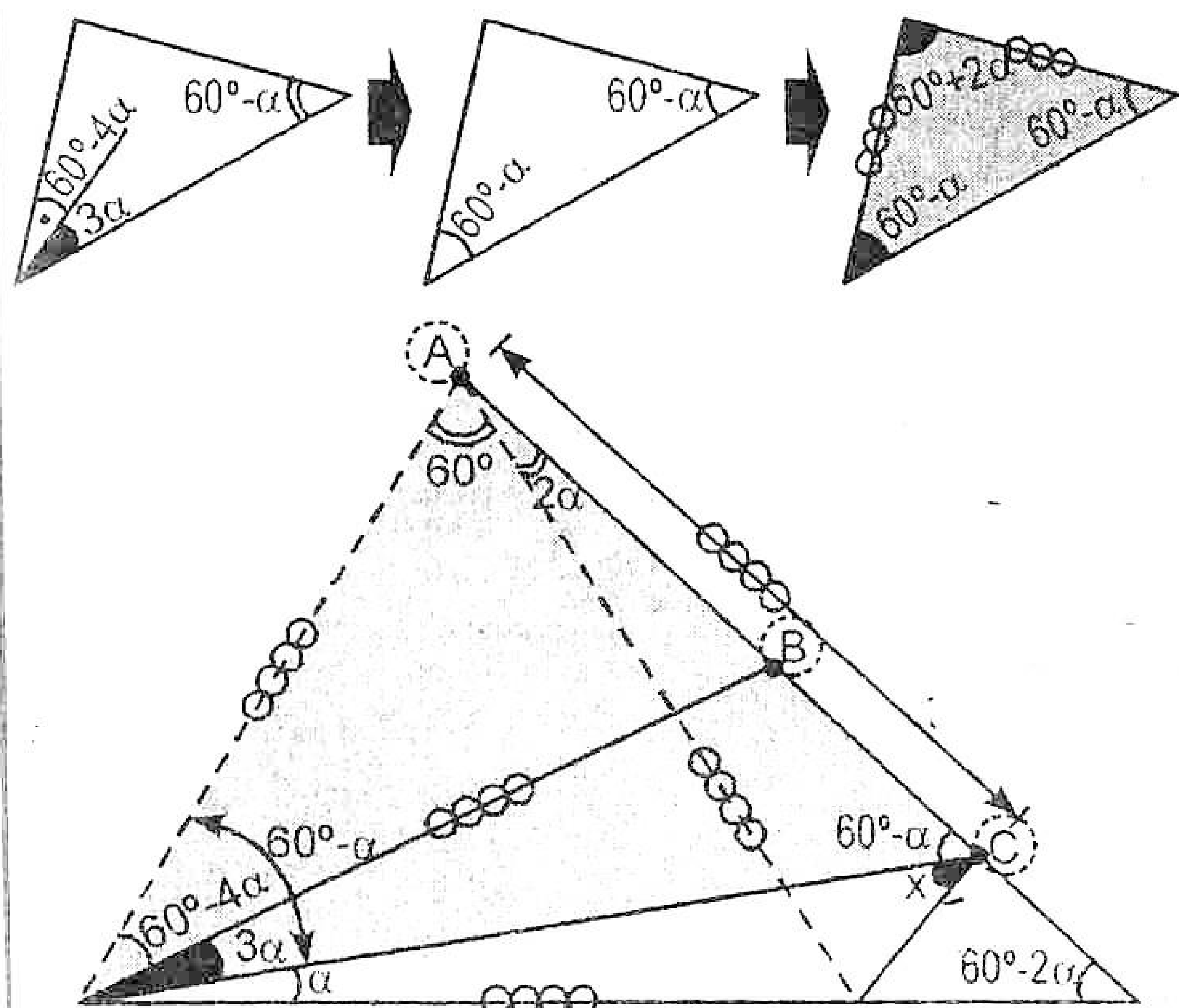
Solución Nº 28

Paso Nº 1:
Aqui construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera:

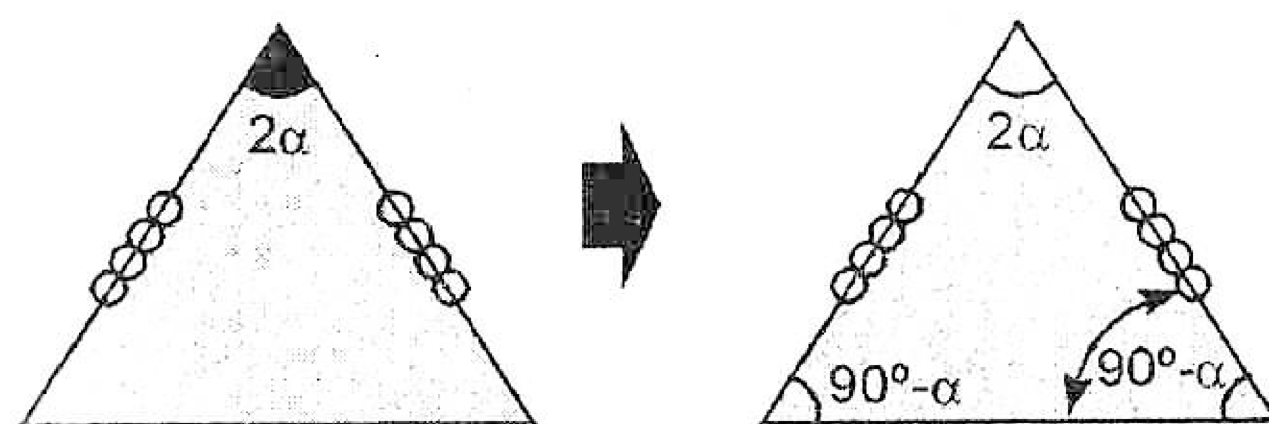
También:

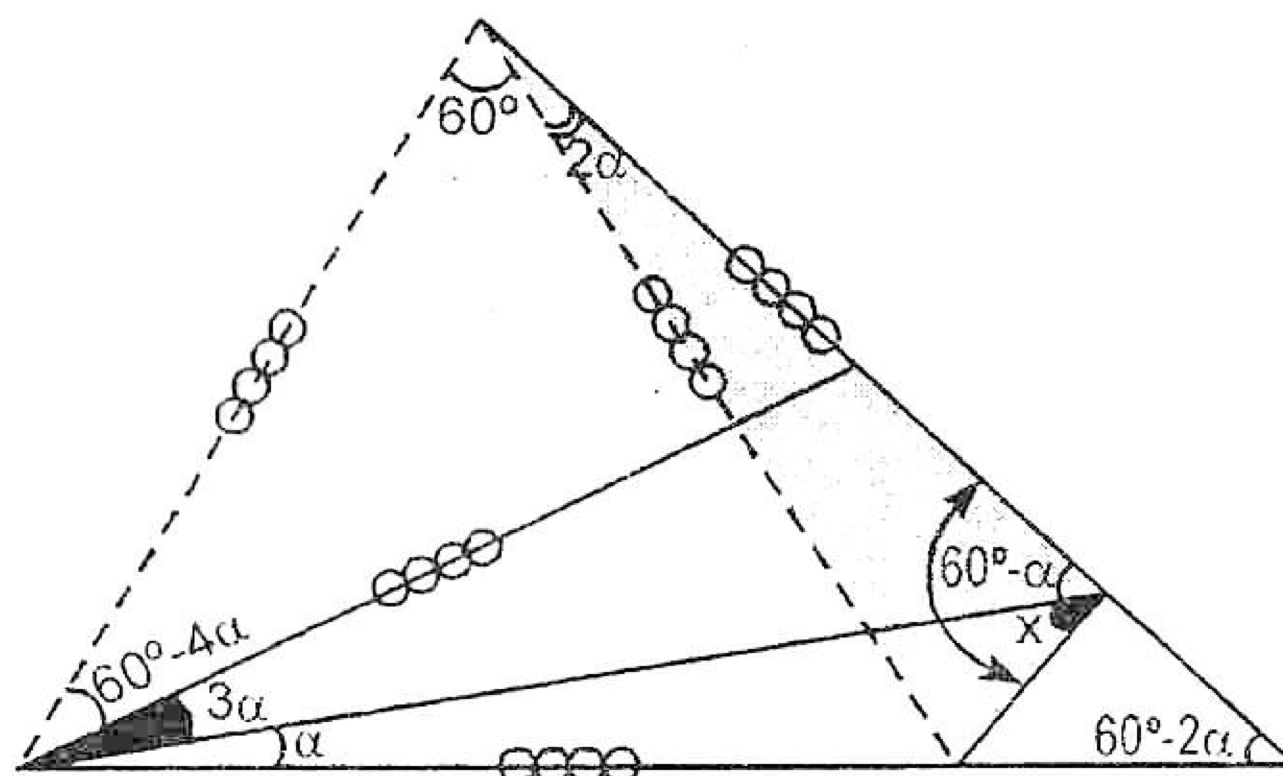


Paso Nº 2:
Se observa en el gráfico que los puntos A, B y C son colineales.



Paso Nº 3:
Ahora se observa:





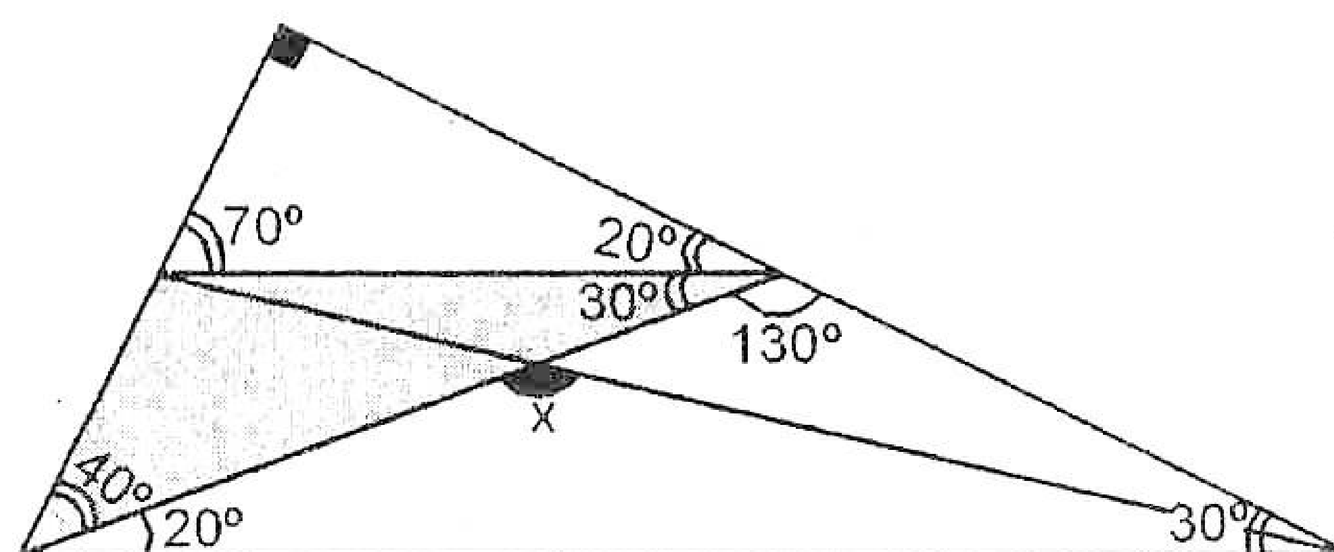
Entonces de la figura sombreada, se cumple:

$60° - \alpha + x = 90° - \alpha$

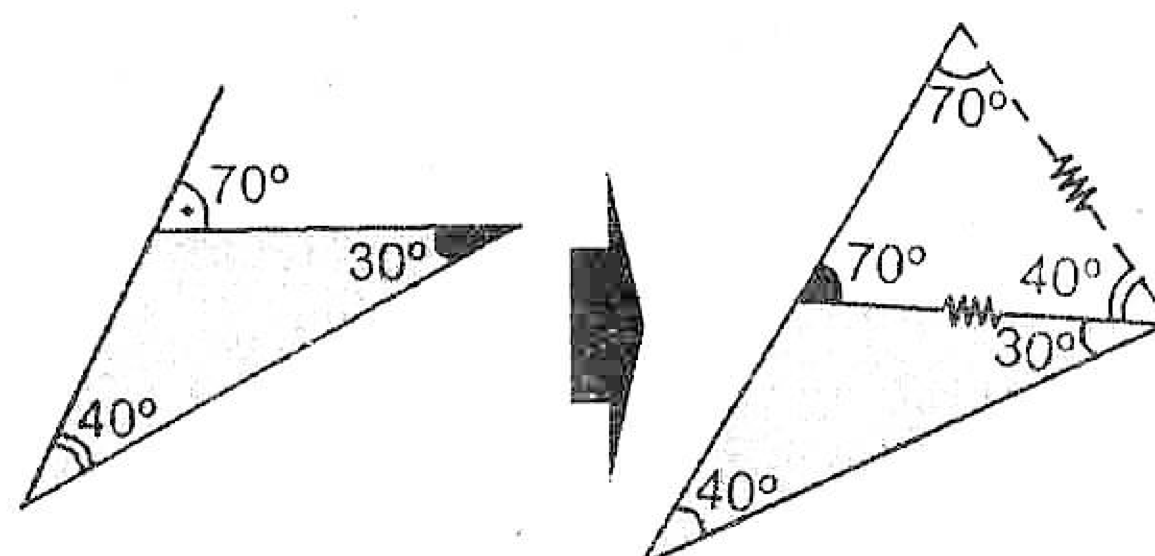
$x = 30°$

Solución Nº 29

En la figura completamos los ángulos internos.

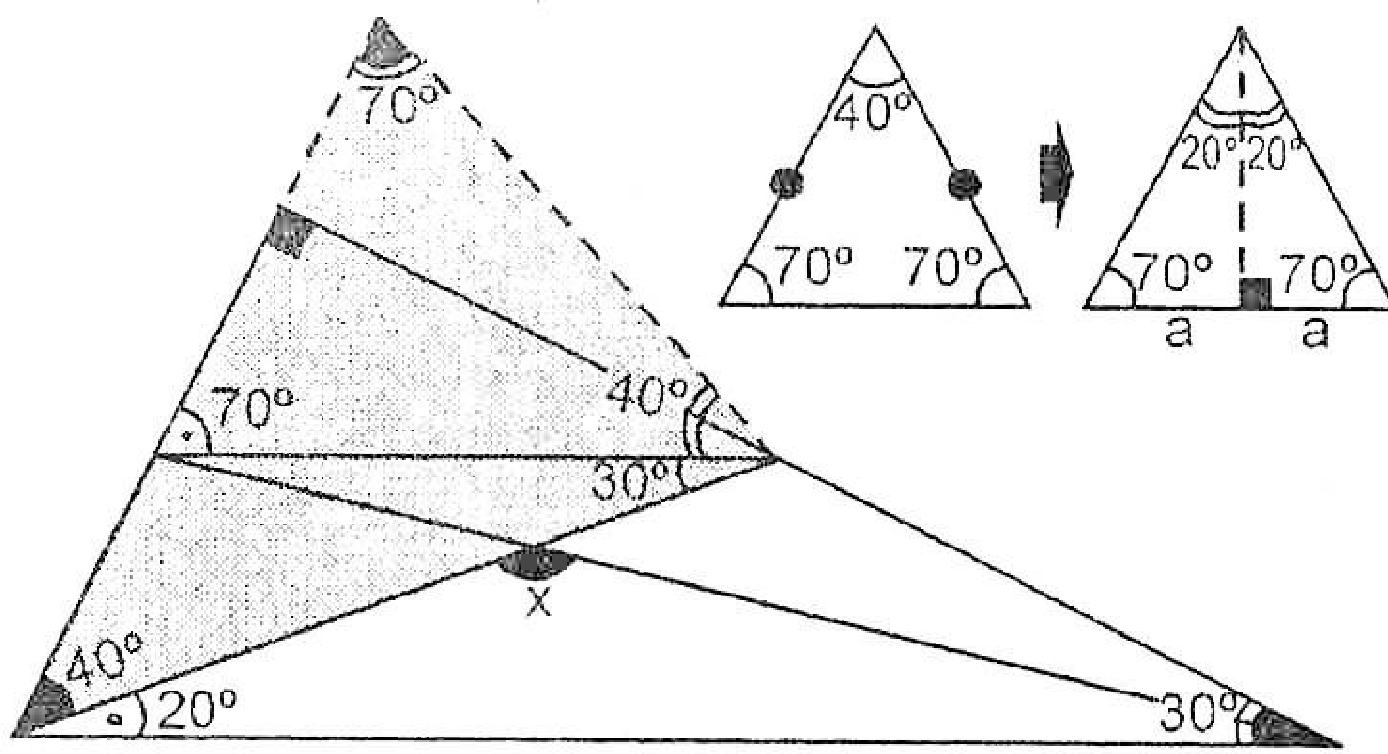


Paso Nº 1: Realizamos el siguiente trazo en la figura:

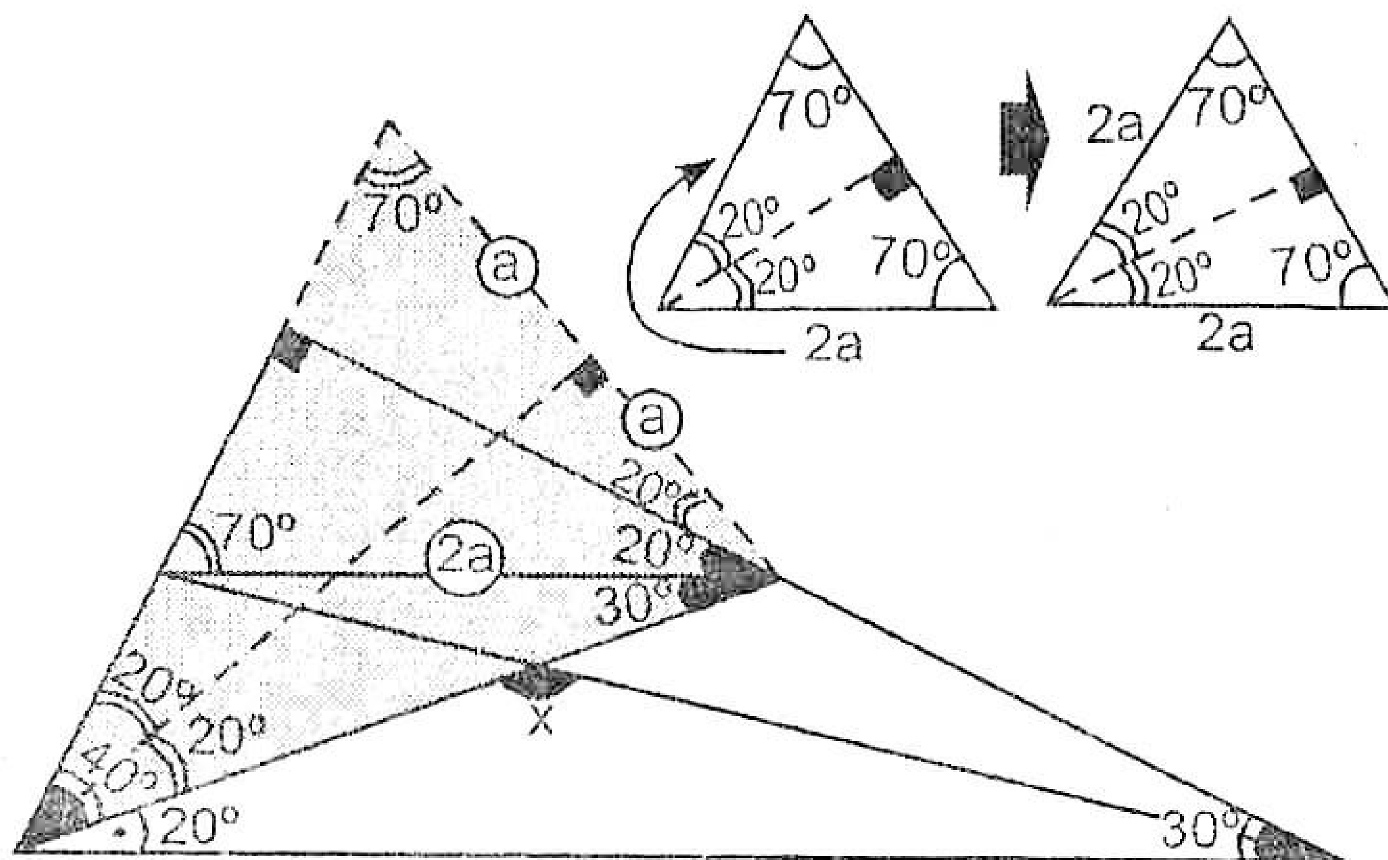


Existe sólo dos maneras de vivir tu vida, una es como si nada fuera un milagro, la otra es como si toda fuese un milagro. (Albert Einstein)

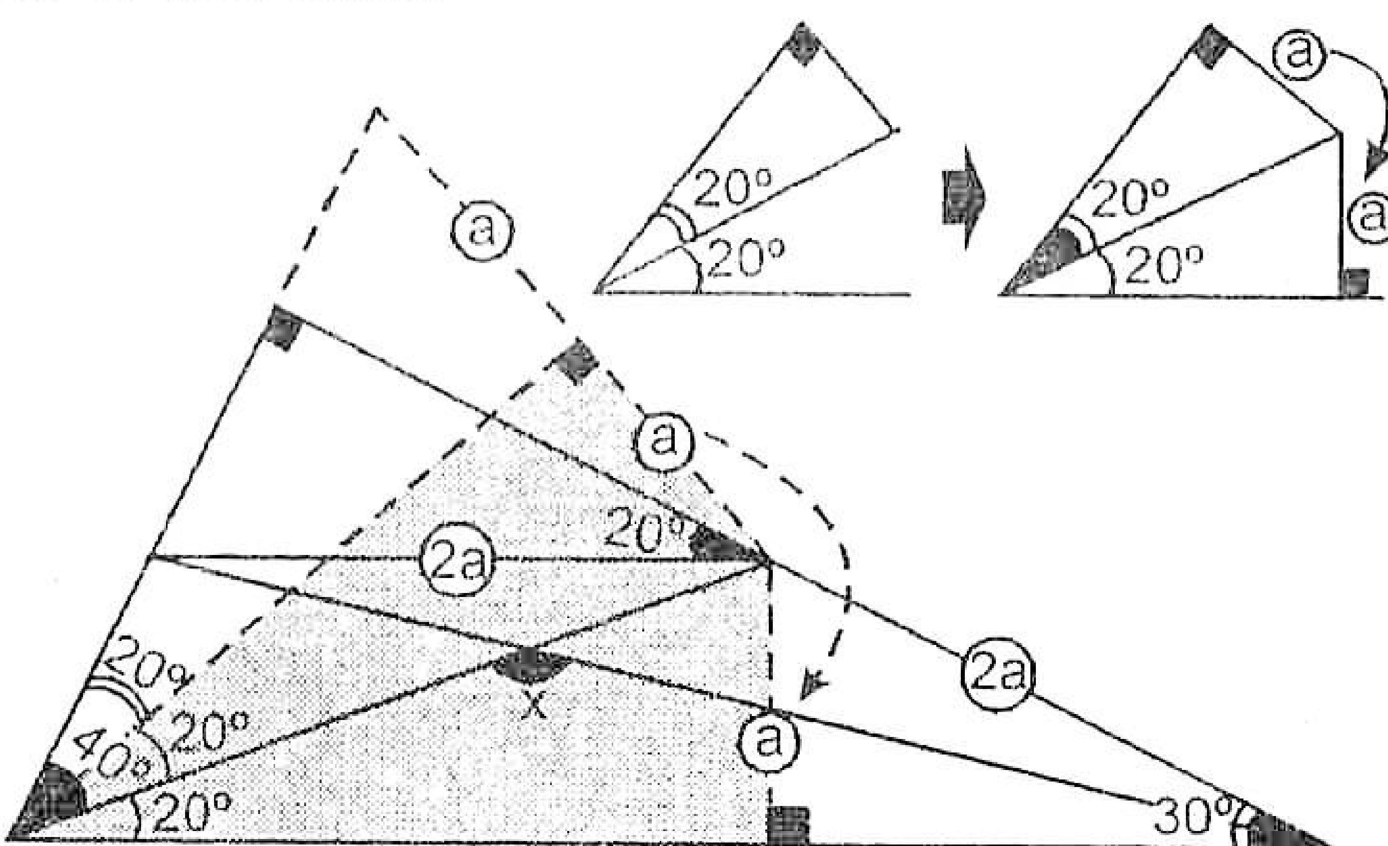
Donde se obtiene triángulos isósceles en la figura mostrada.



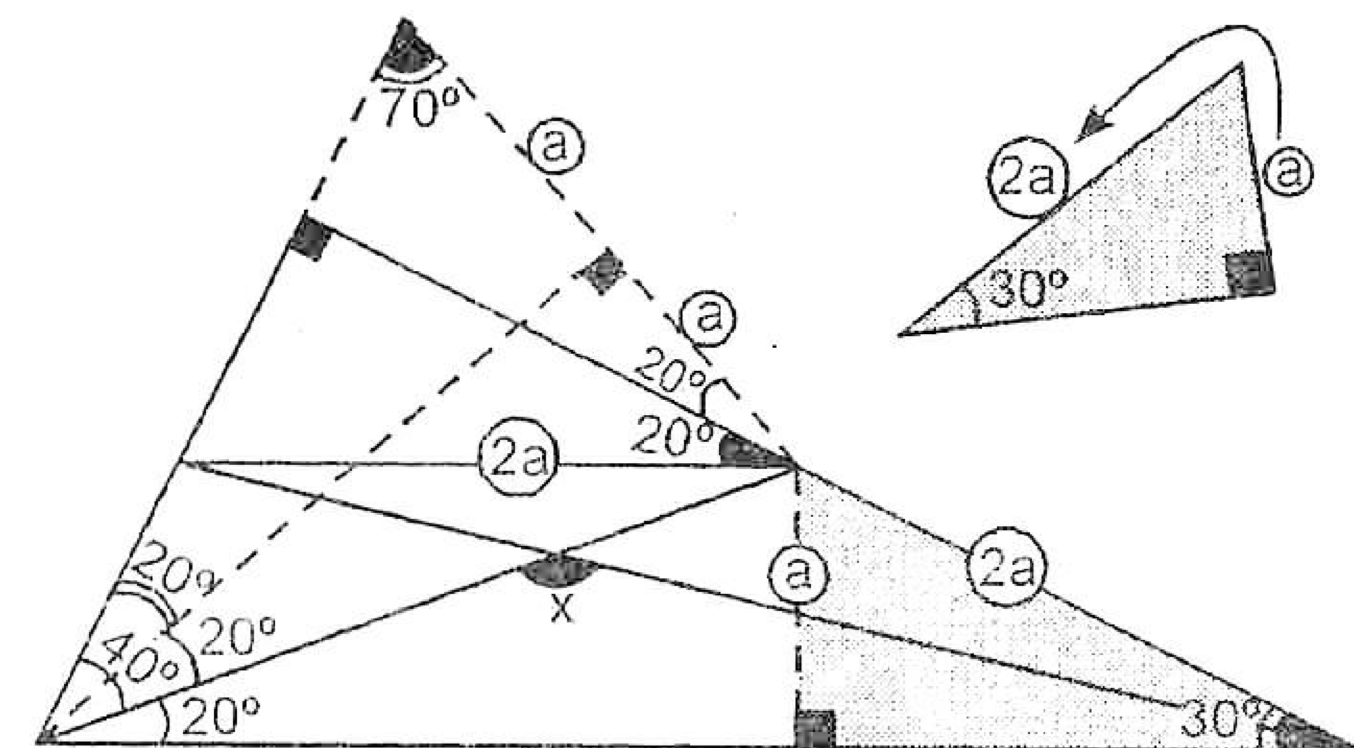
Paso Nº 2: Luego se observa:



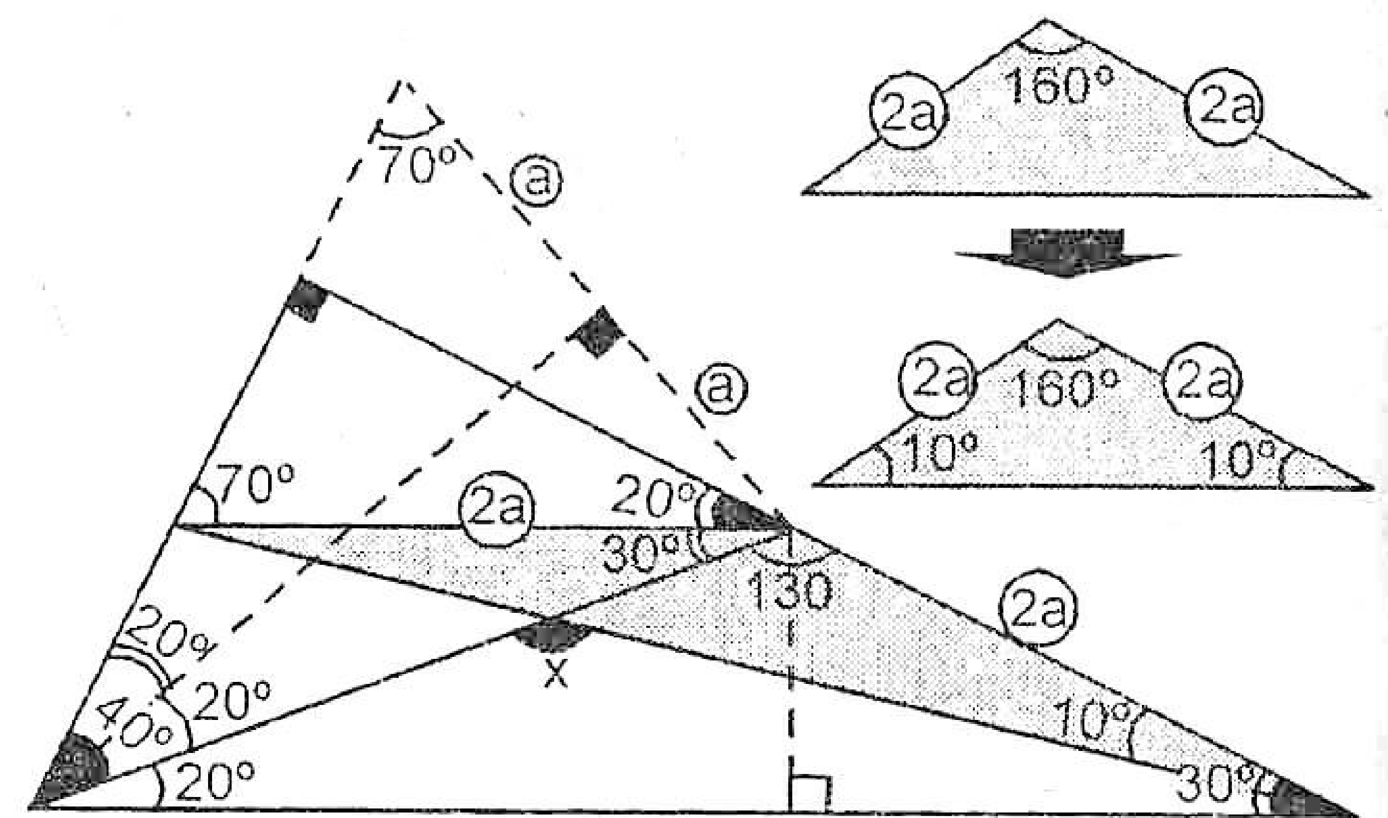
Paso Nº 3: En la figura se aplica la propiedad de la bisectriz.

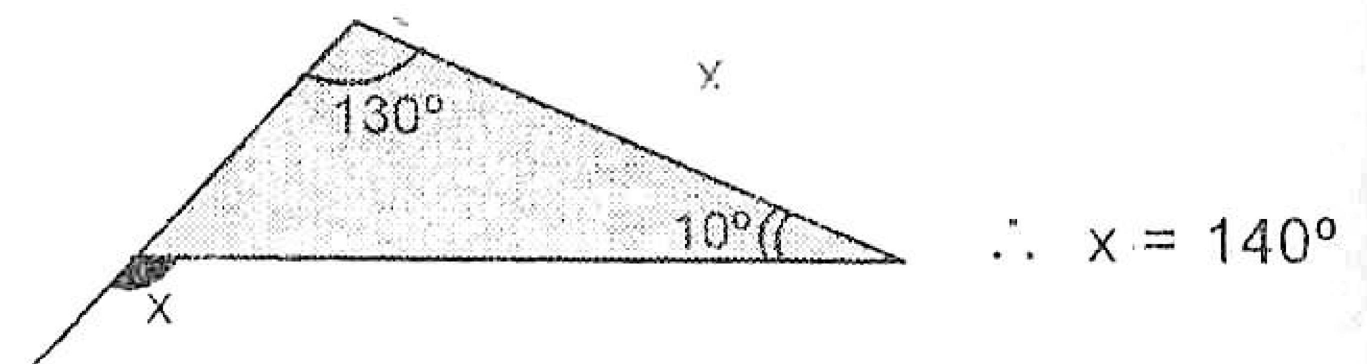


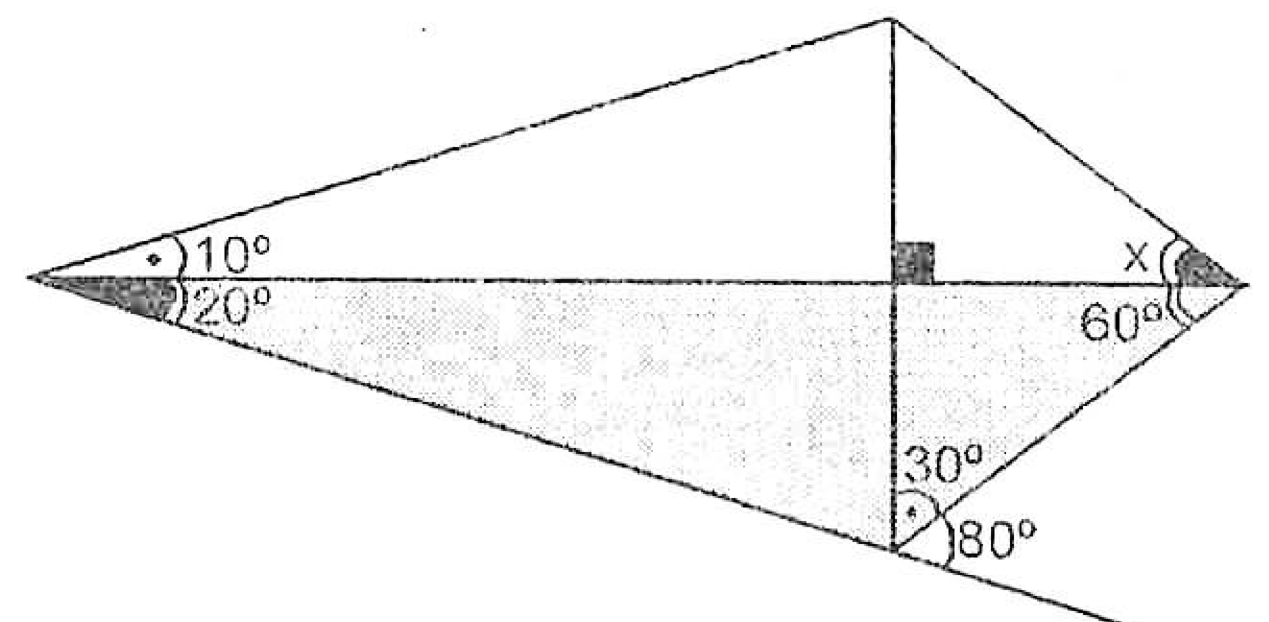
Paso Nº 4: Se observa un triángulo rectángulo notable de (30° y 60°)



Paso Nº 5: Se observa un nuevo triángulo isósceles:

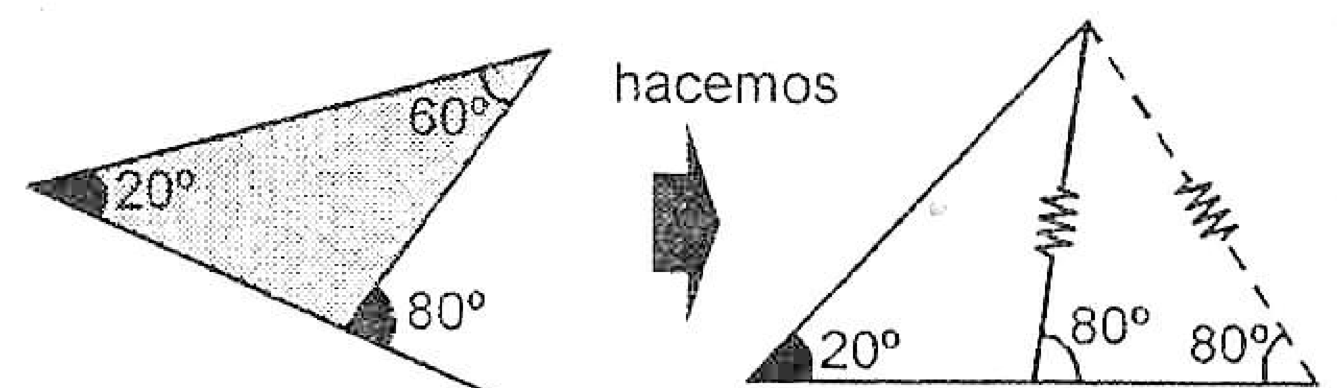




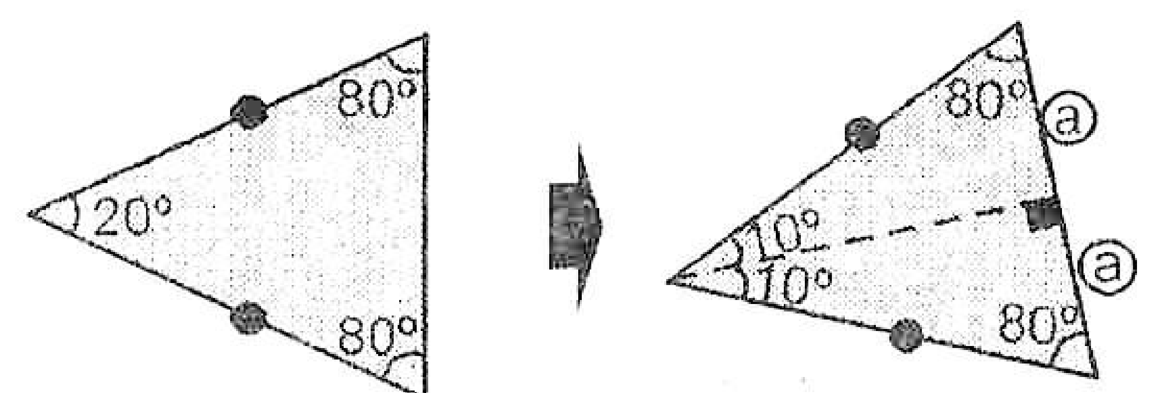


Solución Nº 30

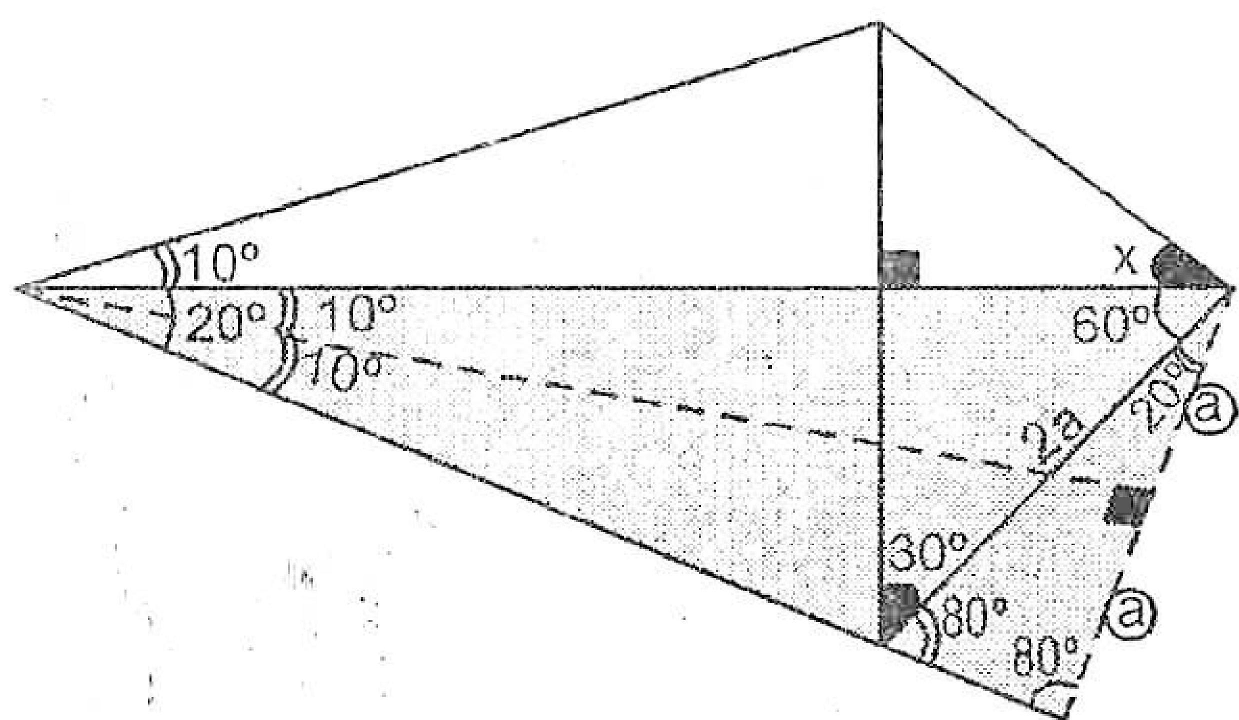
Paso Nº 1:



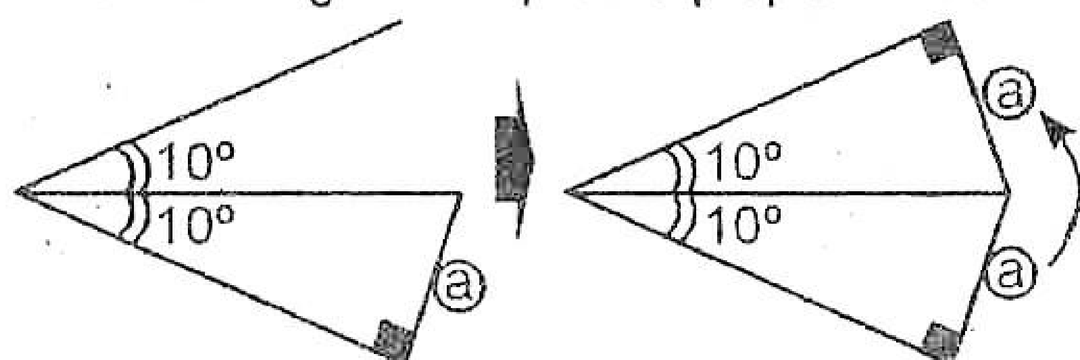
Realizamos el siguiente trazo:

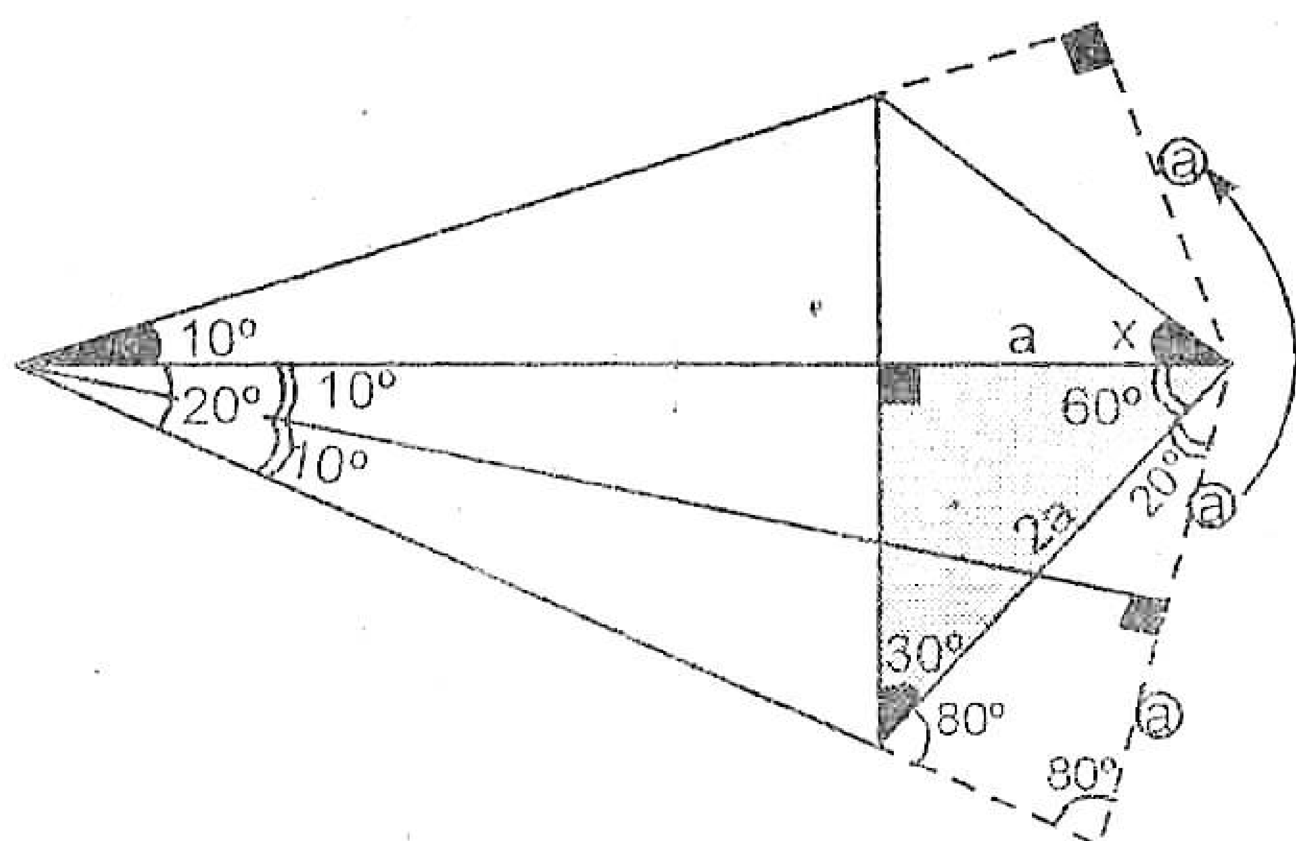


Paso Nº 2:
Se obtiene un triángulo isósceles, donde se cumple:

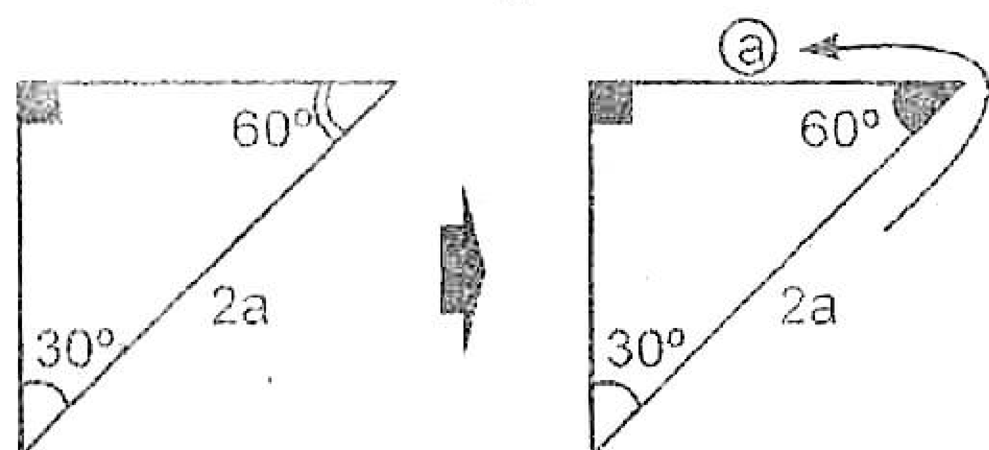


Paso N° 3: En la figura se aplica la propiedad de la bisectriz.

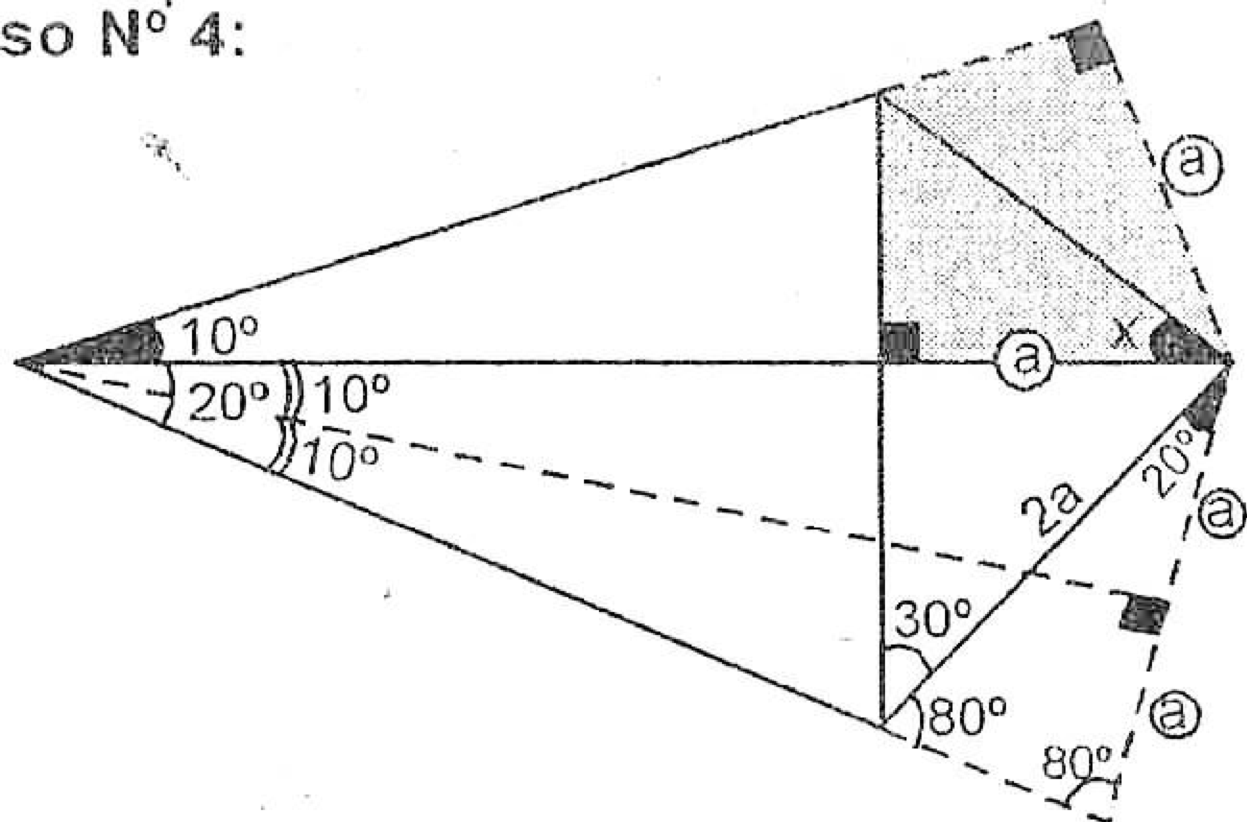




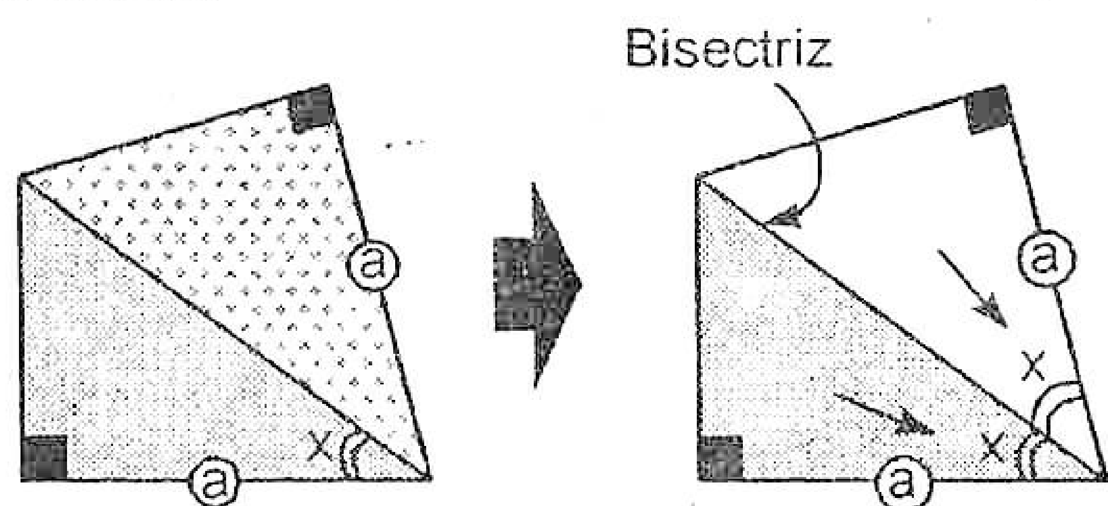
También se observa ángulo notable:



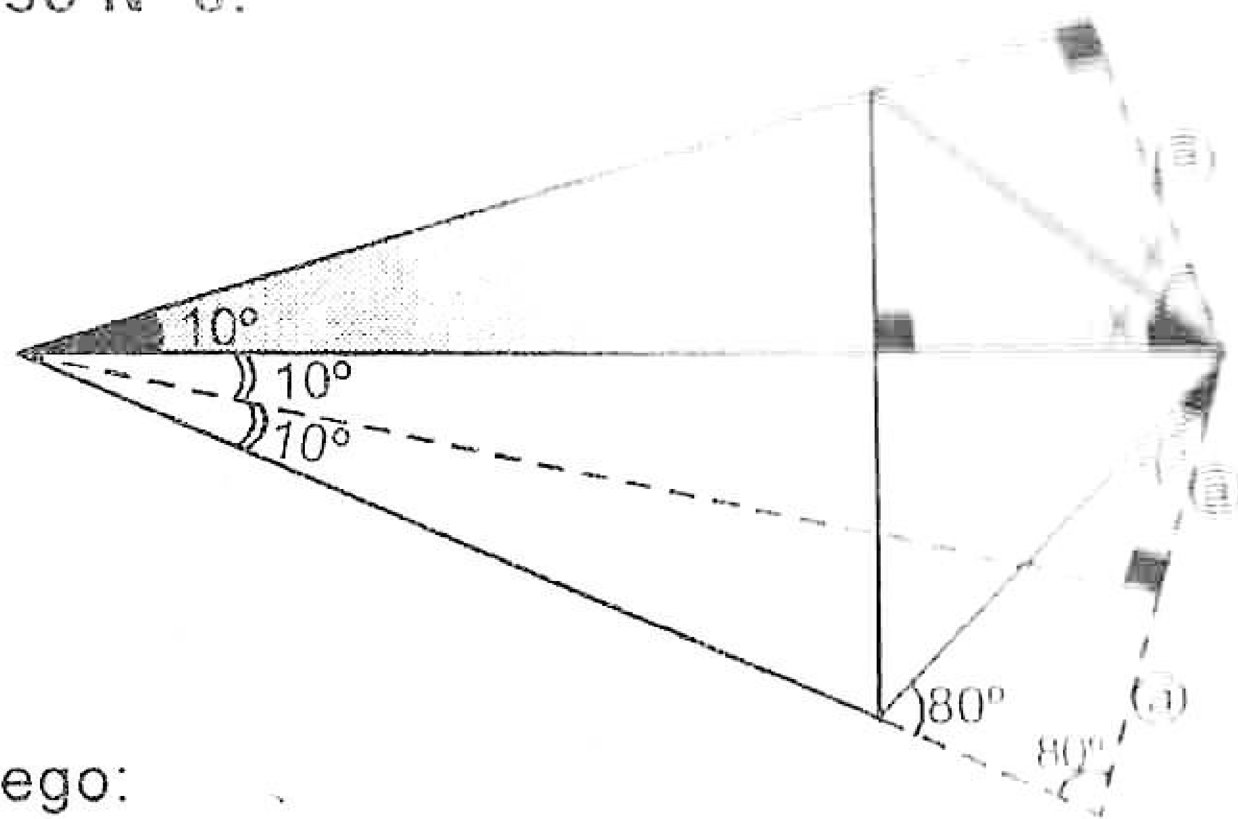
Paso N° 4:



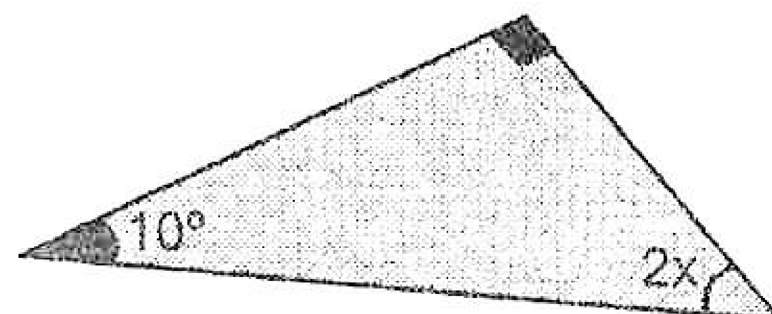
Se observa:



Paso N° 8:



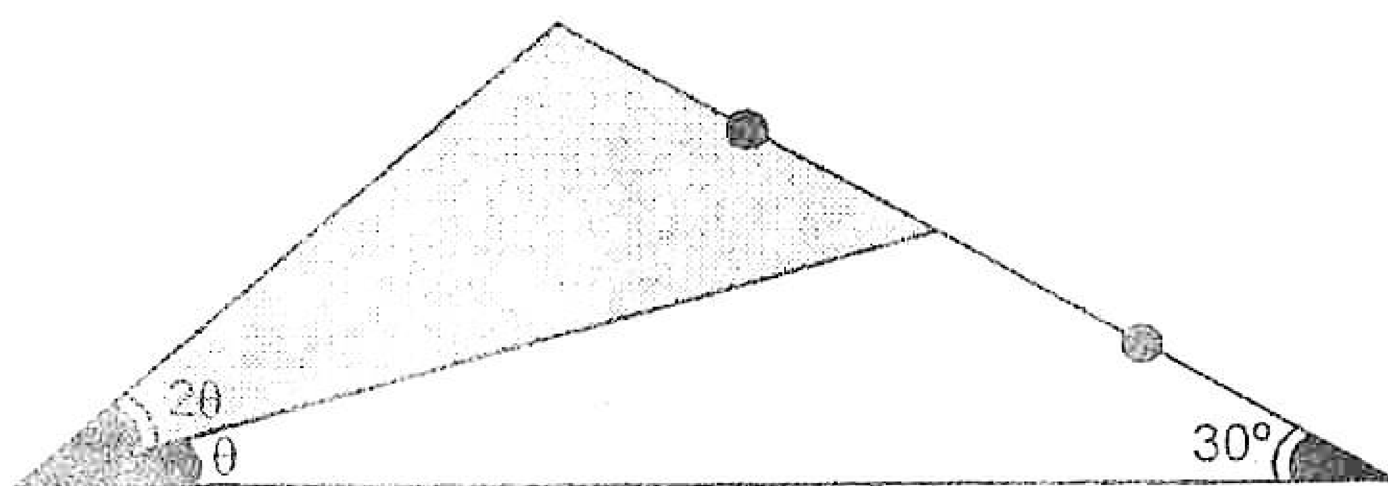
Luego:

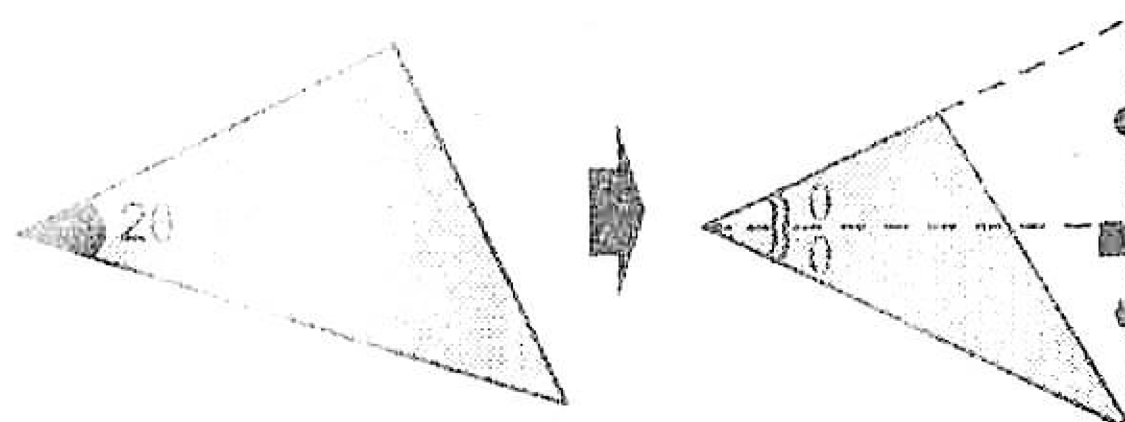


$\therefore\ 2x = 80°$
$x = 40°$

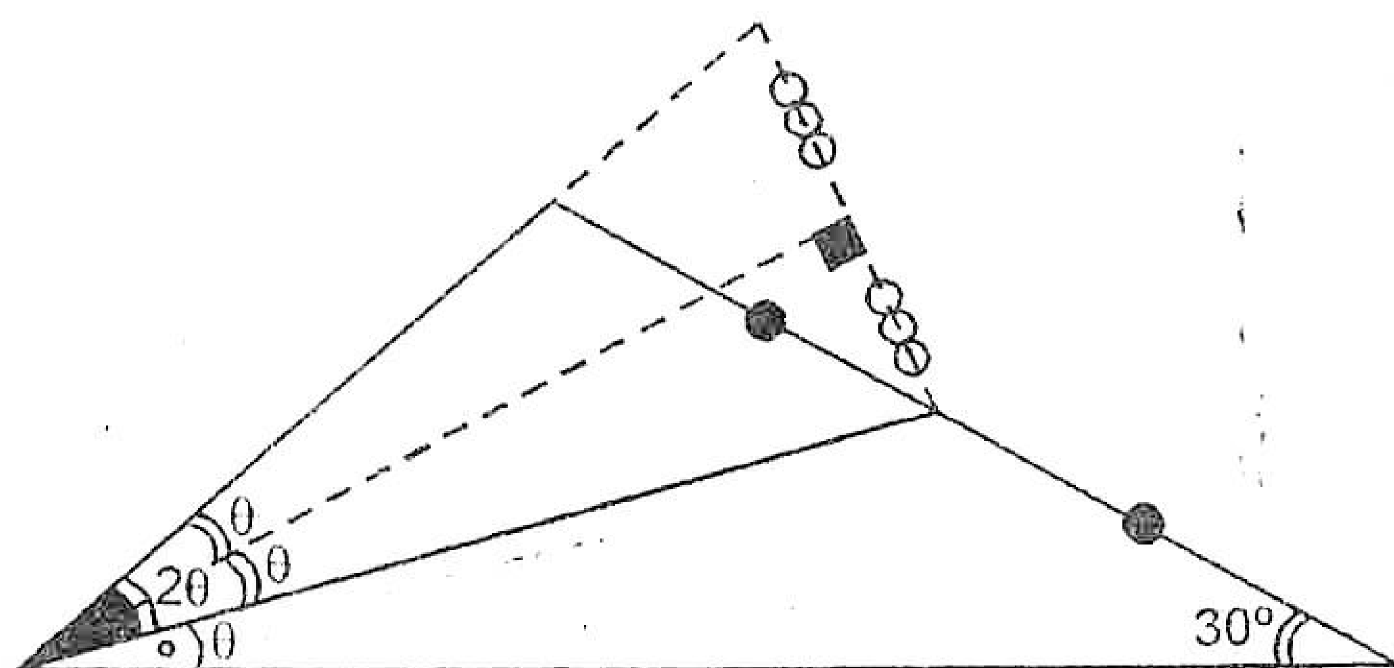
Solución N° 31

Paso N° 1: Se observa:

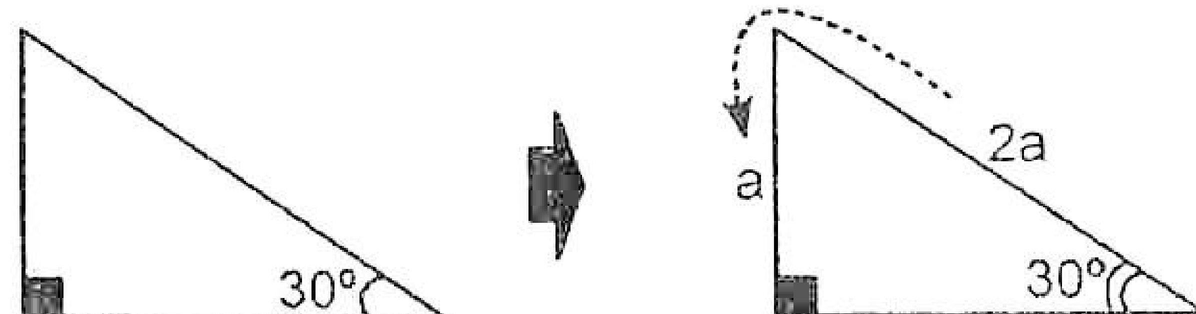


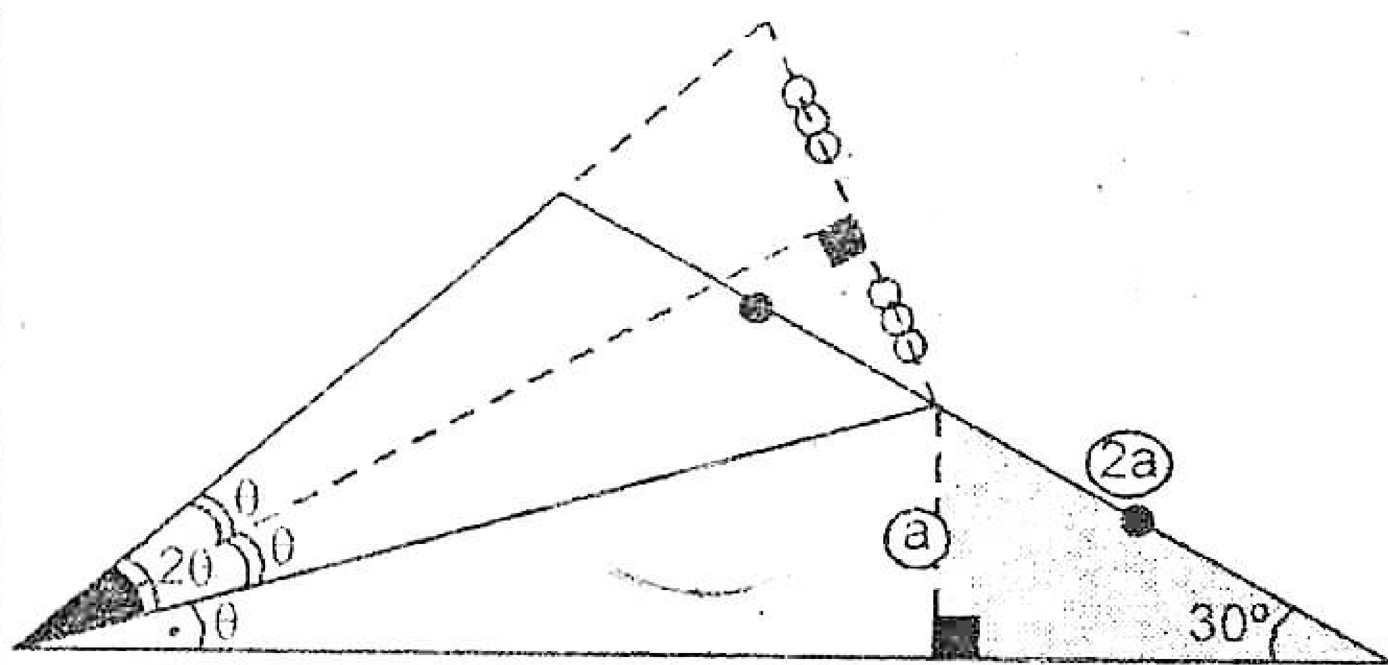


Paso N° 2: En la figura se forma un triángulo isósceles donde se cumple:

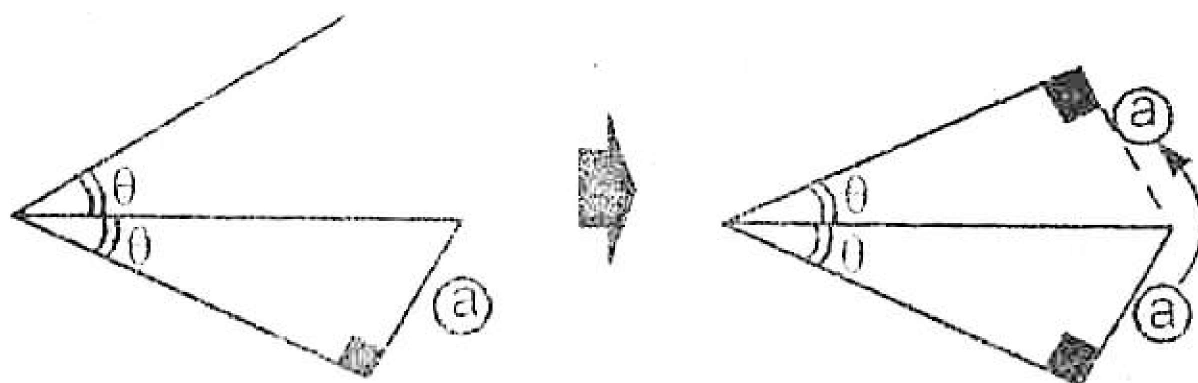


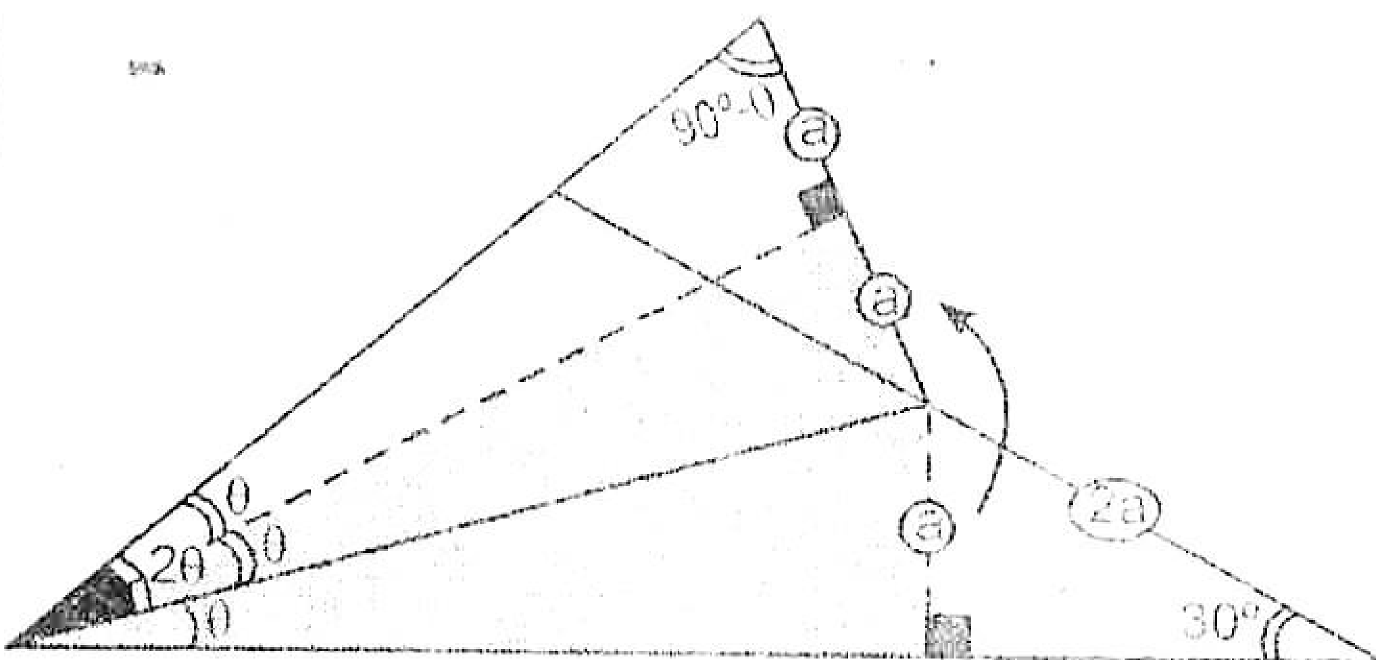
Paso N° 3: Luego se obtiene un triángulo rectangulo notable (30° y 60°) donde se cumple:



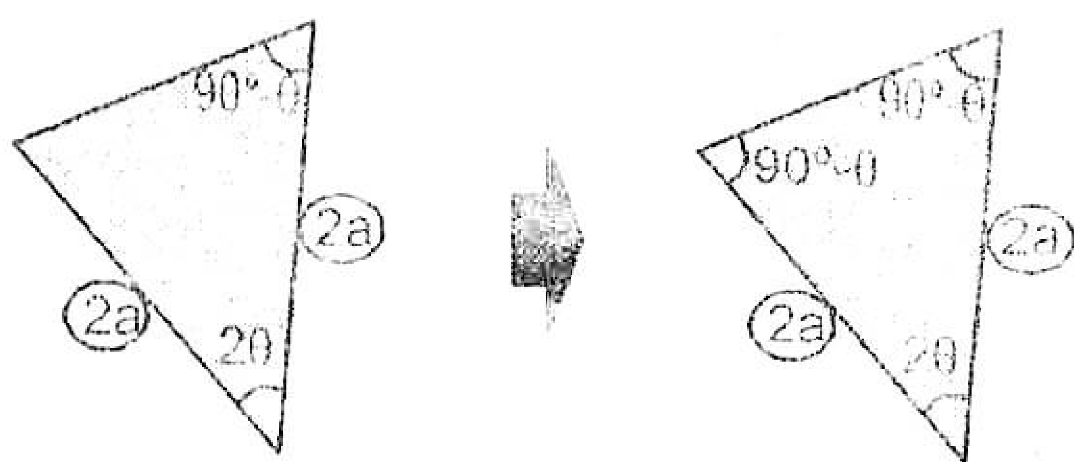


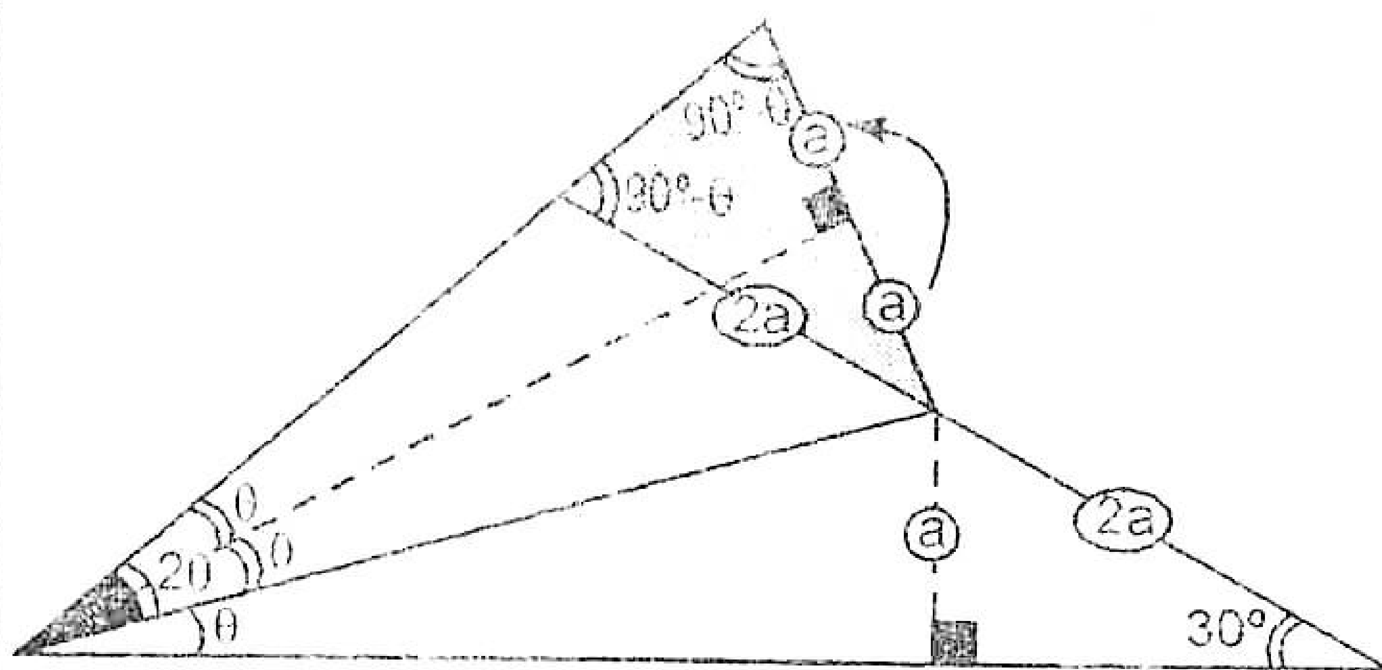
Paso Nº 4: En la figura aplicamos la propiedad de la bisectriz.



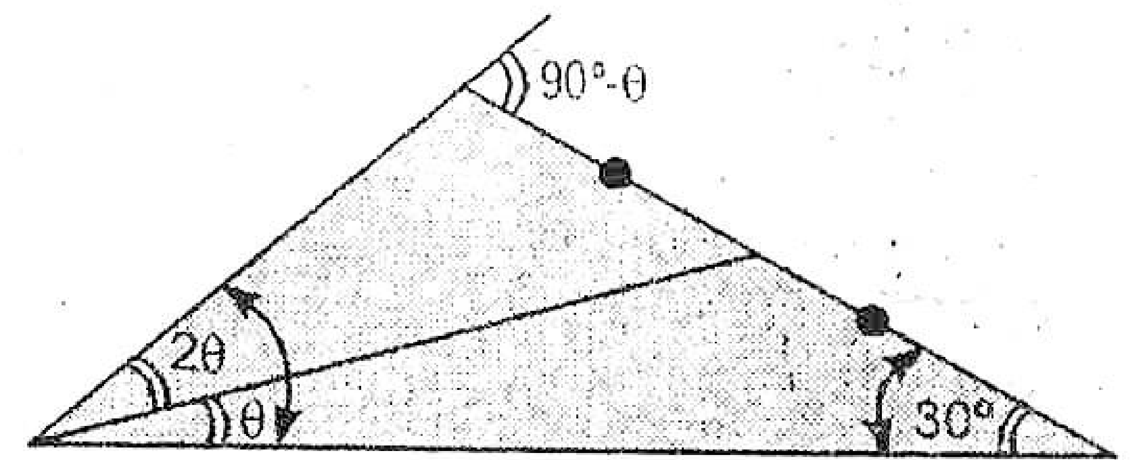


Paso Nº 5:
Se obtiene un triángulo isósceles.





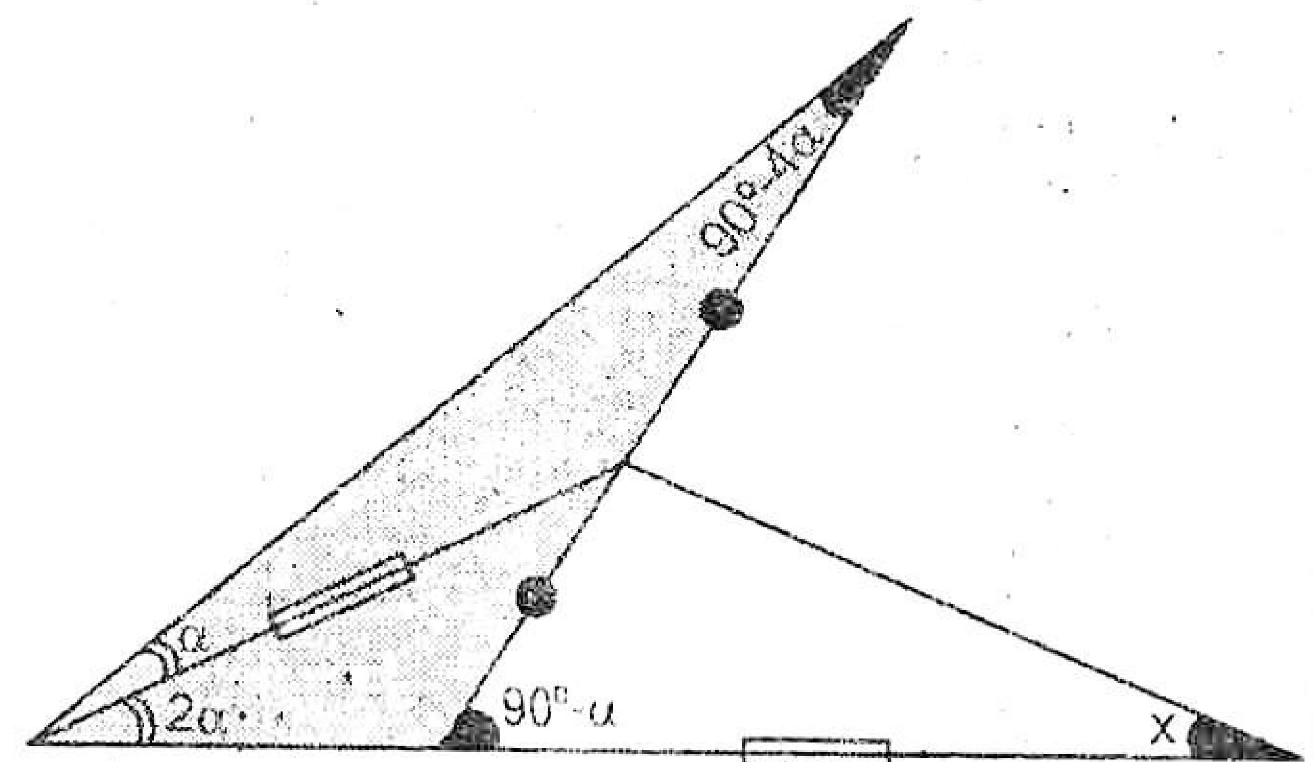
Paso Nº 6:
Por ángulo externo:



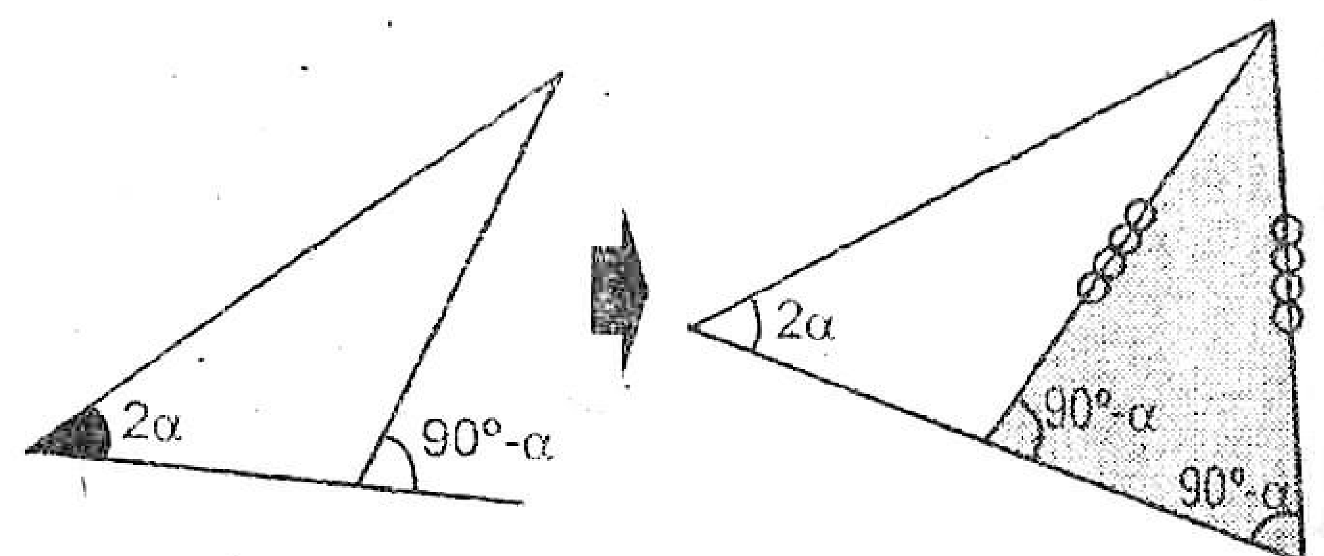
$$90° - \theta = 30° + 3\theta$$
$$60° = 4\theta$$
$$15° = \theta$$

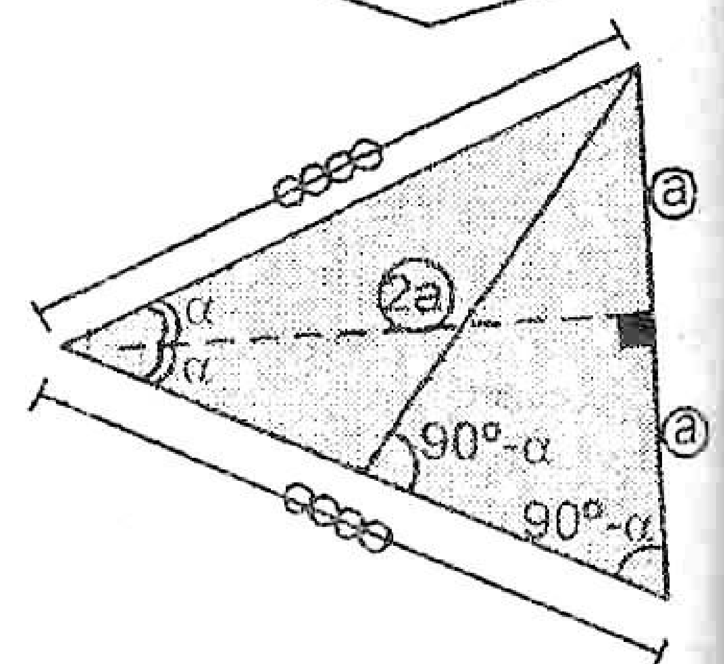
Solución Nº 32

En la figura se observa:

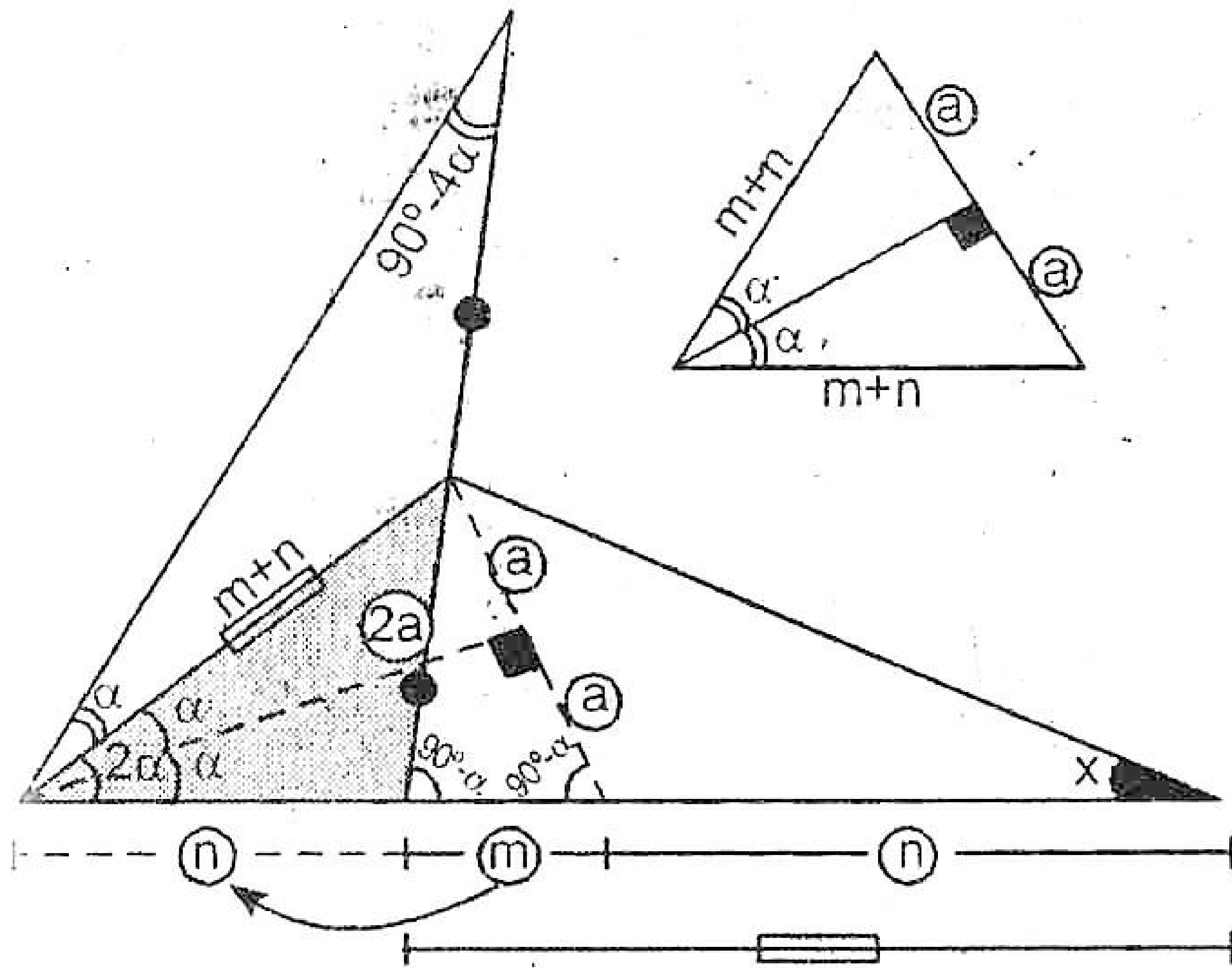


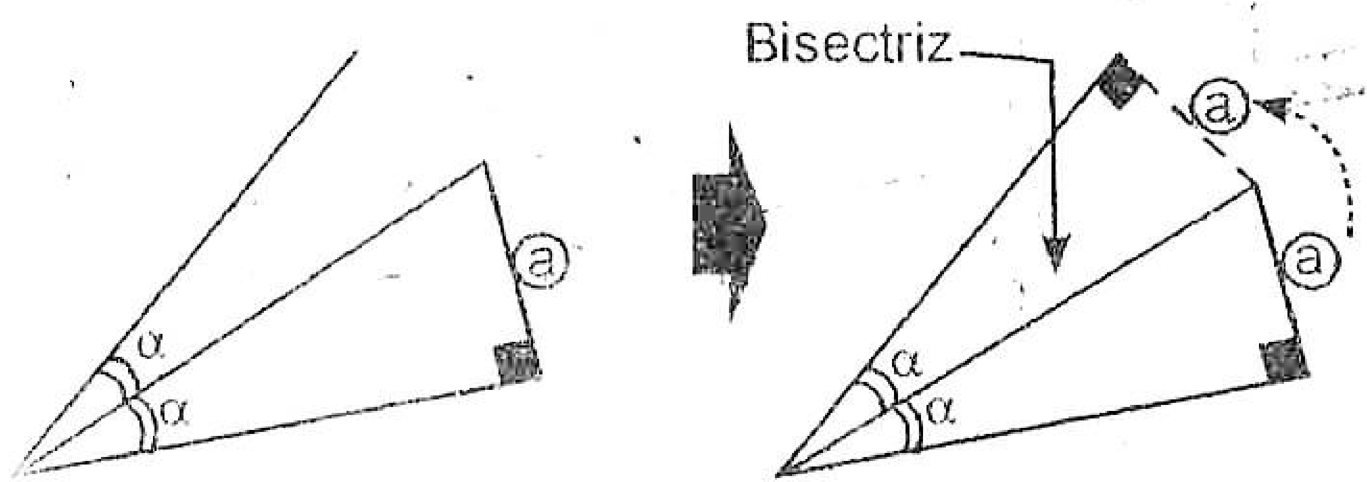
Paso Nº 1: Realizamos el siguiente trazo, para obtener triángulos isósceles.



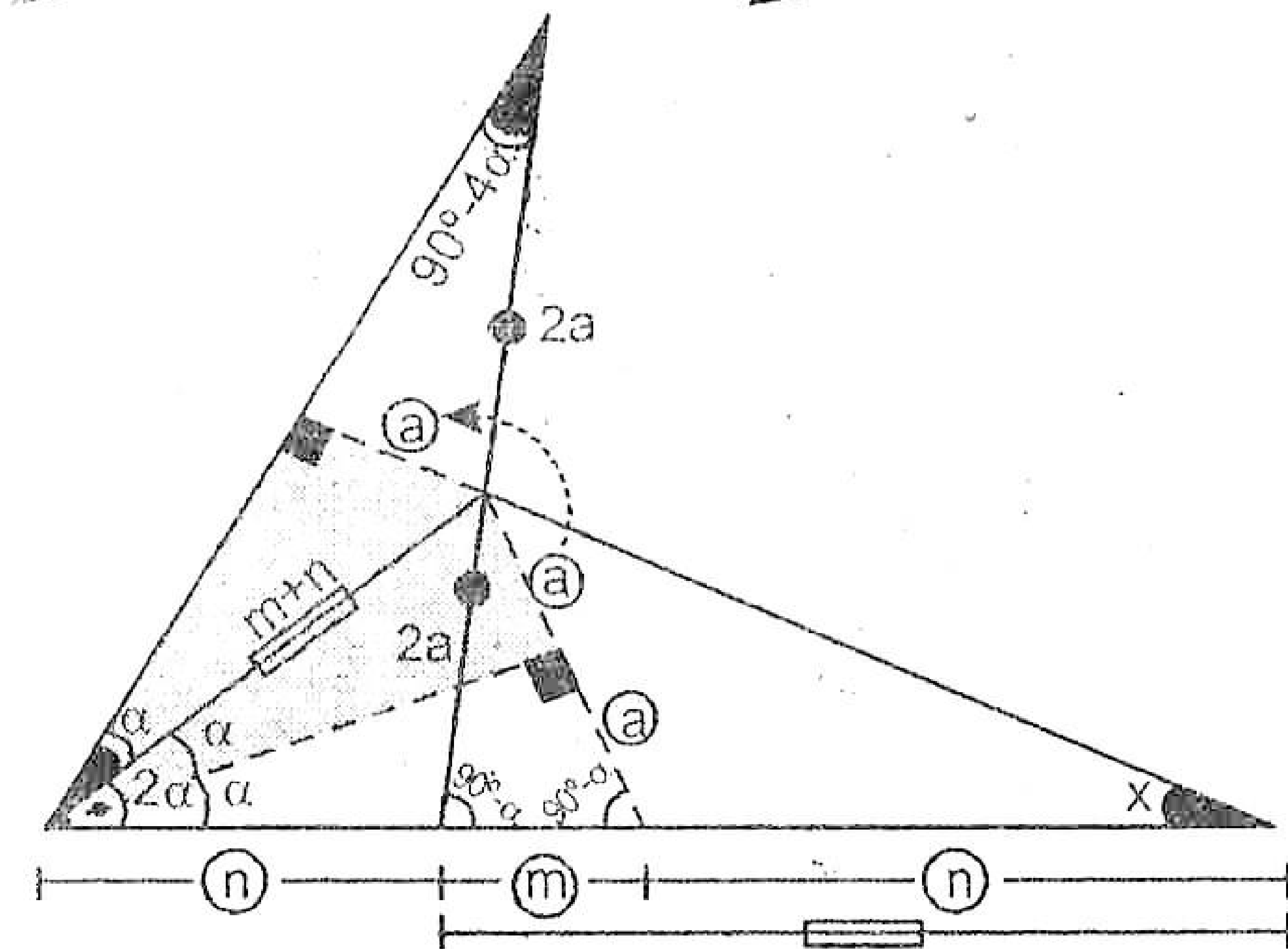


...tonces aplicamos en la figura el trazo mencionado.

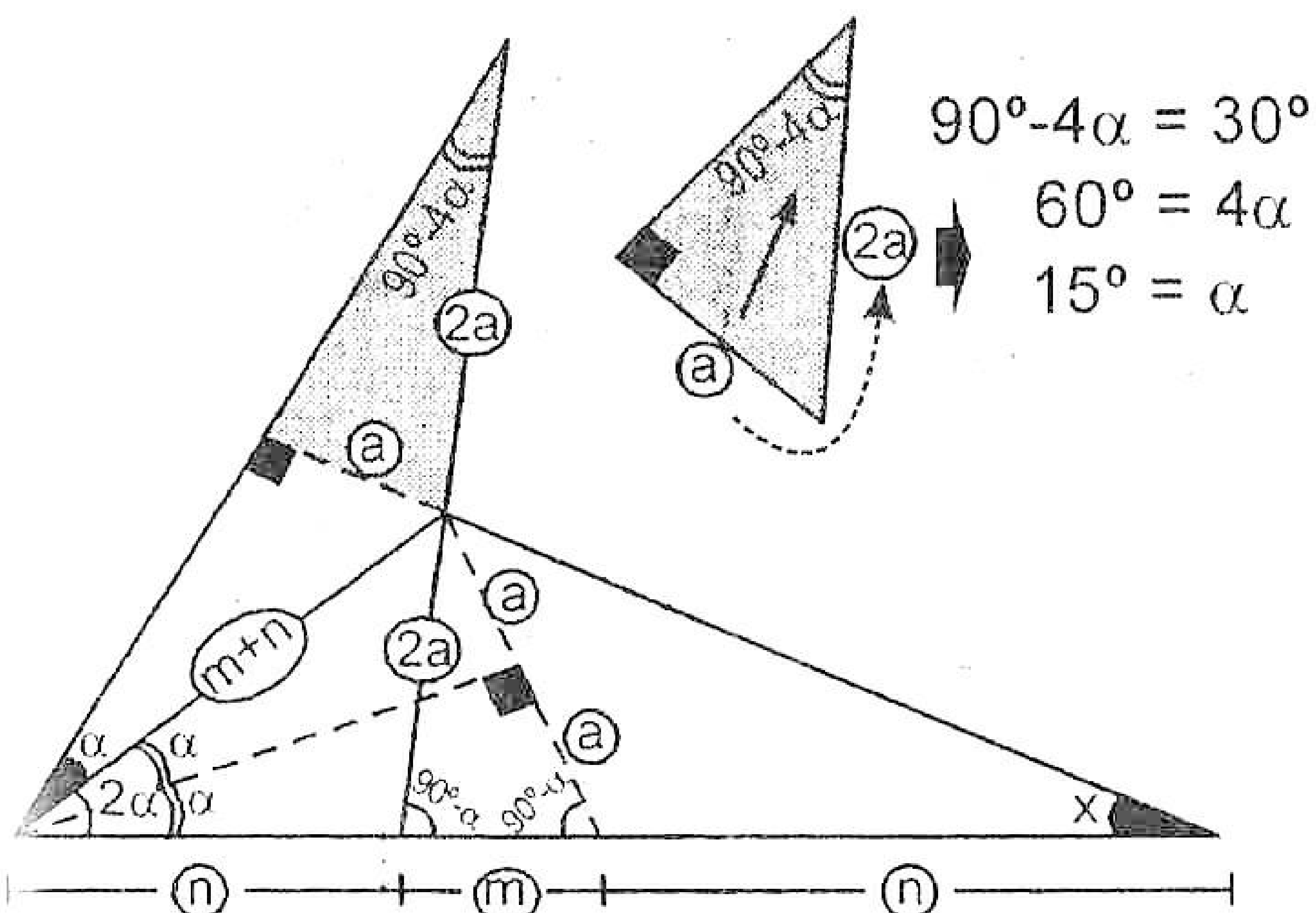




Paso N° 2: En la figura se observa la propiedad de la bisectriz donde se cumple:



Paso N° 3: Se observa un triángulo rectángulo de notable (30° y 60°)

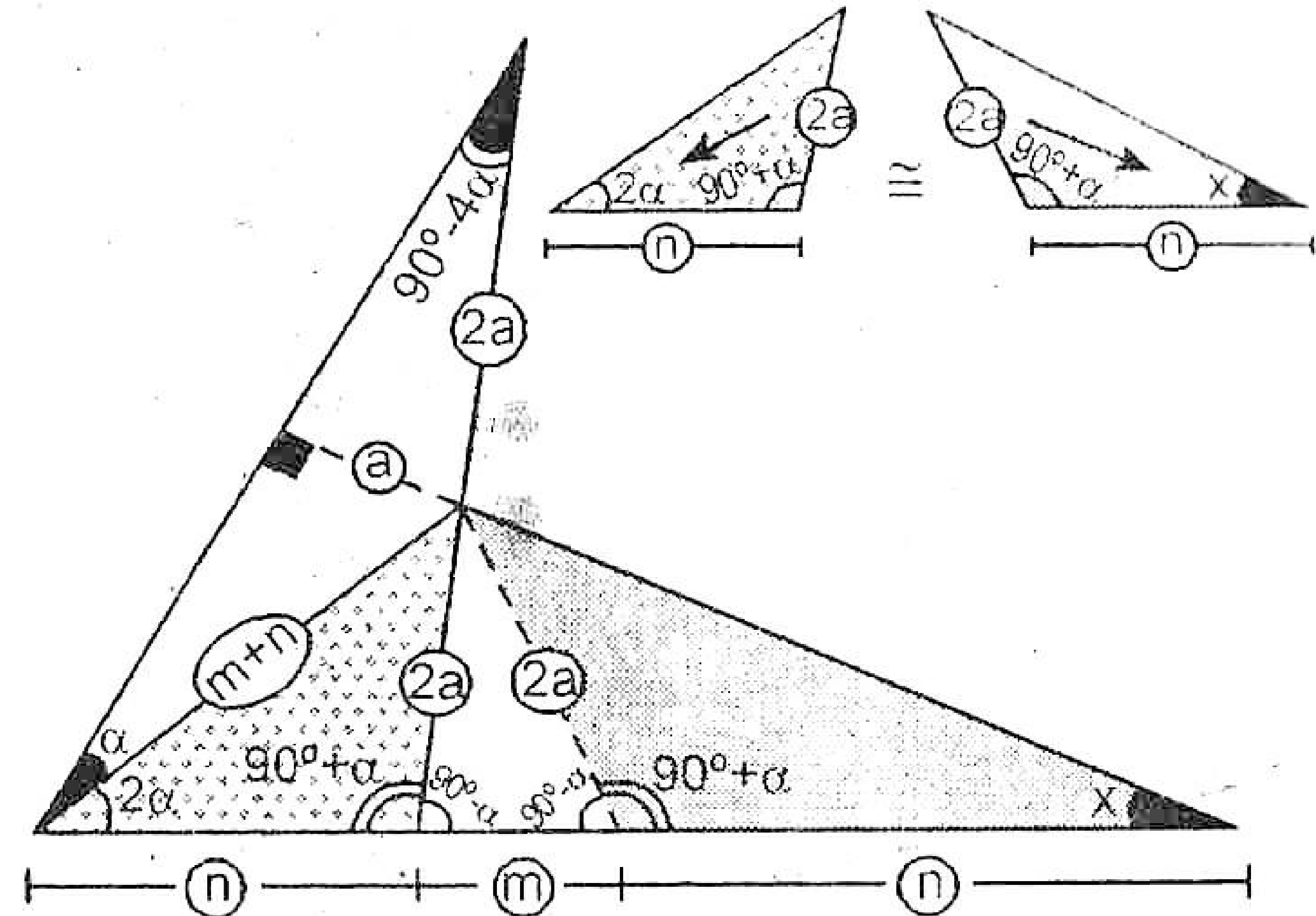


$90° - 4\alpha = 30°$

$60° = 4\alpha$

$15° = \alpha$

Paso N° 4: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)

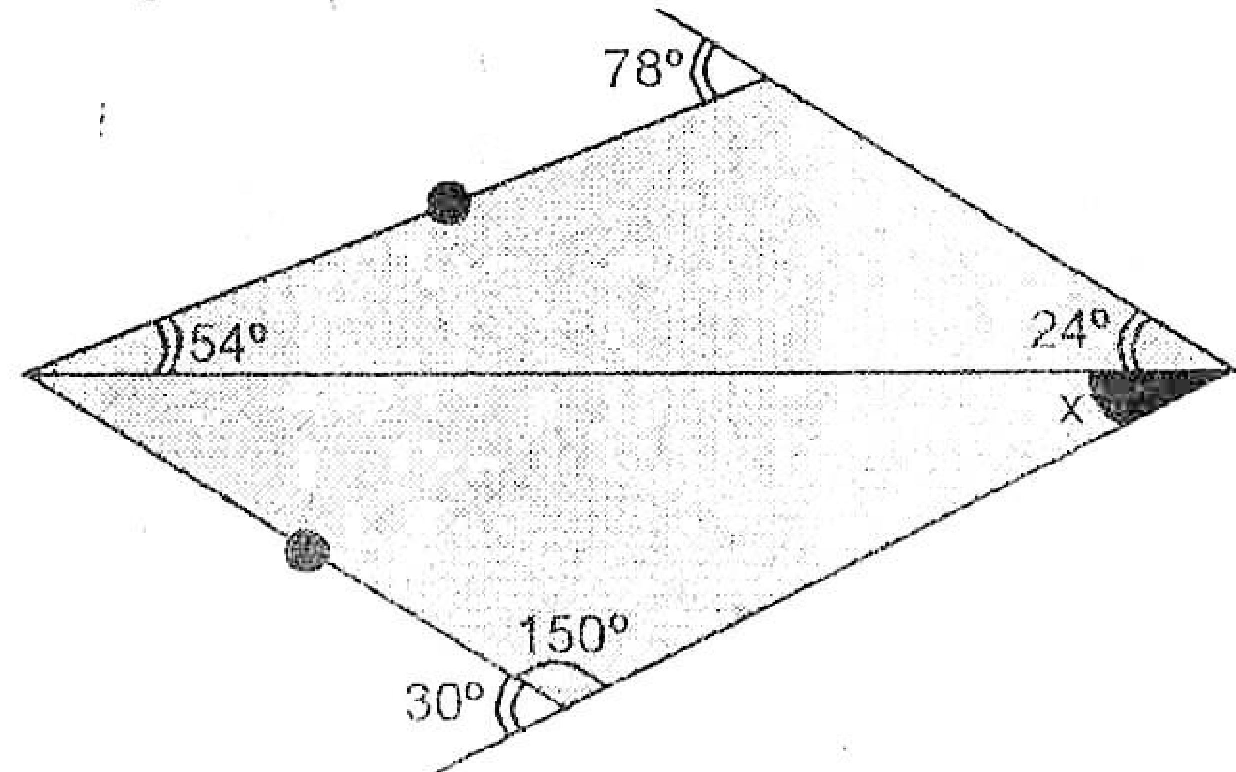


$\Rightarrow$ Se cumple $x = 2\alpha \Rightarrow x = 2(15°)$

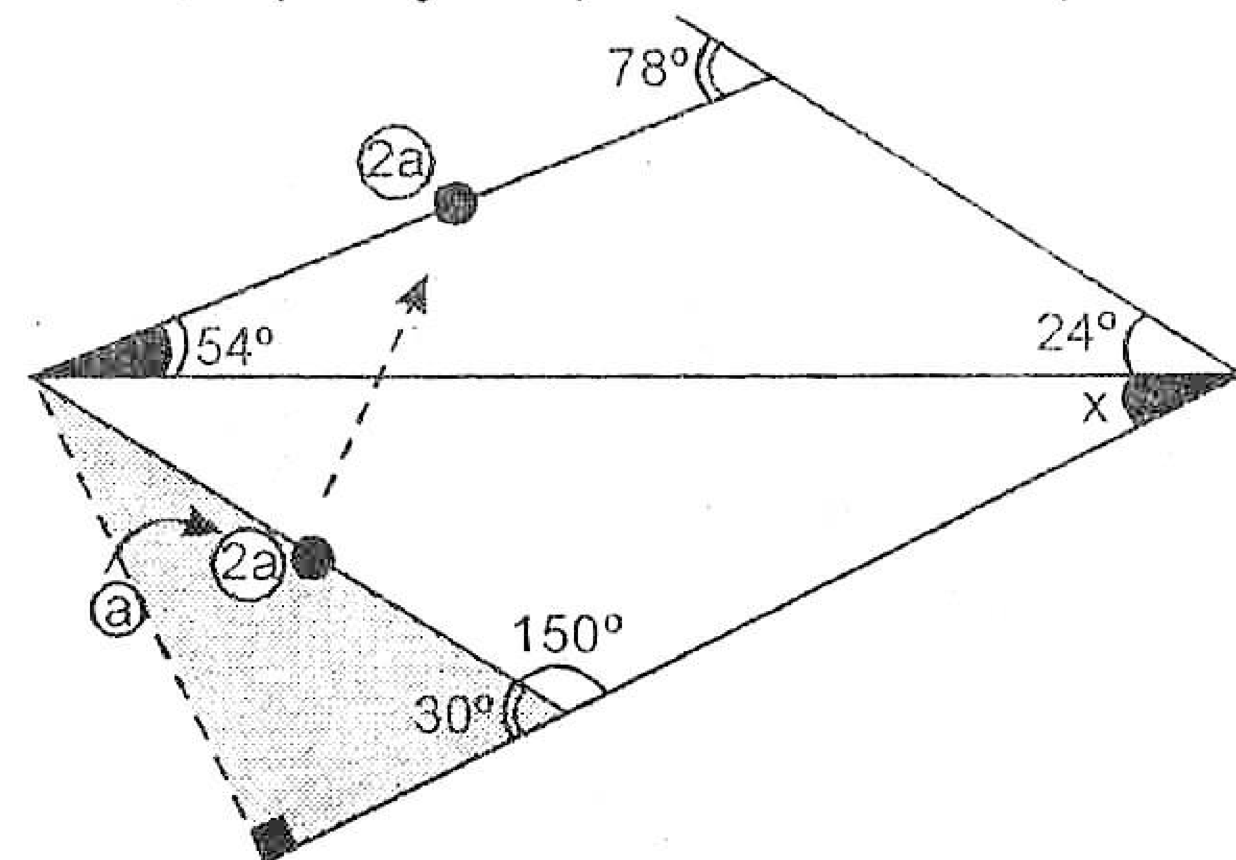
$x = 30°$

Solución N° 33

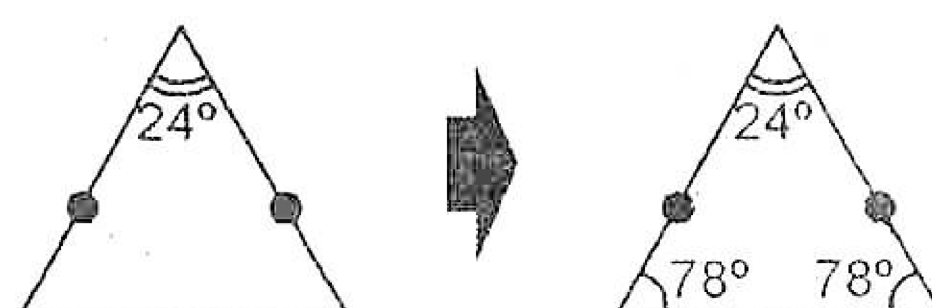
En la figura se observa:

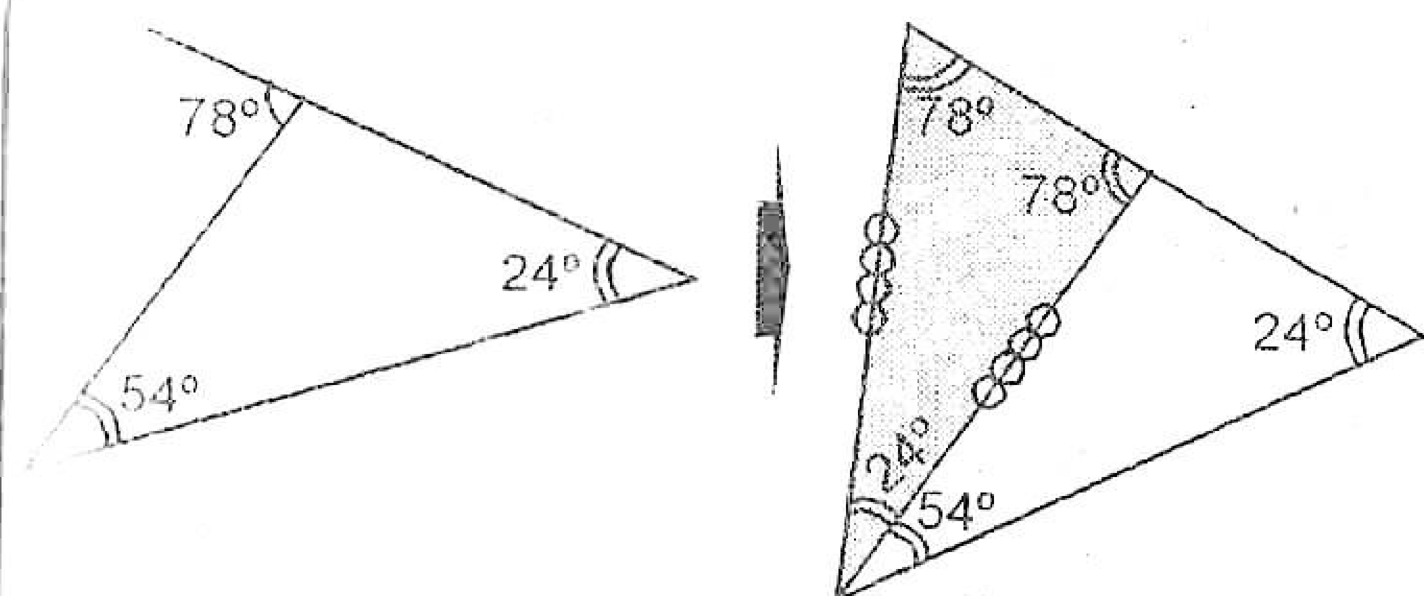


Paso N° 1: Se observa un triángulo rectángulo de notable (30° y 60°) donde se cumple:

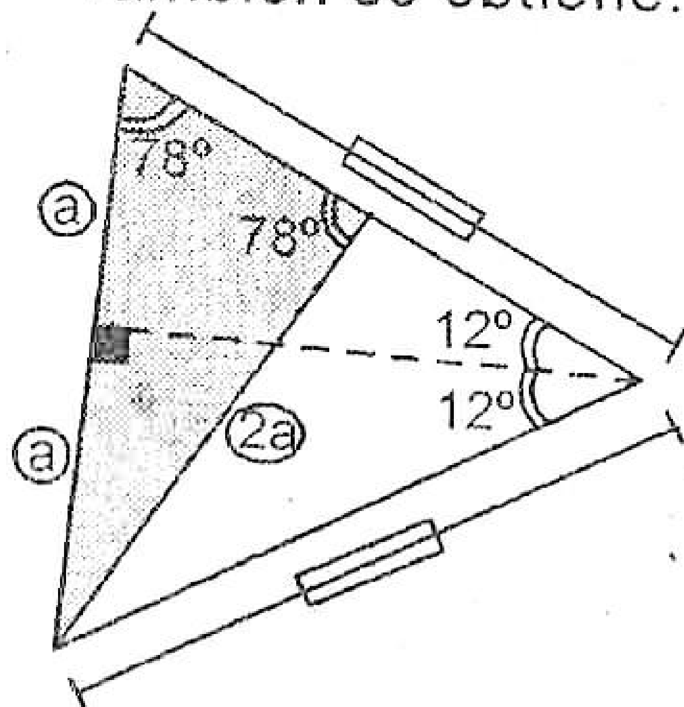


Paso N° 2: En la figura se observa que se obtiene un triángulo isósceles de la siguiente manera:

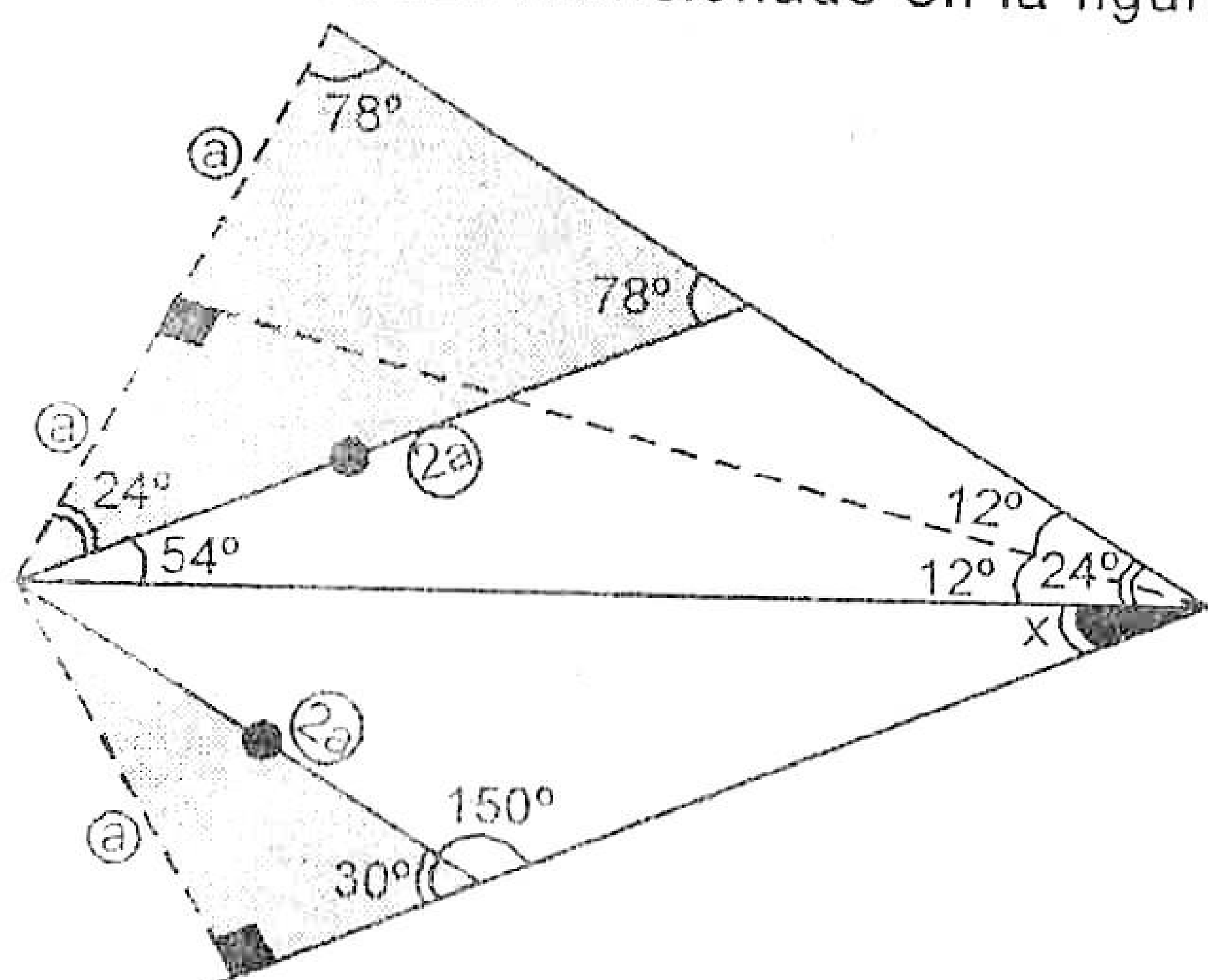




También se obtiene:

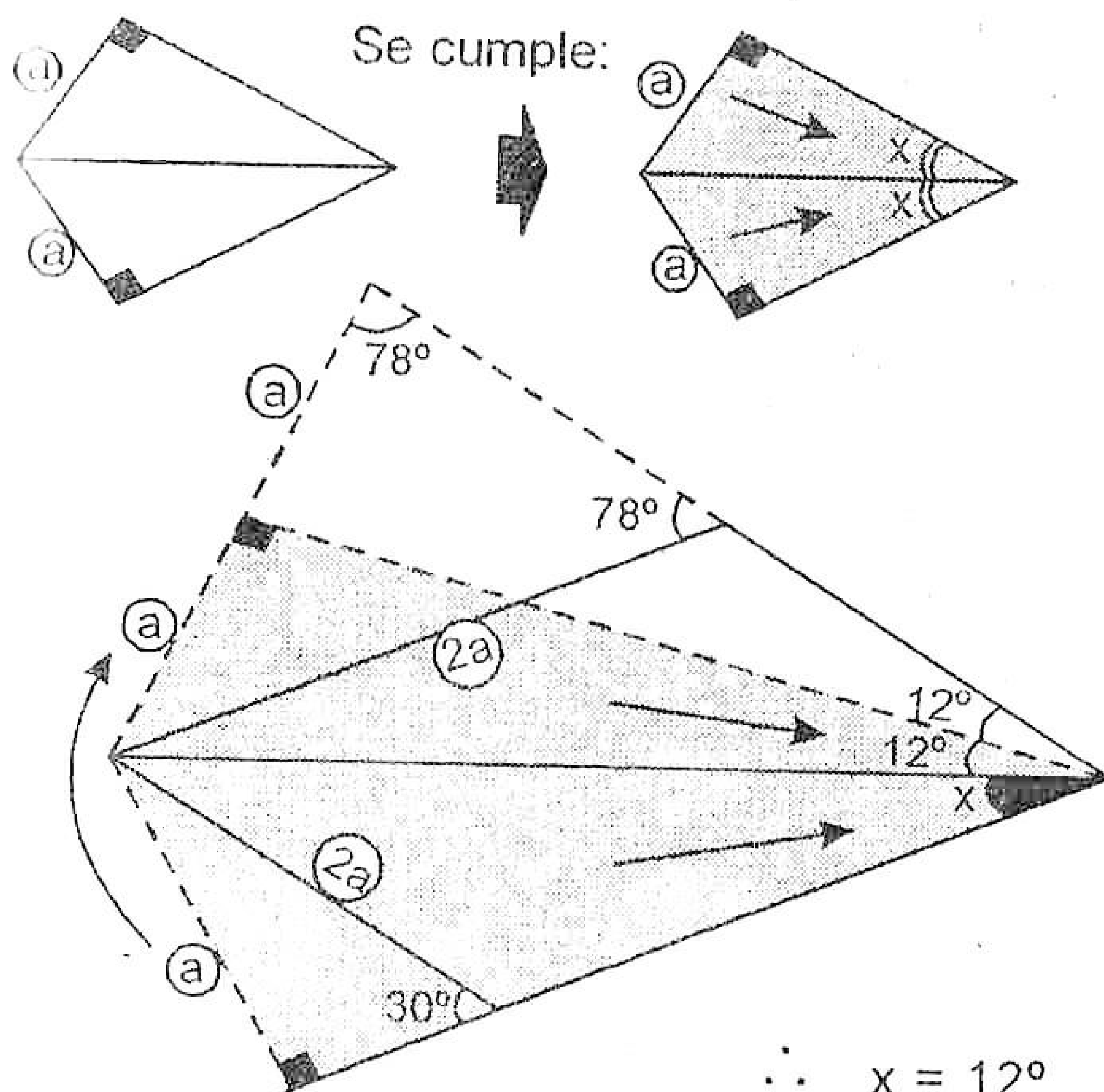


Realizando el trazo mencionado en la figura.



Paso N° 3: Aplicamos el teorema de la bisectriz. (cuarto criterio de construcción)

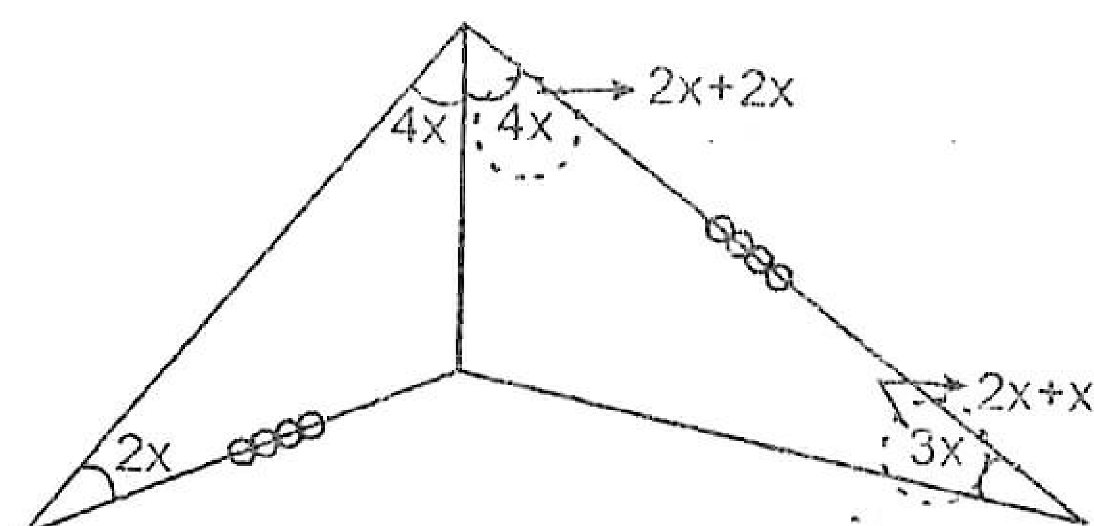
Se cumple:



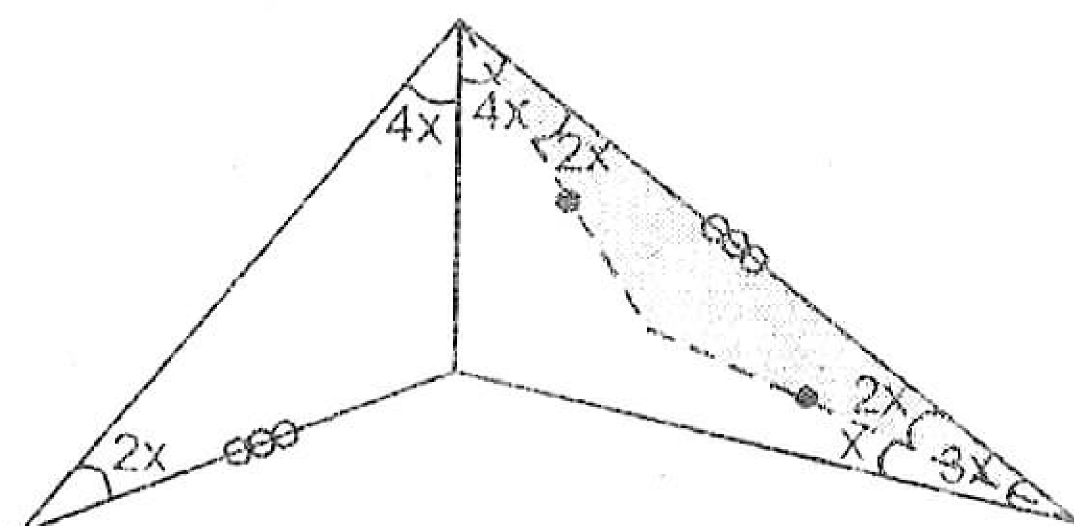
$\therefore\ x = 12°$

Solución N° 34

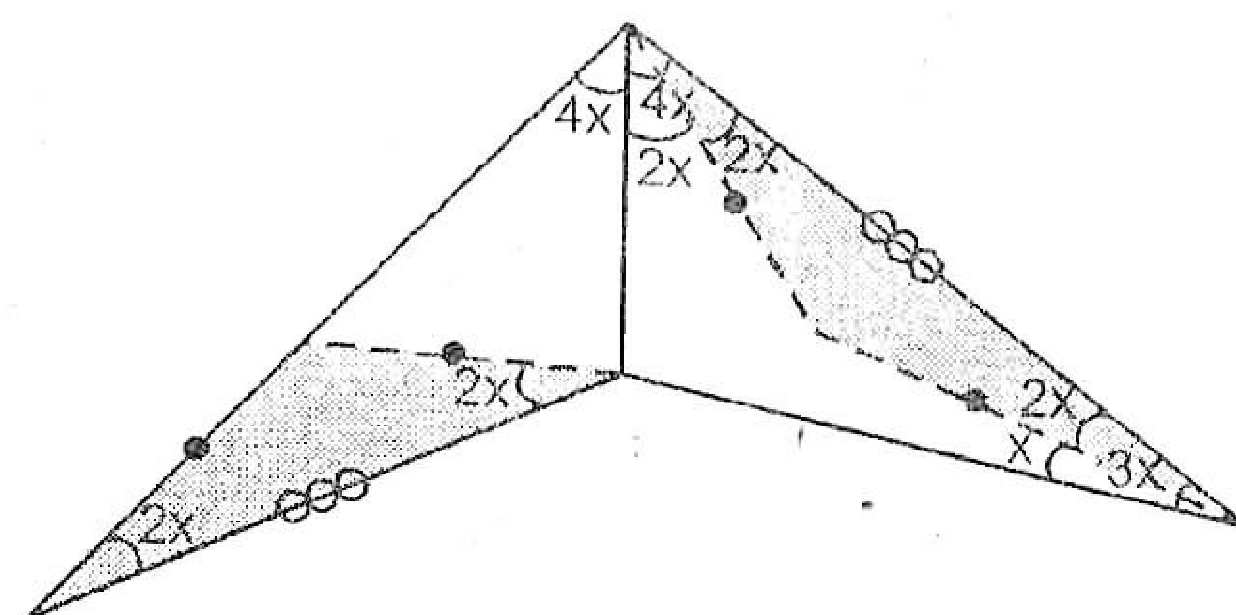
En la figura se observa los siguientes ángulos:



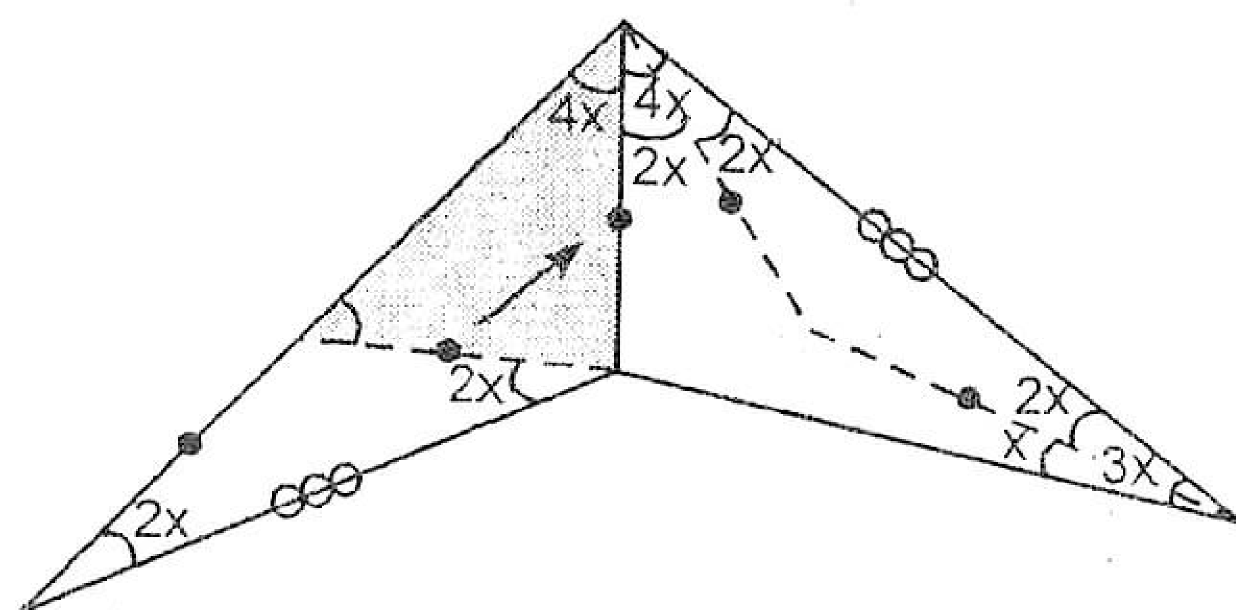
Paso N° 1: Observando los ángulos, construimos interiormente un triángulo isósceles de la siguiente manera:



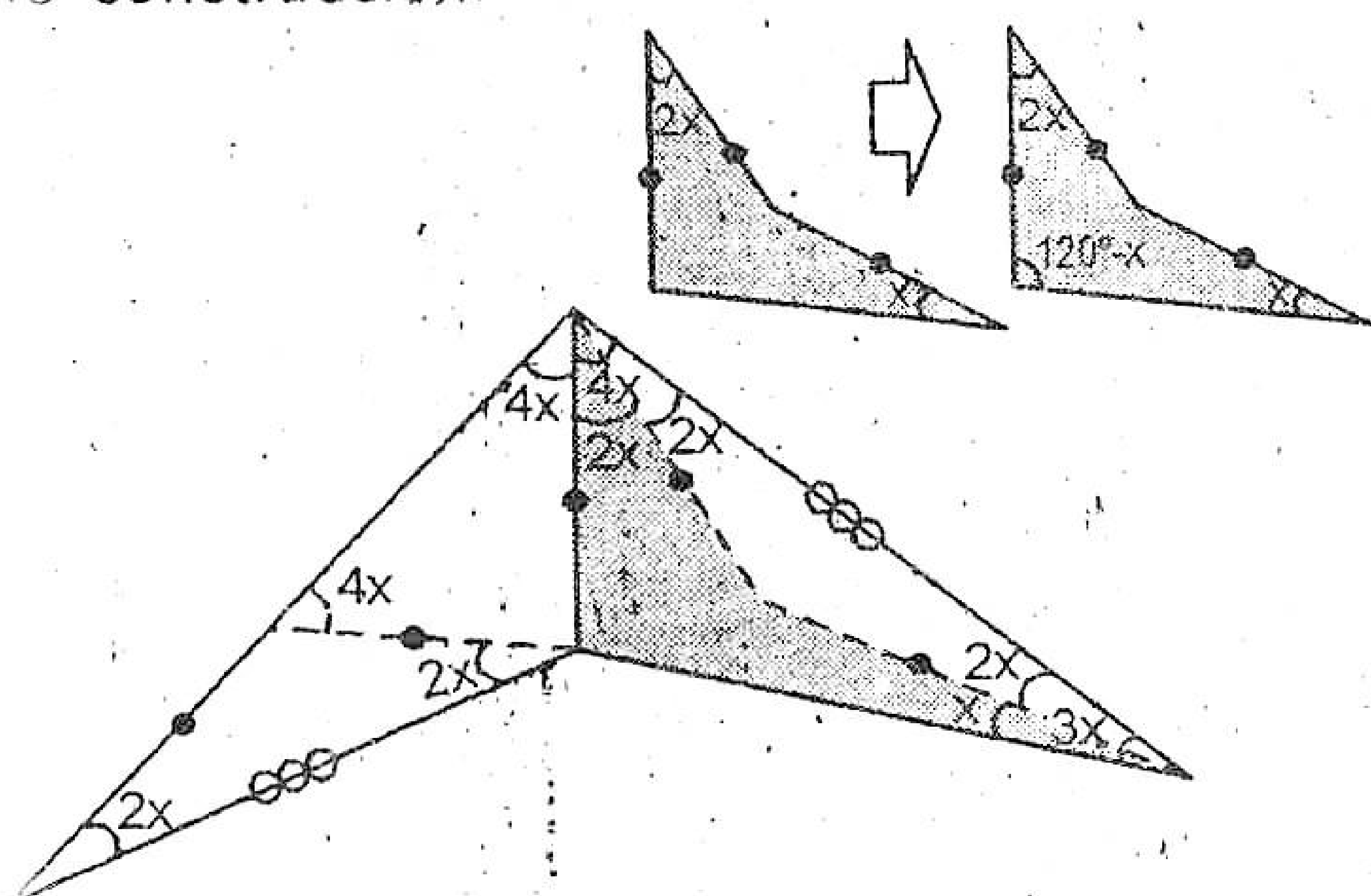
Paso N° 2: Ahora en la figura, realizamos el siguiente trazo para obtener en la figura dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)



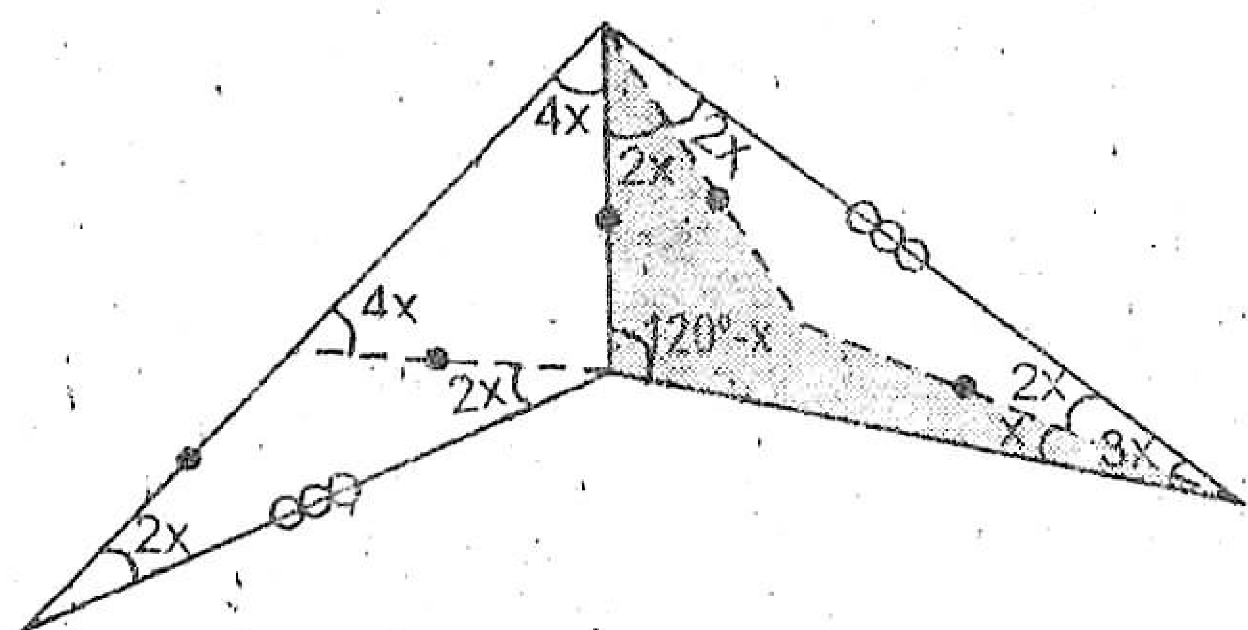
Paso N° 3:
También se obtiene interiormente en la figura un nuevo triángulo isósceles.

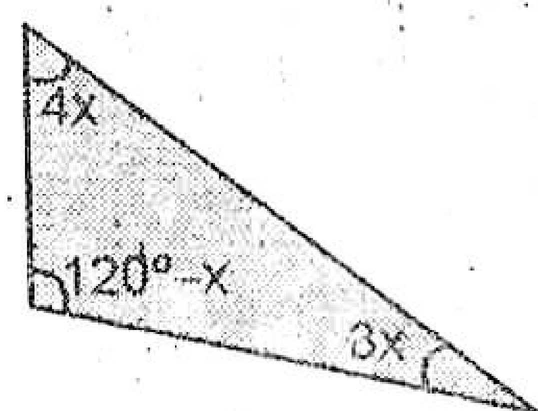


Paso N° 4: Observamos un cuadrilátero cóncavo donde se cumple: El septimo criterio de construcción.



Paso N° 5: Finalmente se obtiene la siguiente figura donde se cumple:



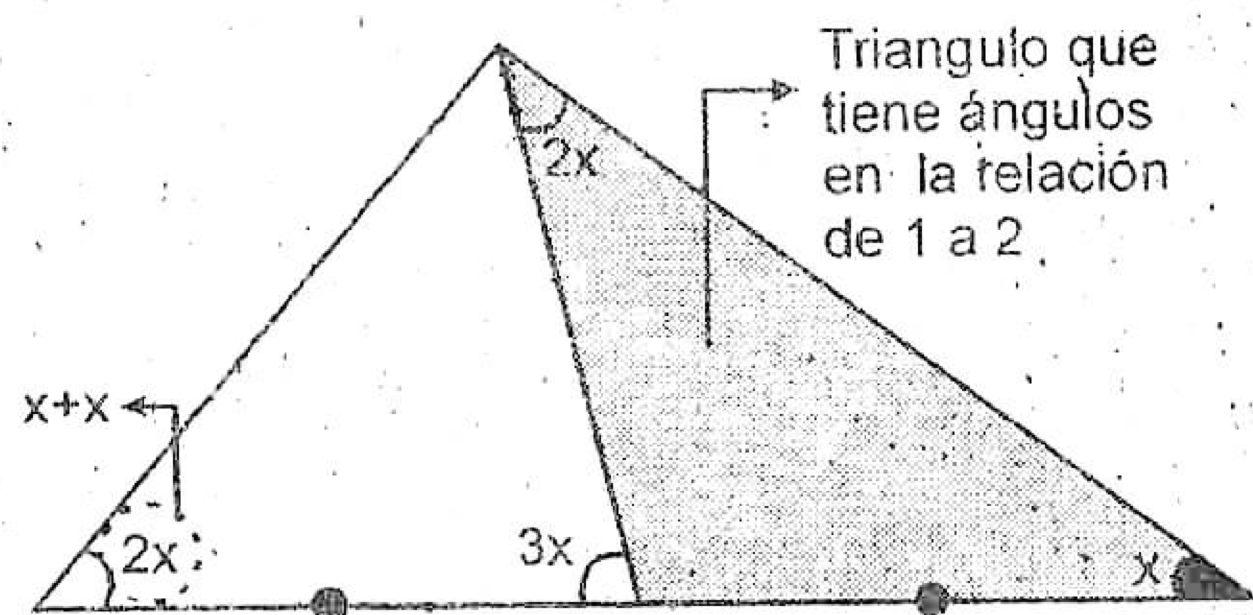


$\therefore 120° - x + 4x + 3x = 180°$

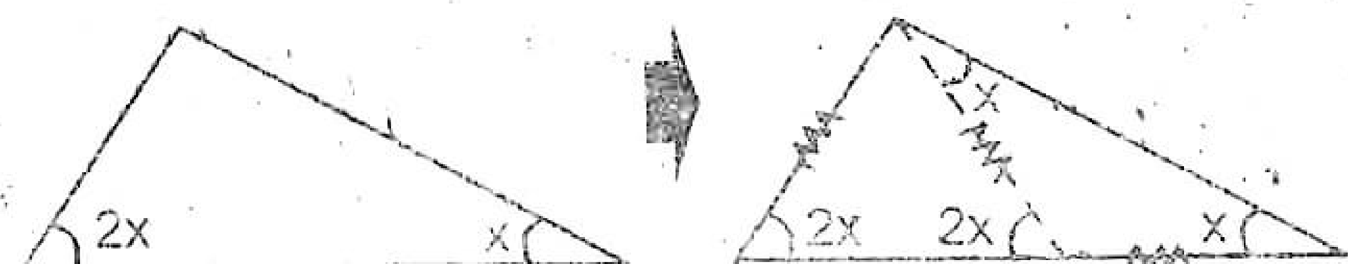
$6x = 60°$

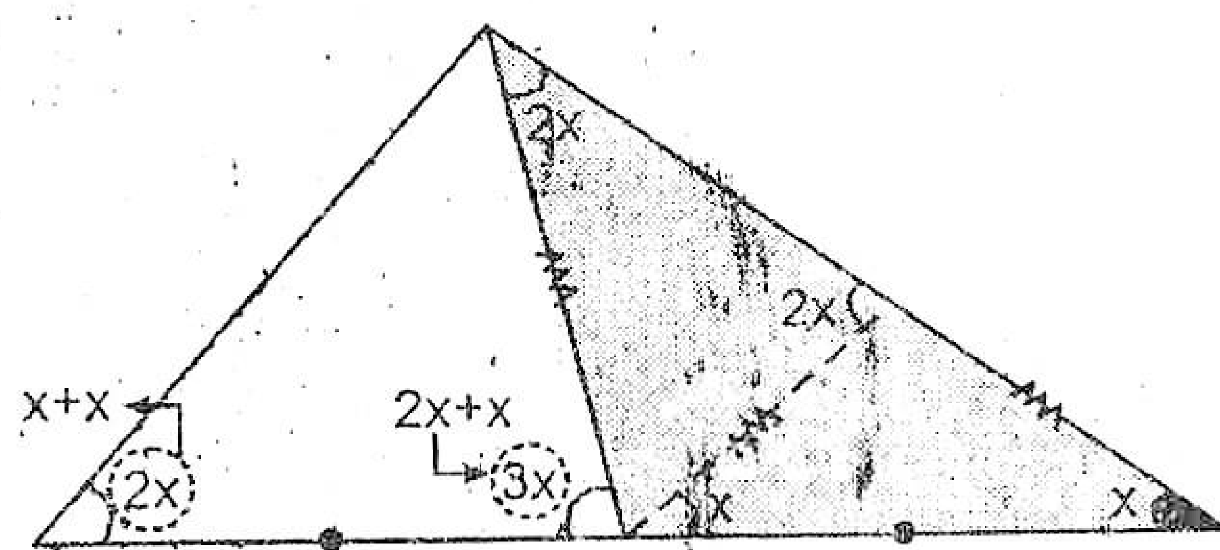
$x = 10°$

Solución N° 35

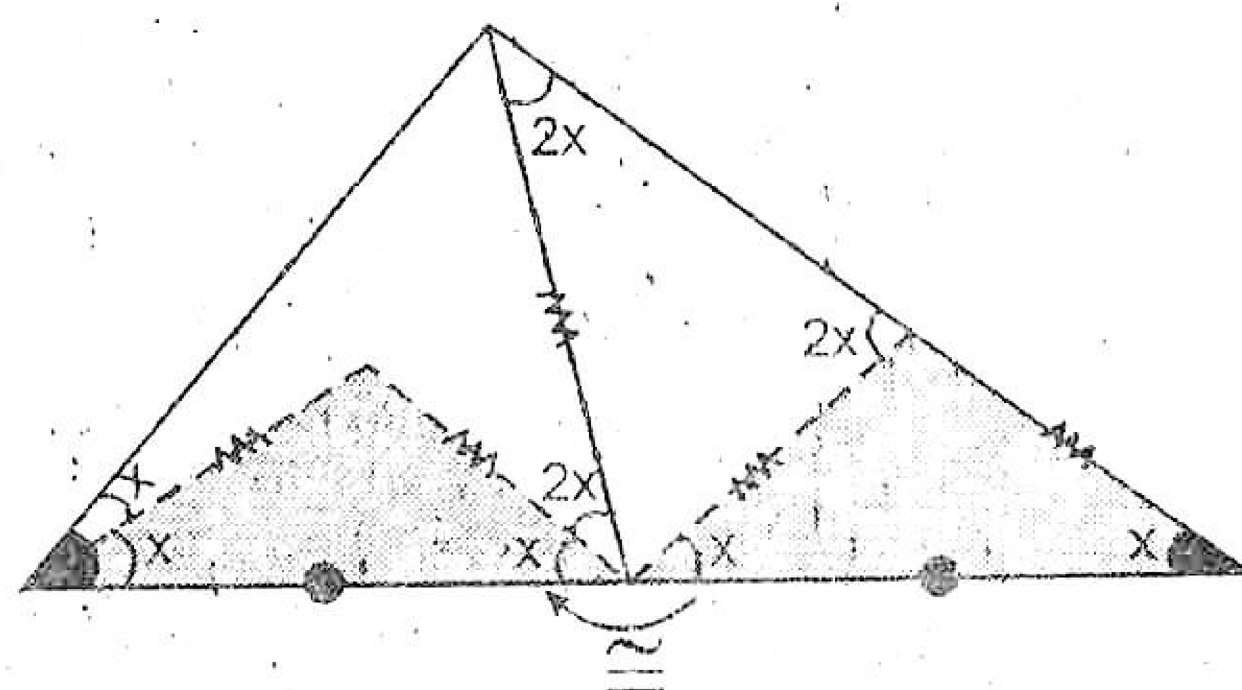


Paso N° 1:
Aplicando el Primer criterio de construcción en el triángulo sombreado

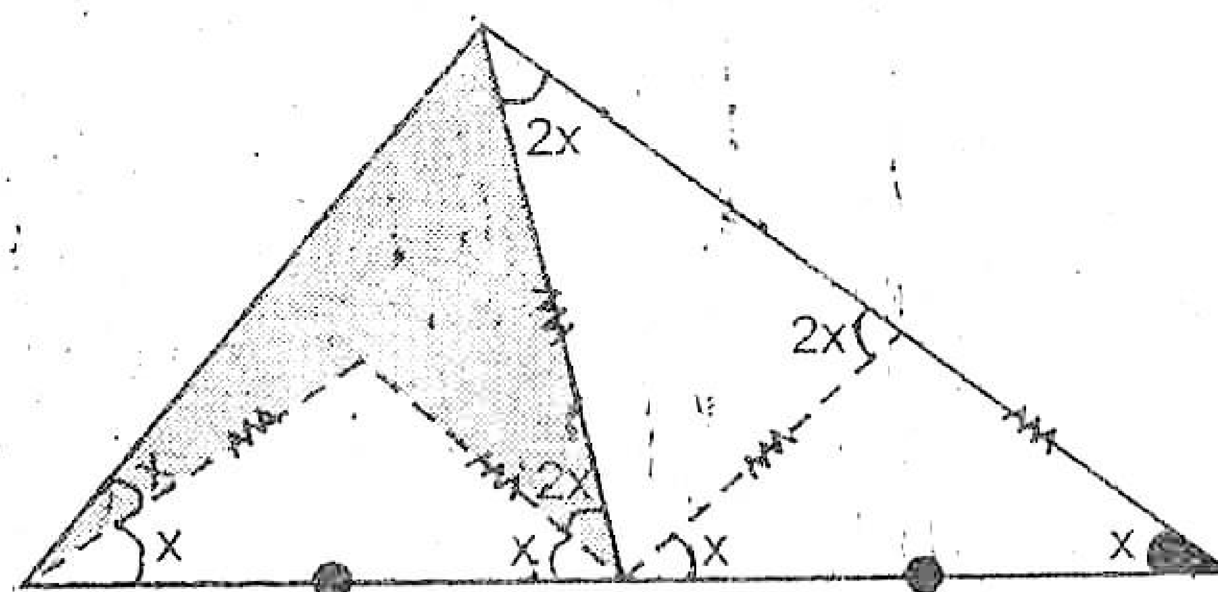


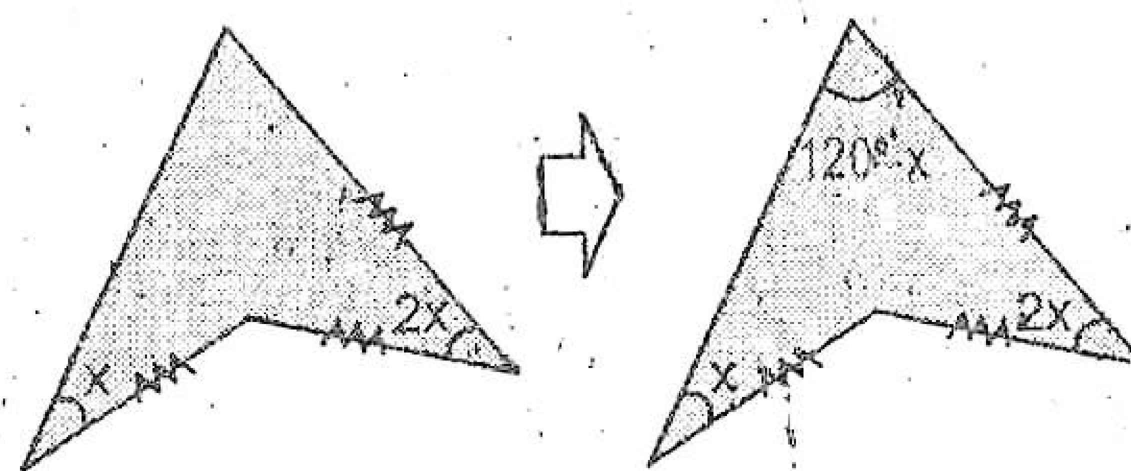


Paso N° 2: Realizamos el siguiente trazo para obtener dos triángulos congruentes, caso: (A.L.A.)

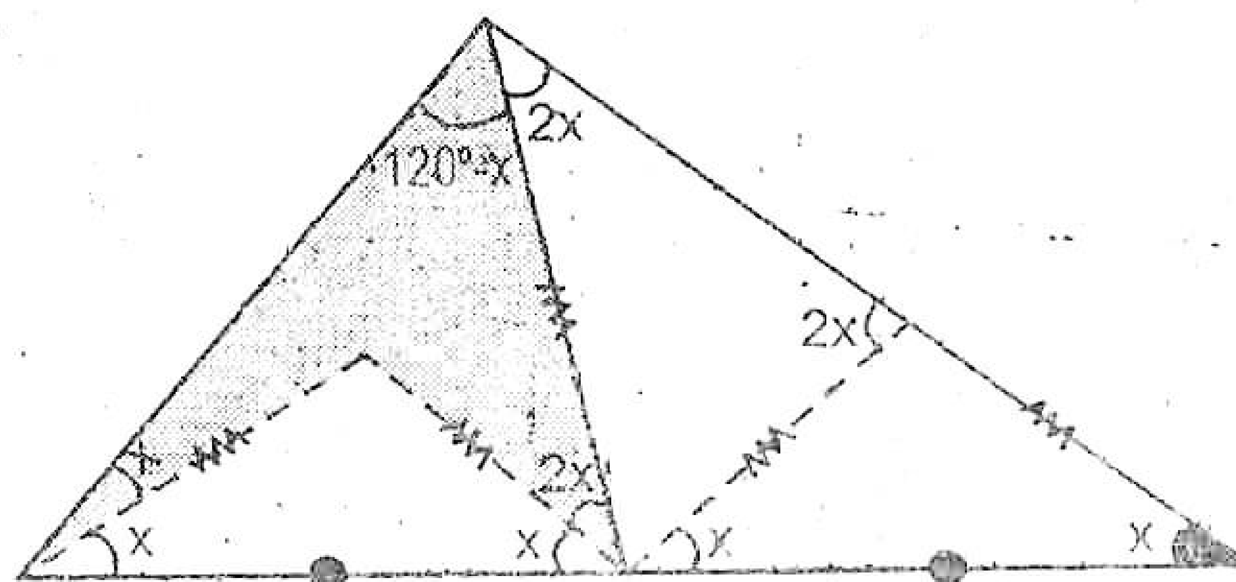


Paso N° 3:
Ahora se obtiene un cuadrilátero concavo cumpliendo la siguiente propiedad:





Paso N° 4: Finalmente en la figura se observa:



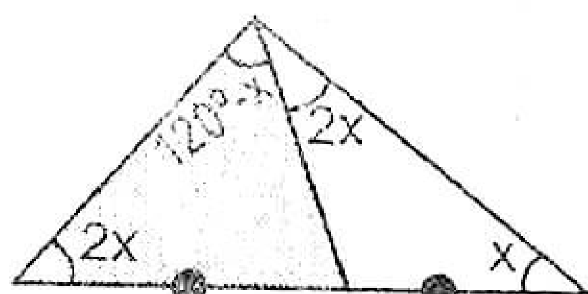
Te dirán que trates de probar que tienes razón; Yo te digo que trates de probar que no la tienes. (Luis Pasteur)

Donde se cumple:

$$120^\circ - x + 2x + 2x + x = 180^\circ$$

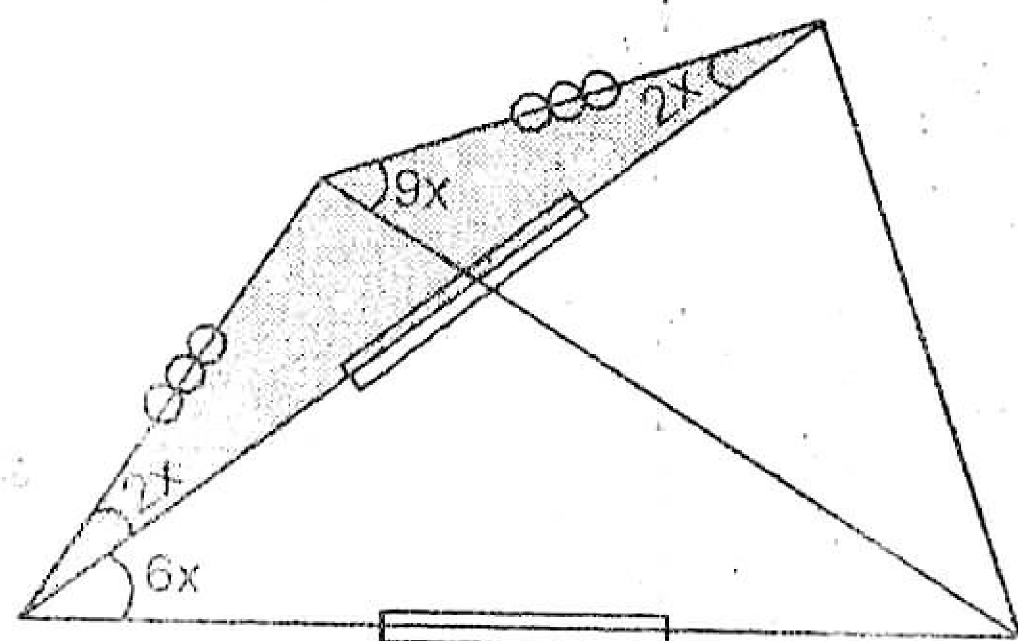
$$4x = 60^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

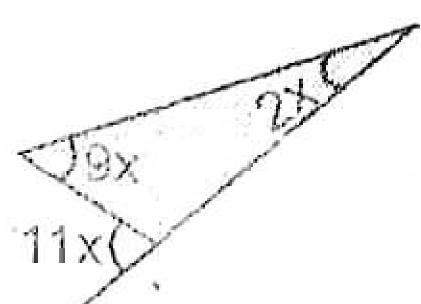


Solución Nº 36

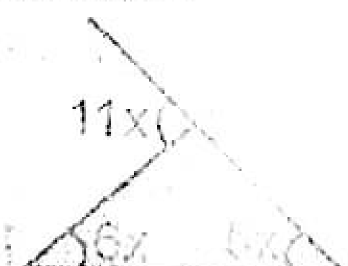
En la figura se observa:

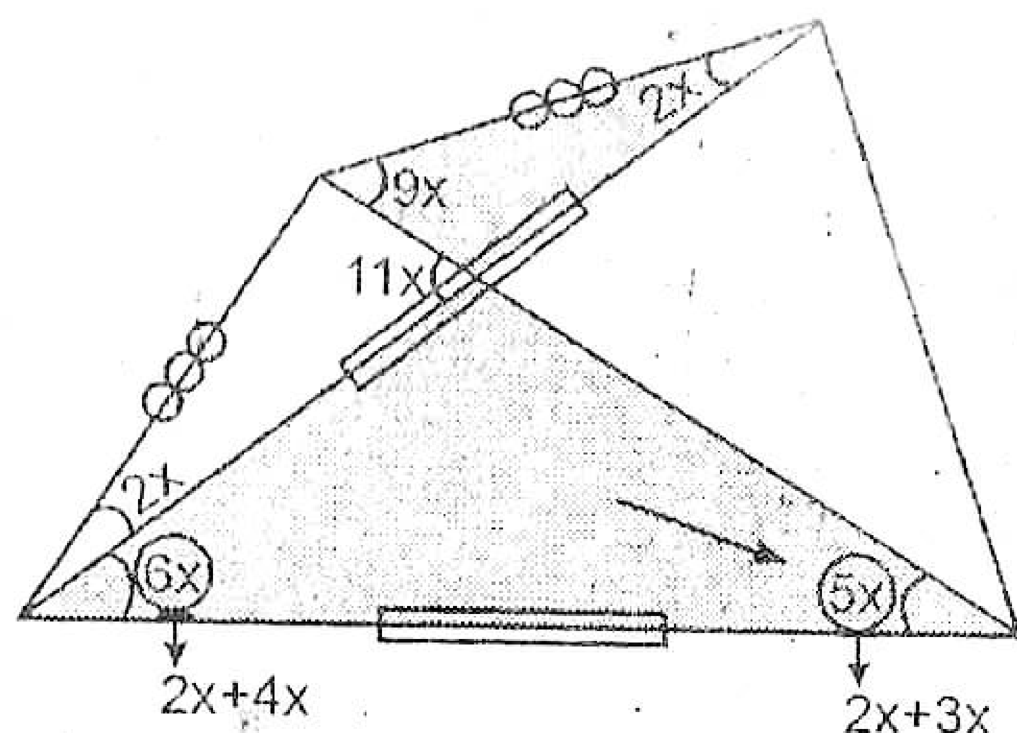


Paso Nº 1:
Se aplica la propiedad del ángulo externo en un triángulo:

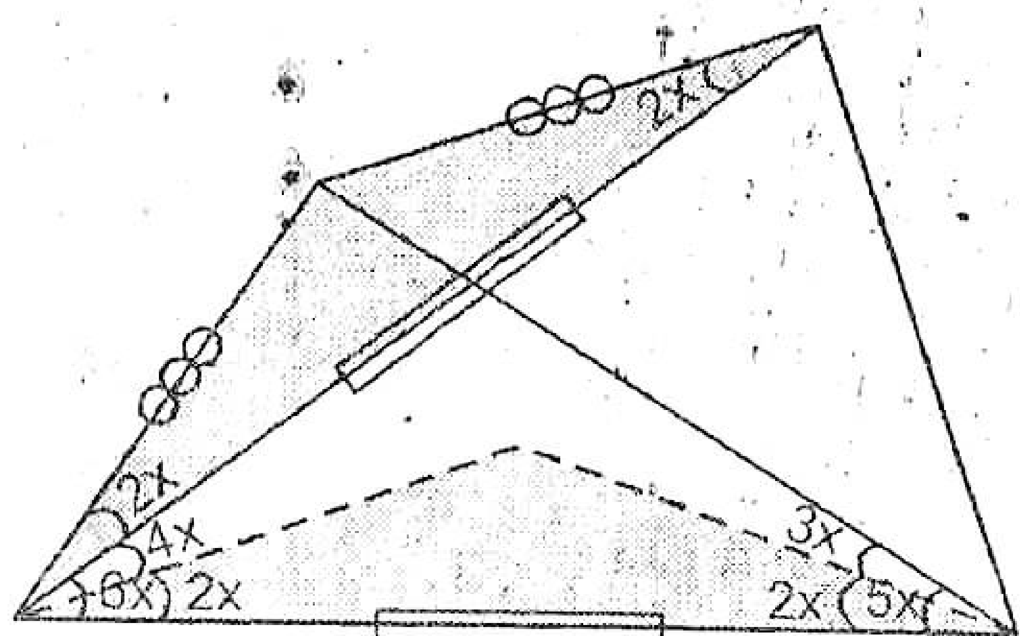


también

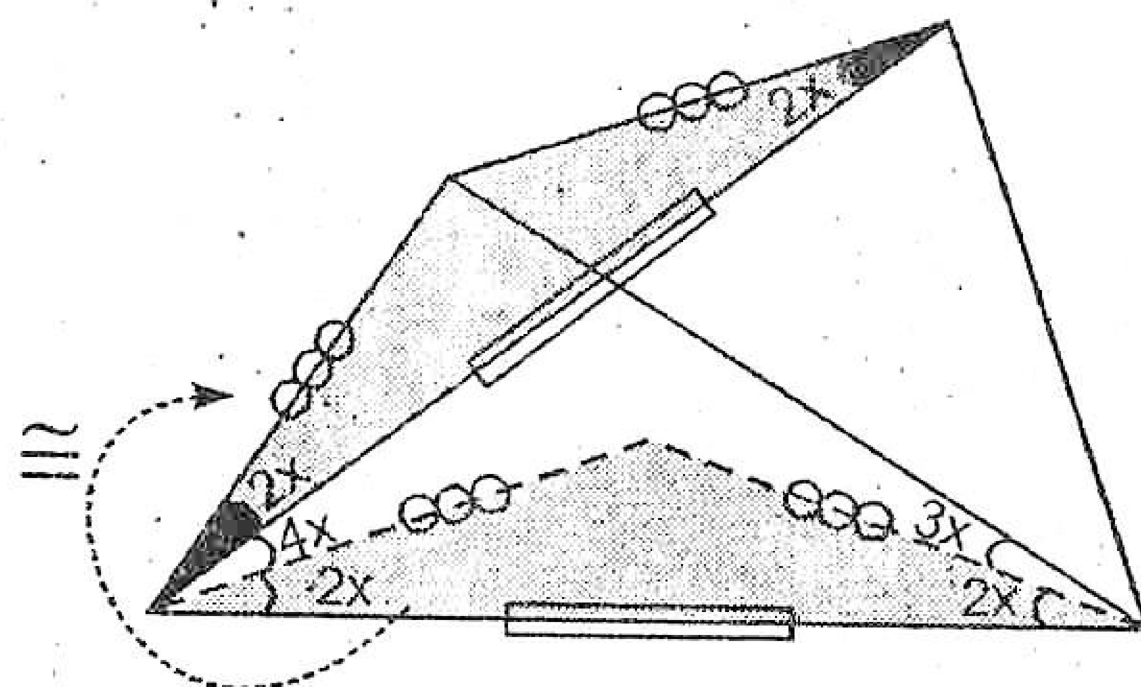




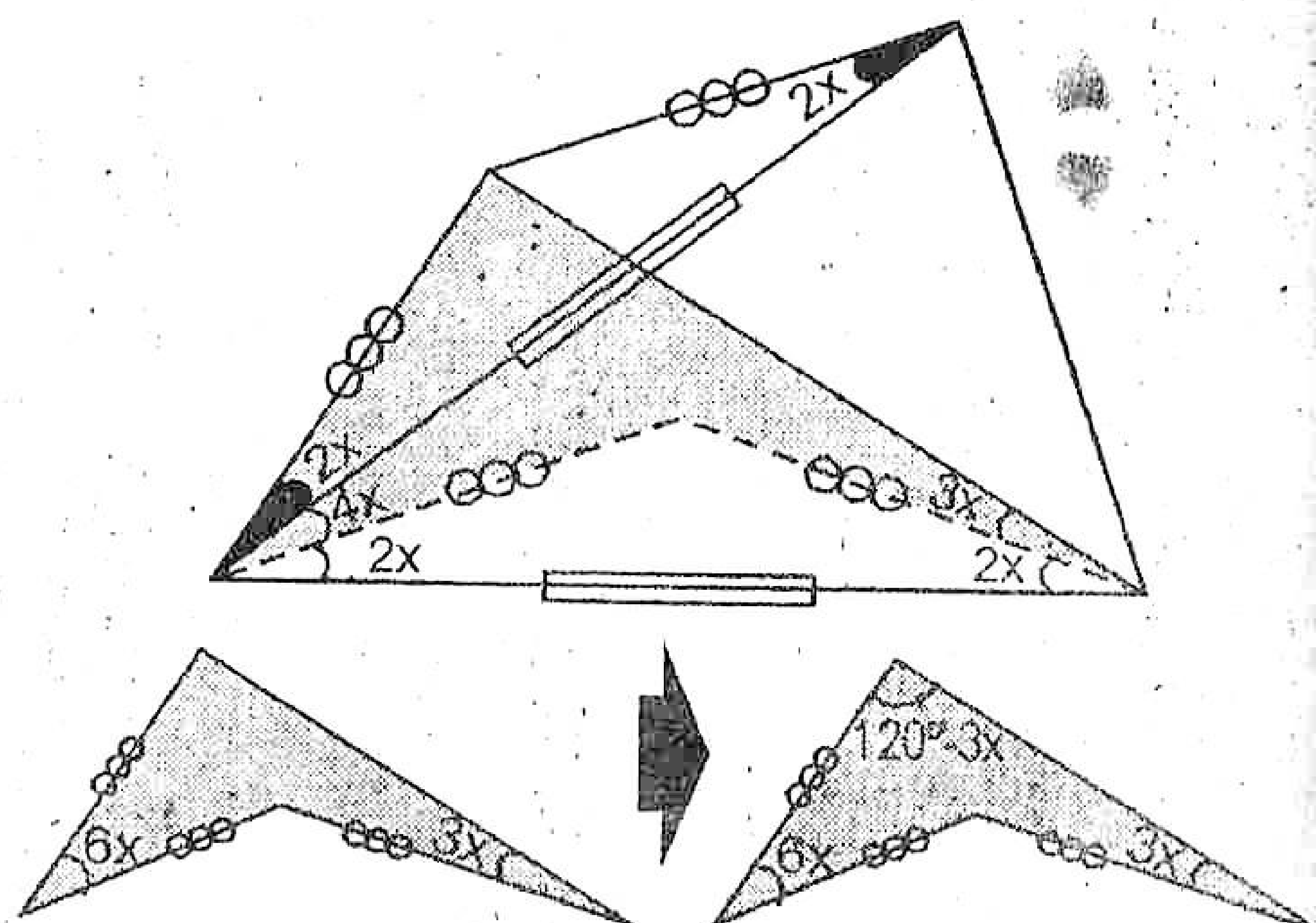
Paso Nº 2:
Realizamos el siguiente trazo, para obtener dos triángulos congruentes.



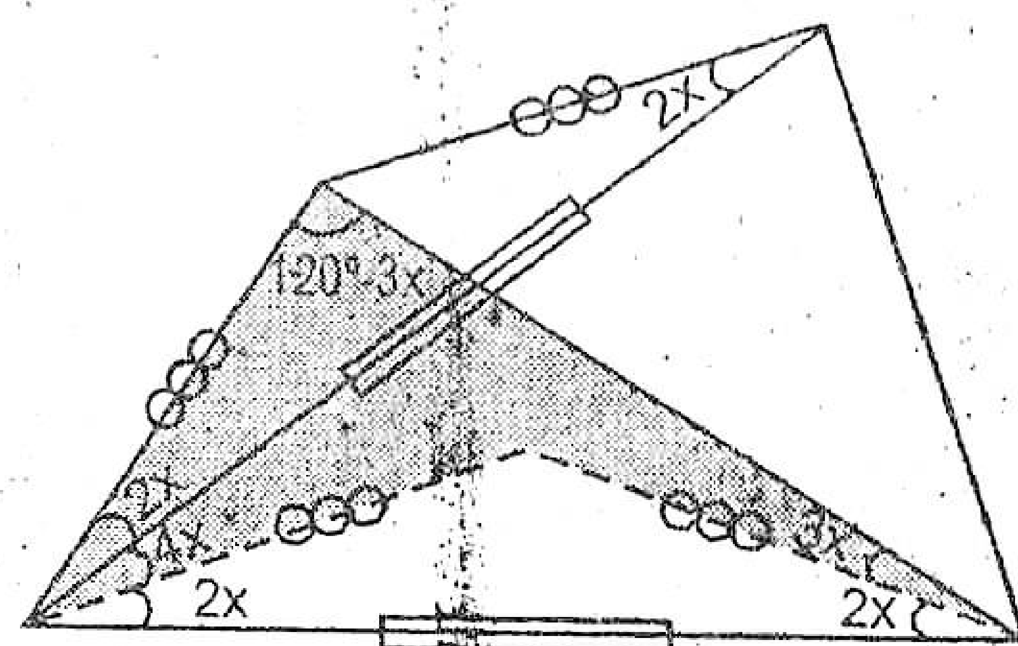
Paso Nº 3: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (A.L.A.)



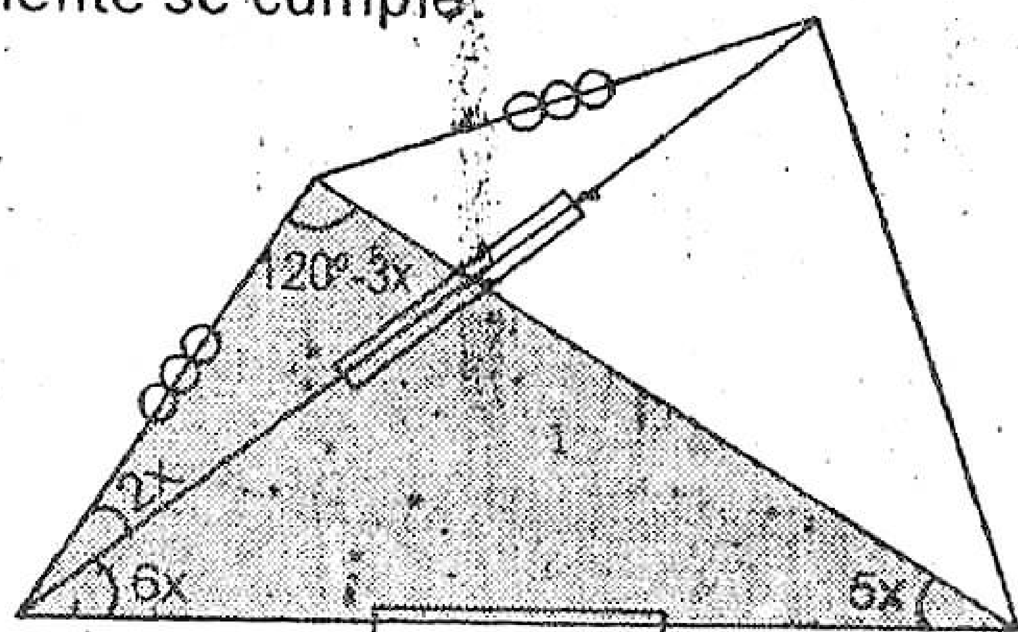
Paso Nº 4: Se observa en la figura un cuadrilátero concavo donde se cumple el septimo criterio de construcción.



Paso Nº 5: Entonces se obtiene en la figura:



Finalmente se cumple:



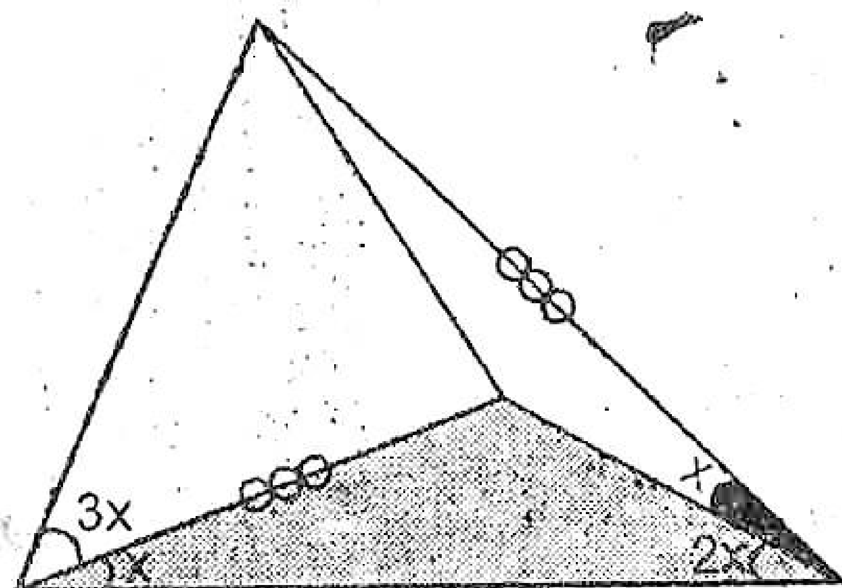
$$\Rightarrow \quad 120^\circ - 3x + 8x + 5x = 180^\circ$$

$$10x = 60^\circ$$

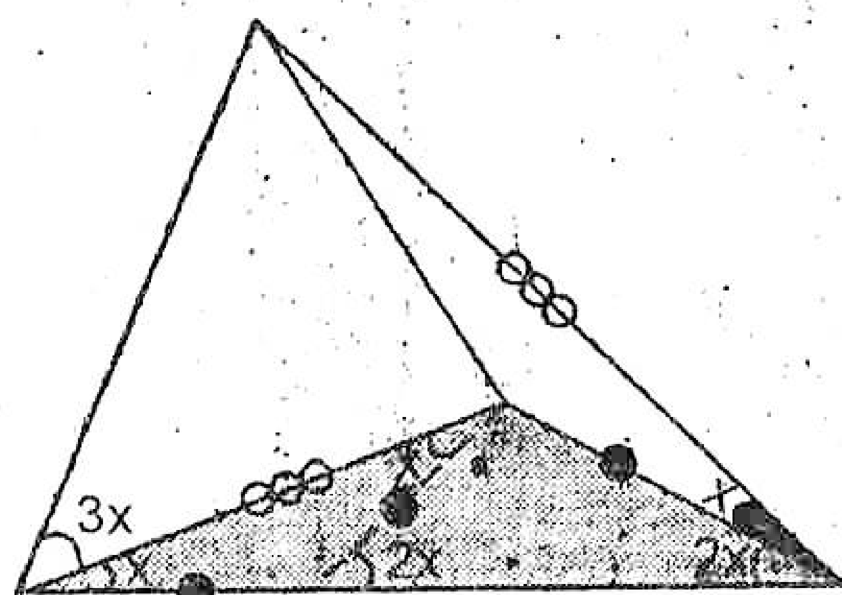
$$x = 6^\circ$$

Solución Nº 37

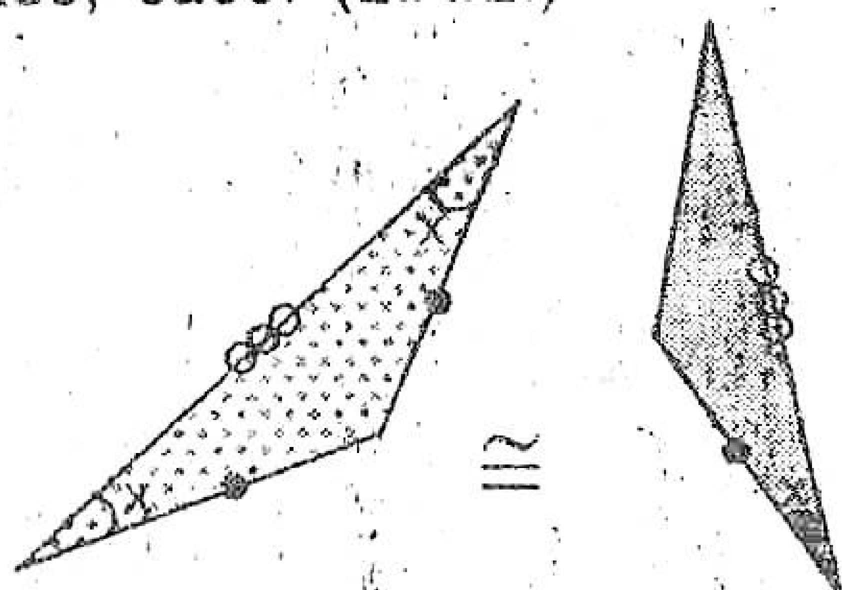
En la figura se observa: un triángulo que tiene ángulos en la relación de 1 a 2

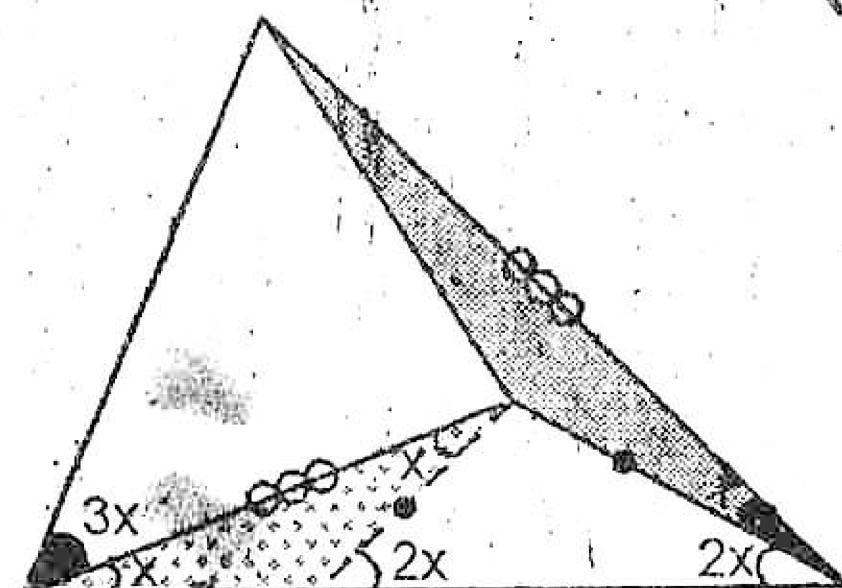


Paso Nº 1:
Aplicamos el primer criterio de construcción:

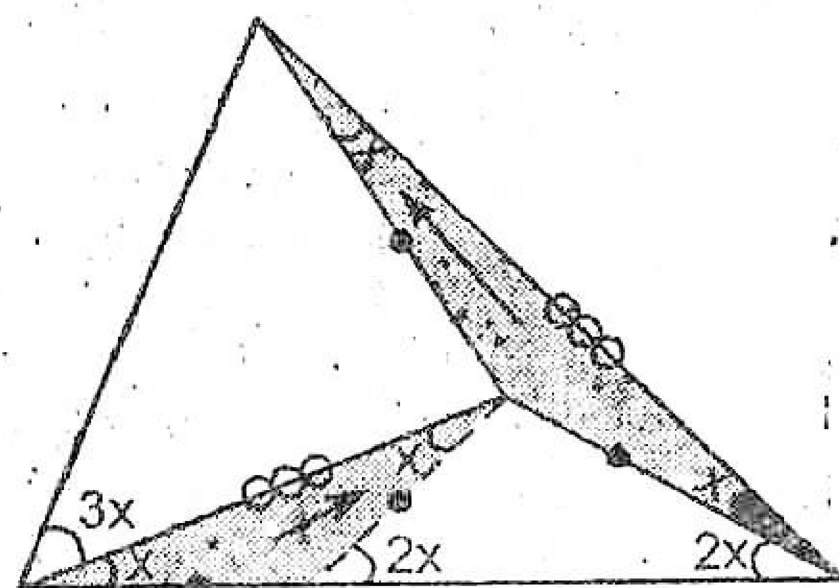


Paso Nº 2:
Con el trazo anterior se obtiene dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)

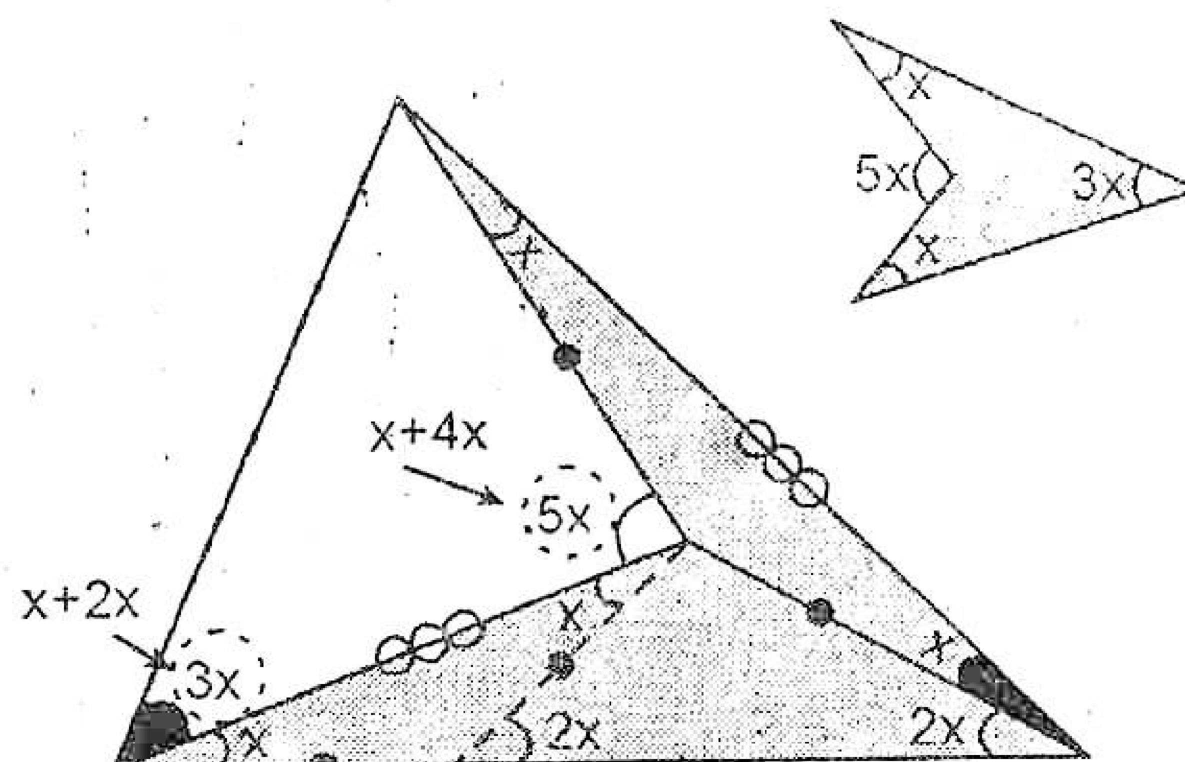




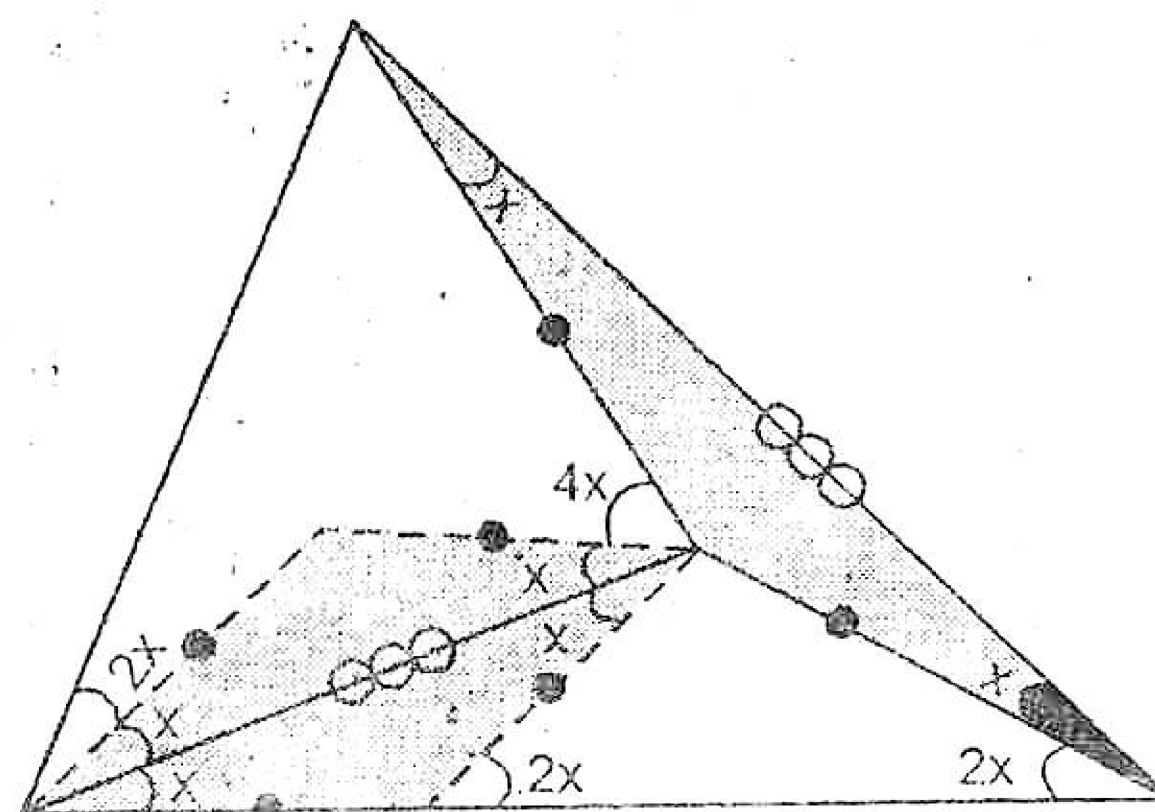
En donde cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



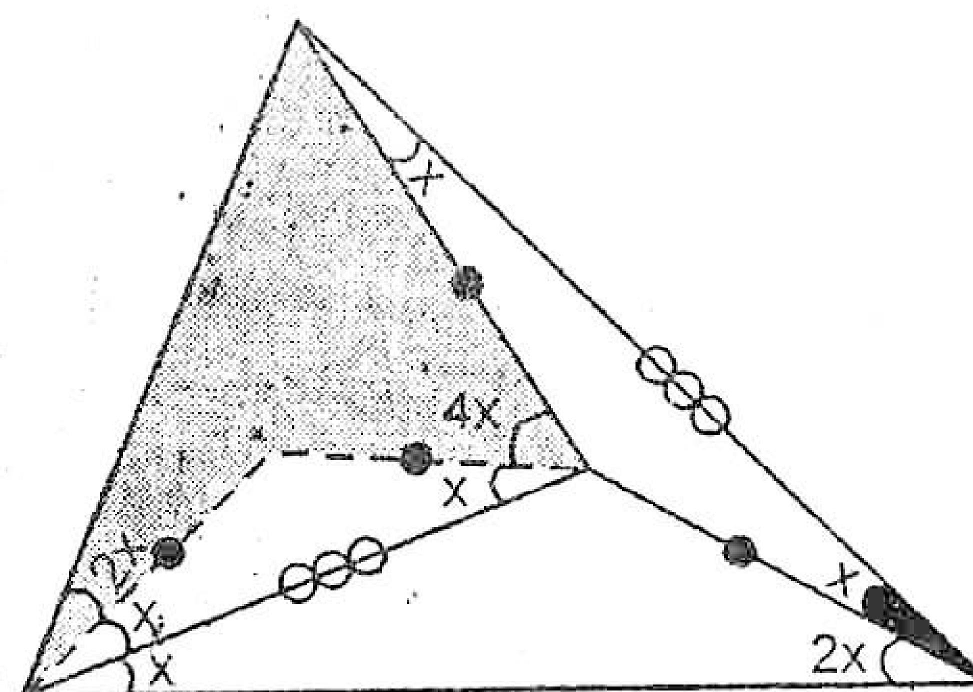
Paso Nº 3: Aplicando la siguiente propiedad

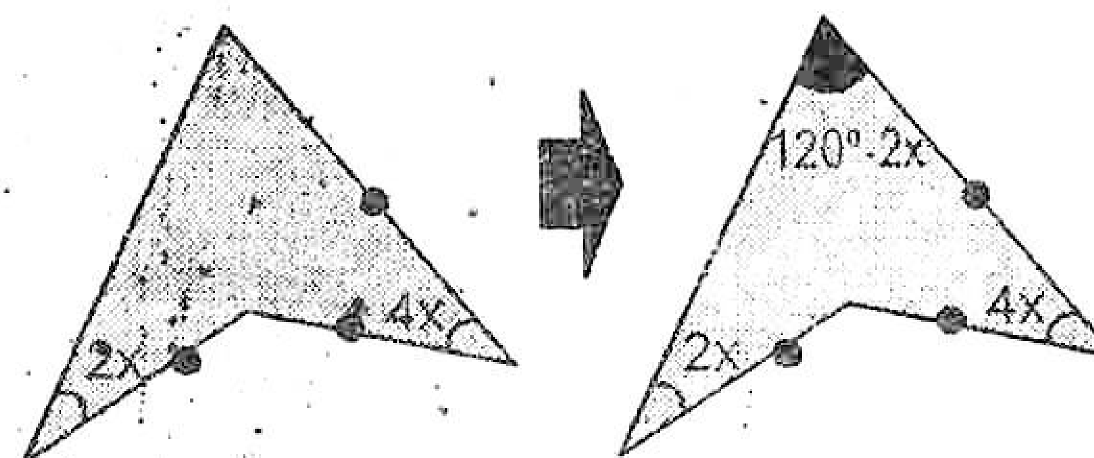


Paso Nº 4: Realizando el siguiente trazo para obtener nuevamente dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)

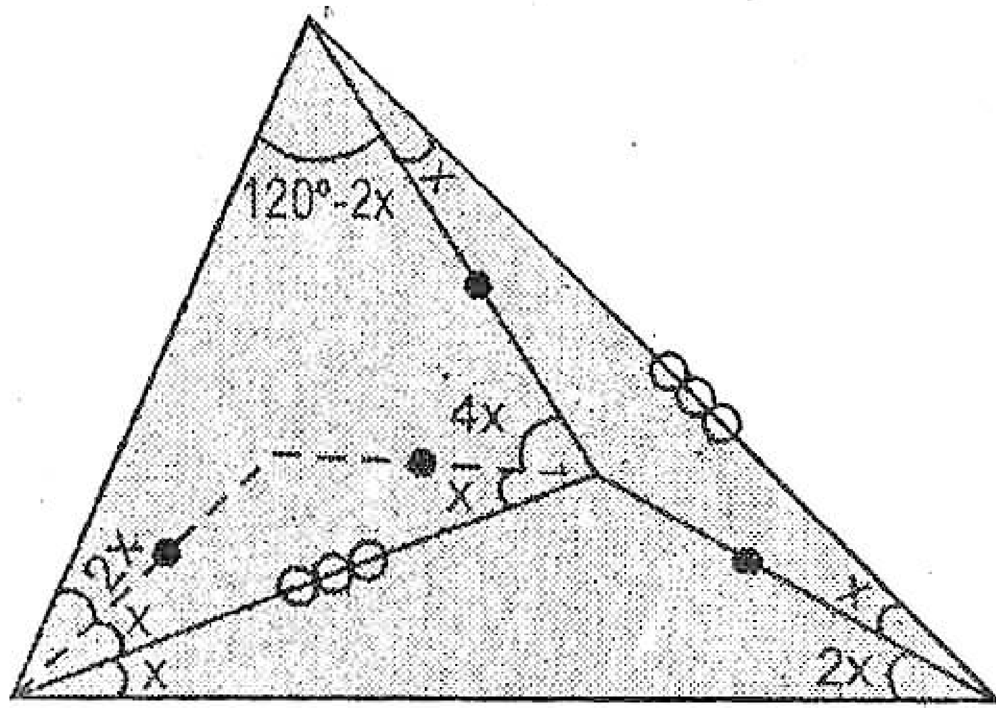


Paso Nº 5:
Ahora se observa un cuadrilátero concavo donde se aplica el séptimo criterio de construcción.





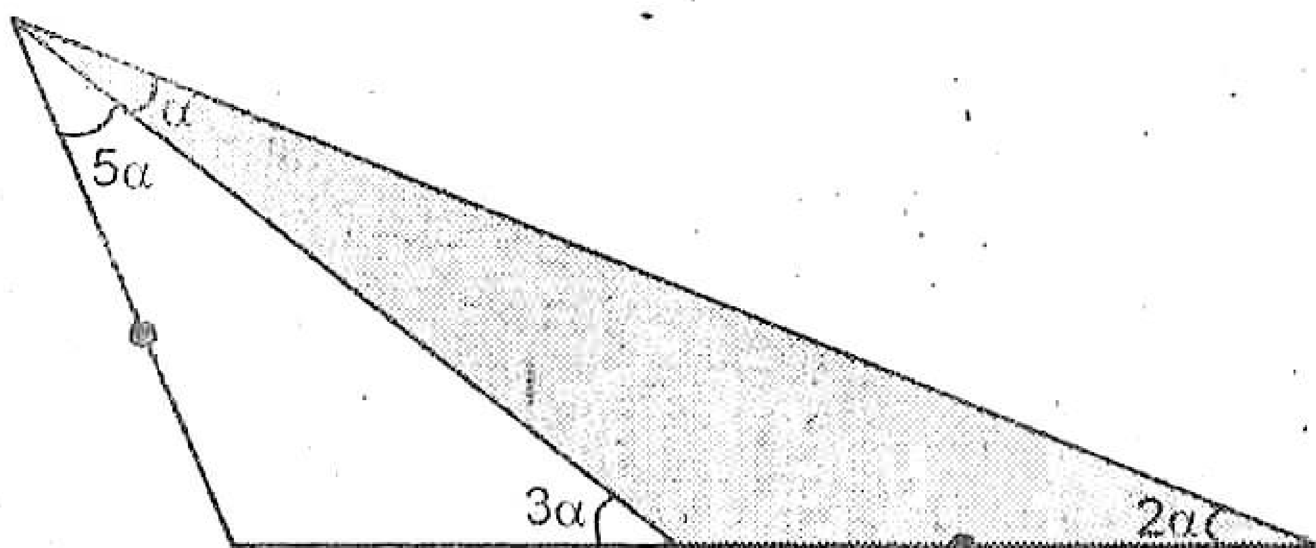
Paso N° 6:



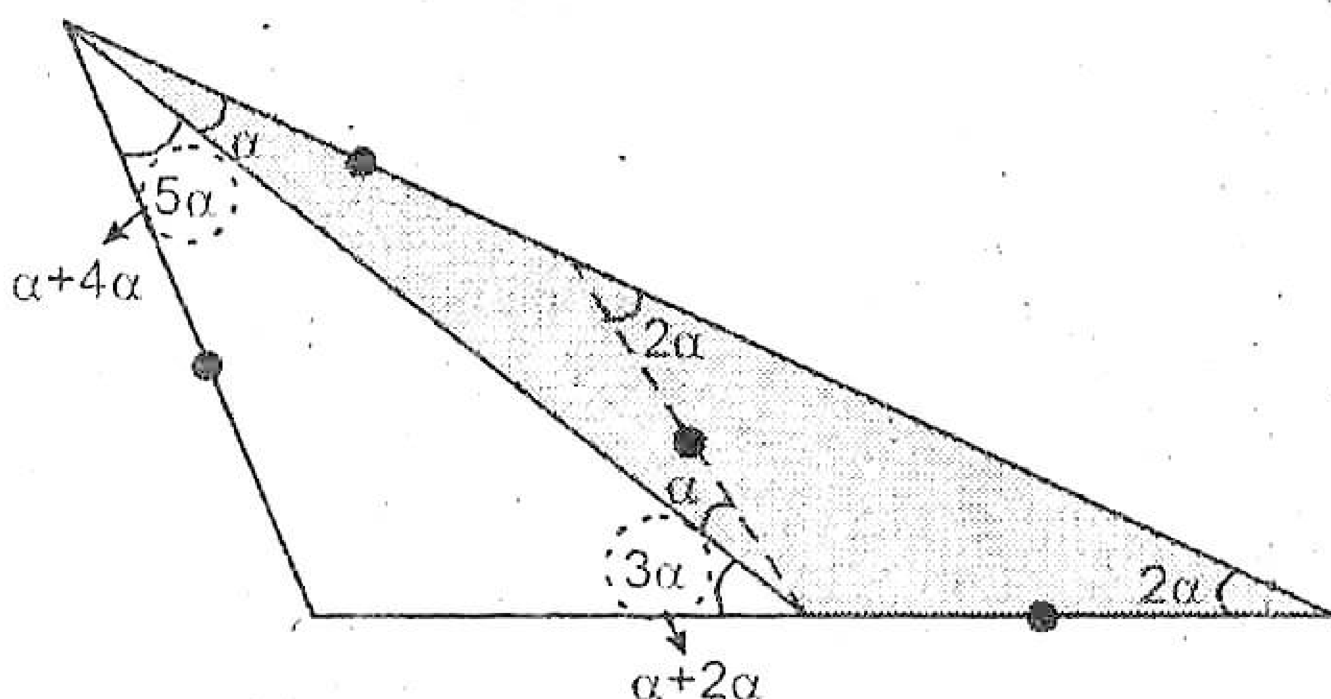
Finalmente en la figura se cumple:

$$4x + 120° - 2x + x + 3x = 180°$$
$$6x = 60°$$
$$x = 10°$$

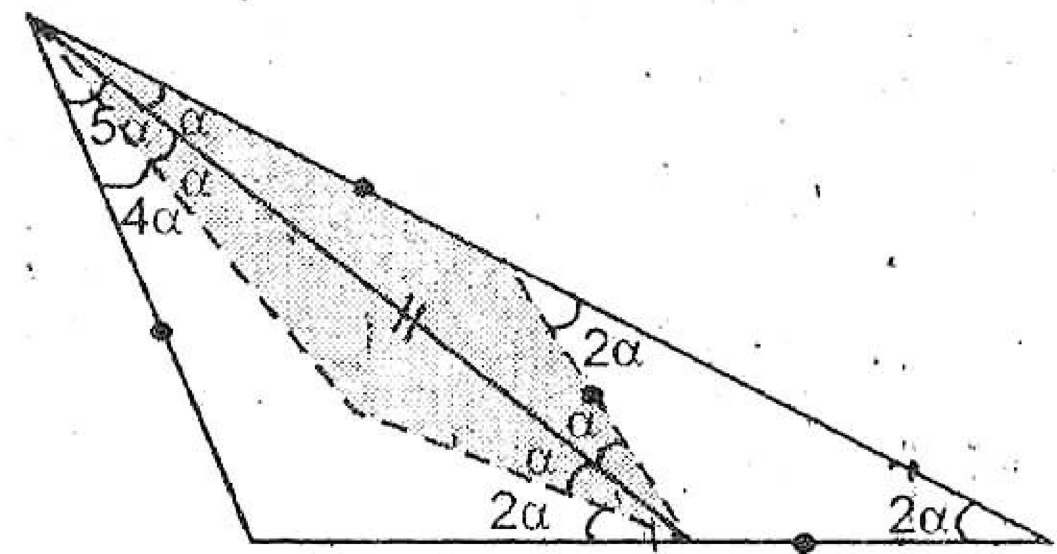
Solución N° 38



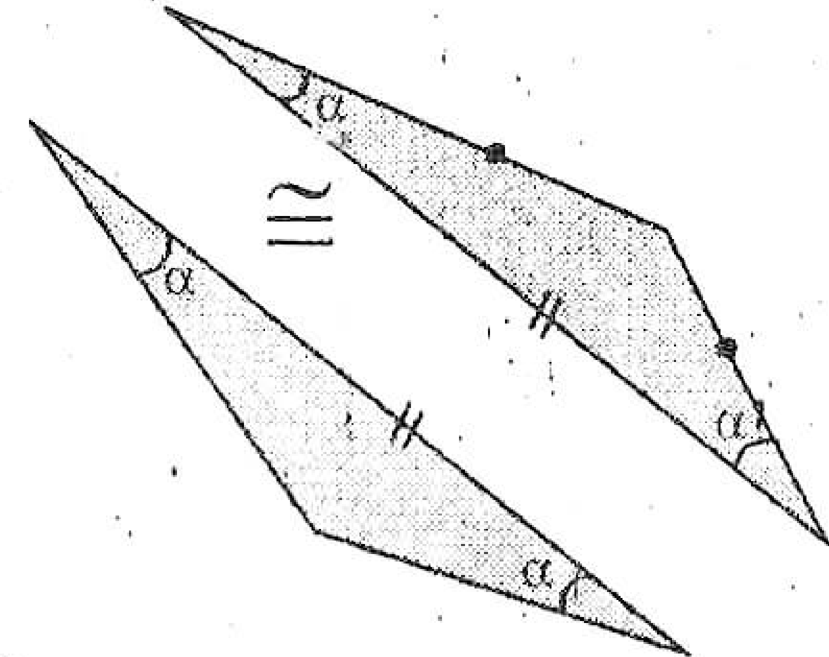
Paso N° 1:
Se observa un triángulo que posee ángulos en la relación de uno a dos, entonces aplicamos el primer critério de construcción:

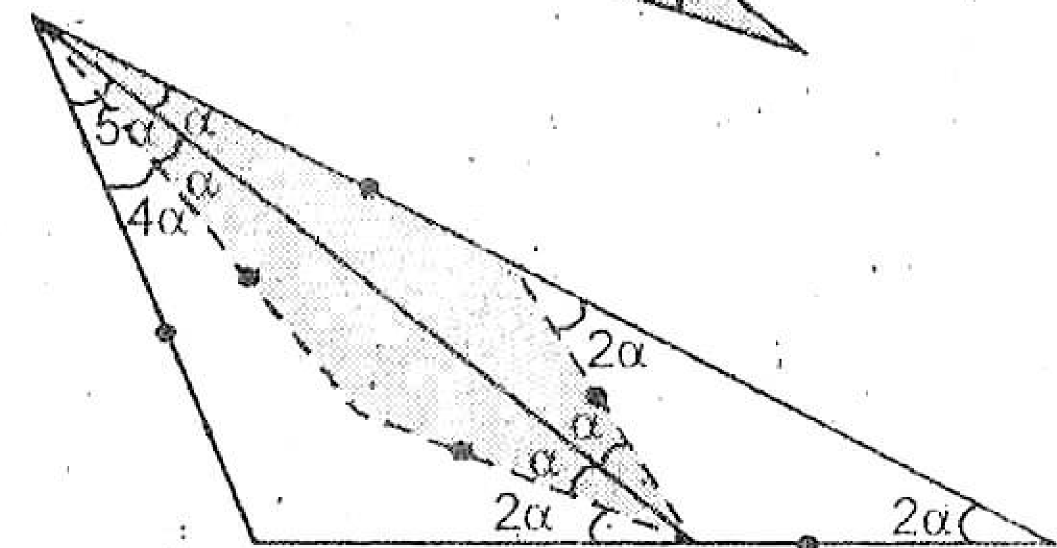


Paso N° 2:
En la figura se obtienen dos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo, caso: (A.L.A.)

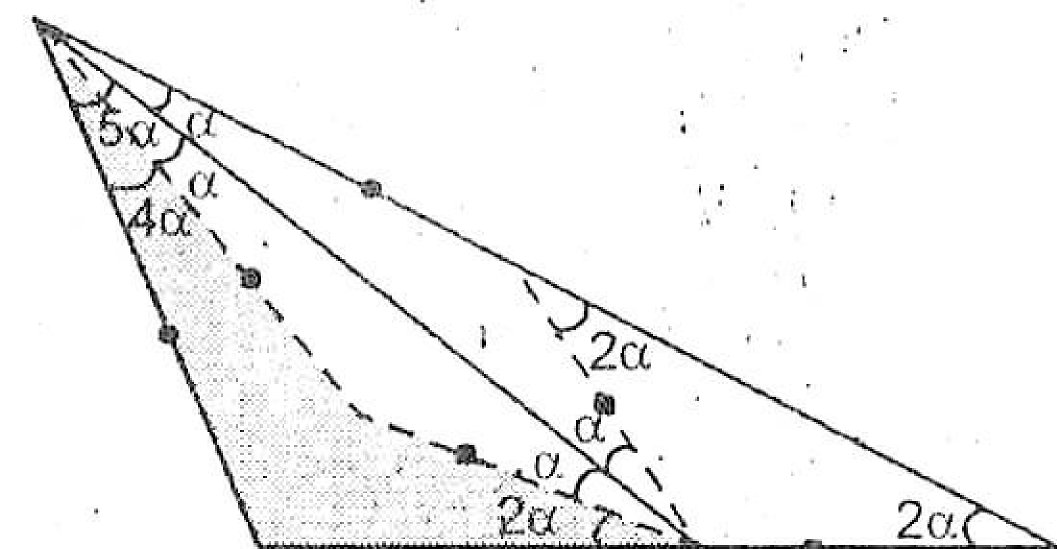


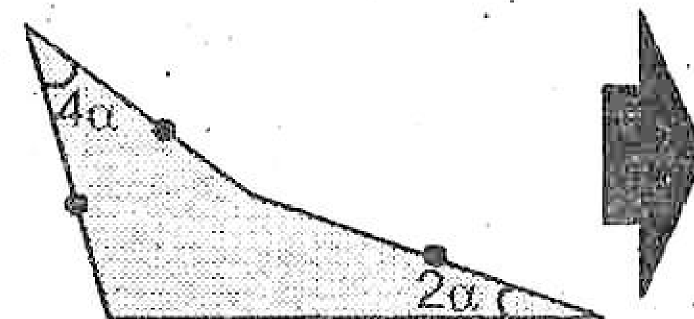


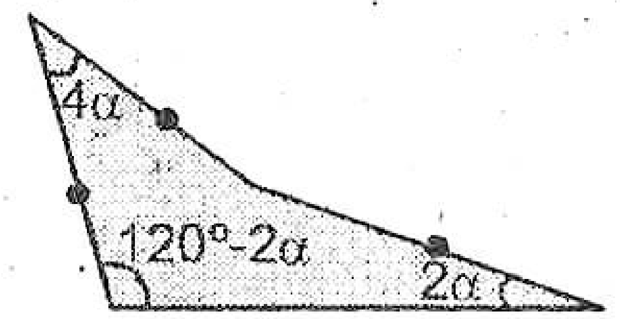




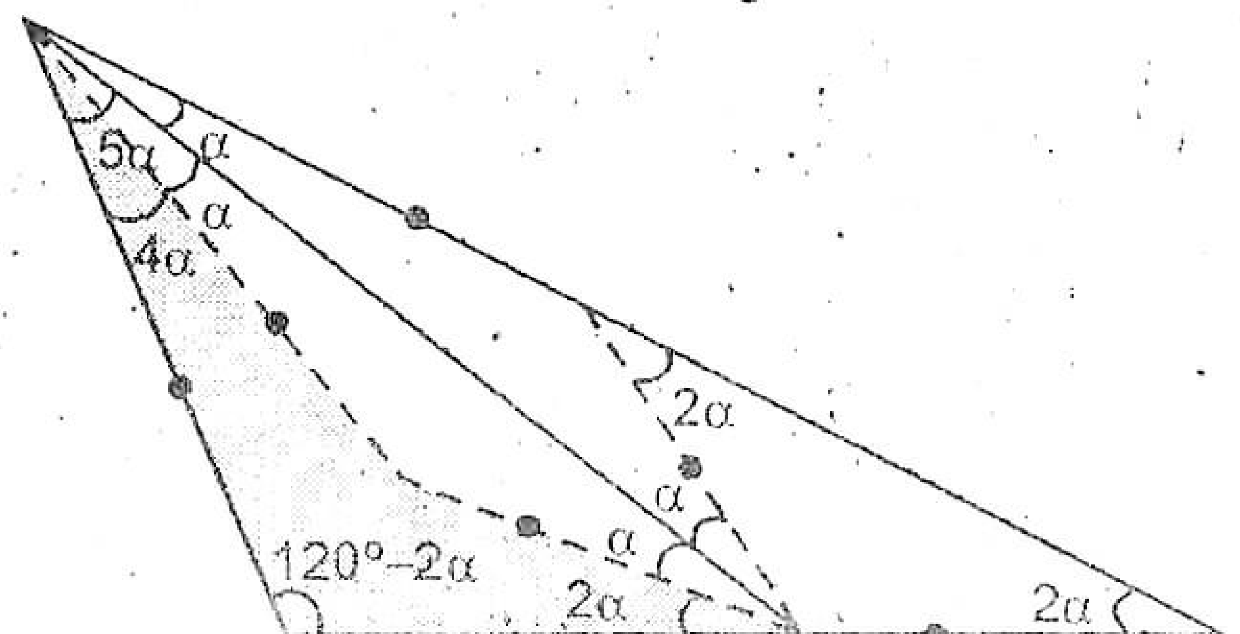
Paso N° 3:
Se observa un cuadrilátero concavo donde se aplicará el séptimo criterio de construcción.



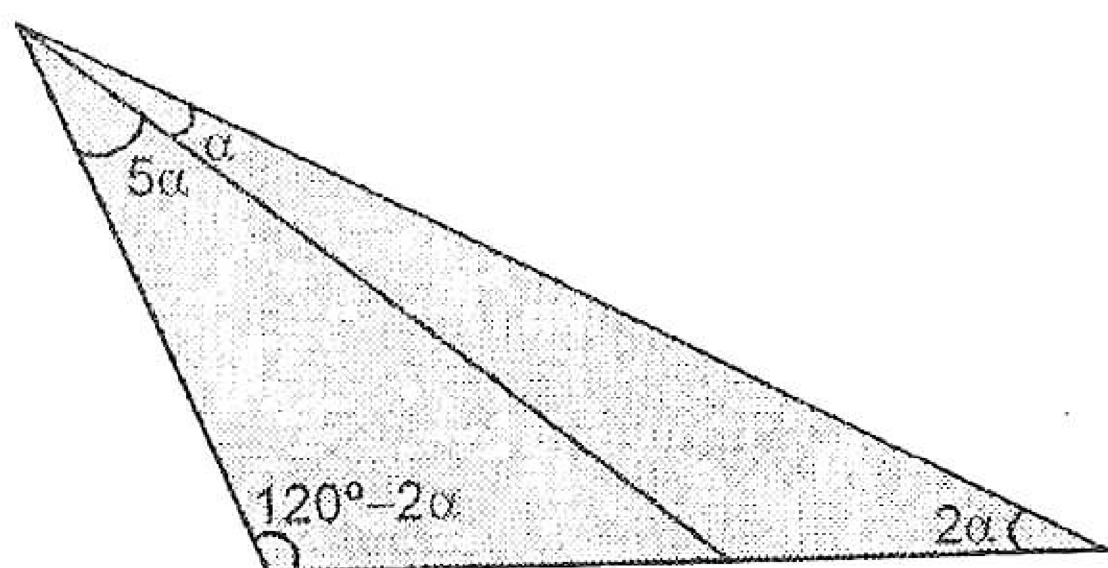




Paso N° 4:
Ahora observamos en la figura:



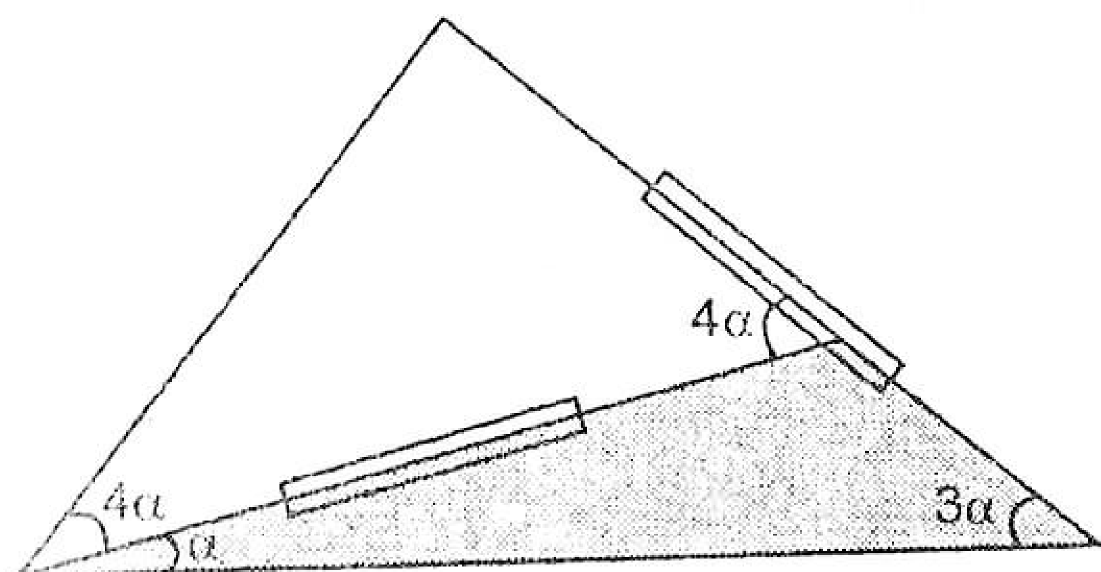
Paso N° 5:
Finalmente en el triángulo total se cumple:



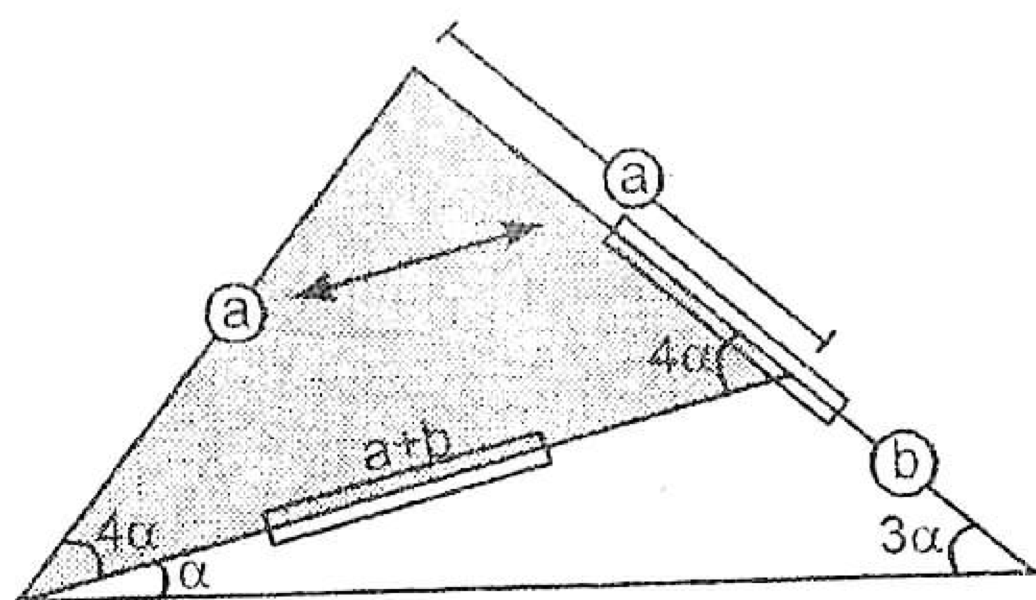
$$120° - 2\alpha + 5\alpha + \alpha + 2\alpha = 180°$$
$$6\alpha = 60°$$
$$\alpha = 10°$$

Solución Nº 39

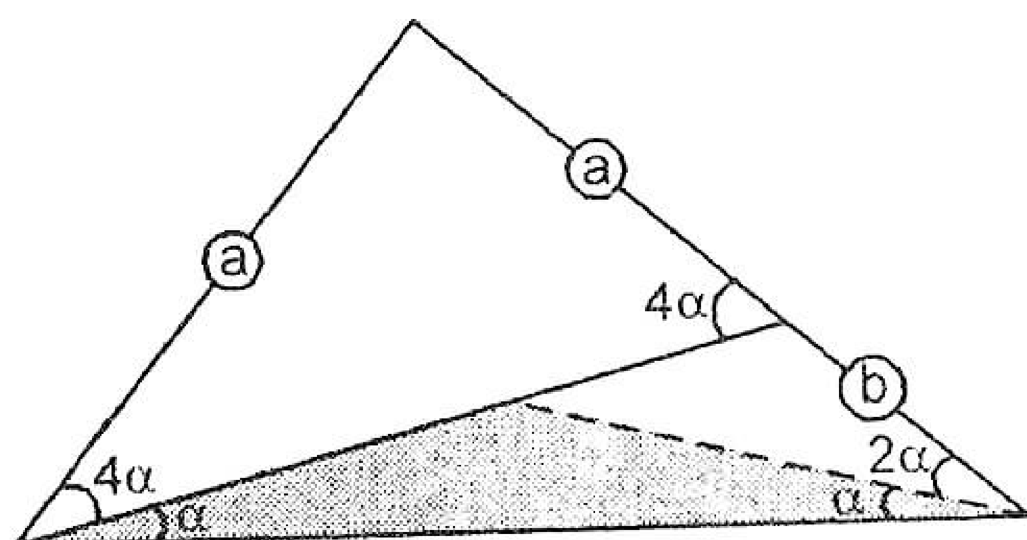
En la figura se observa:



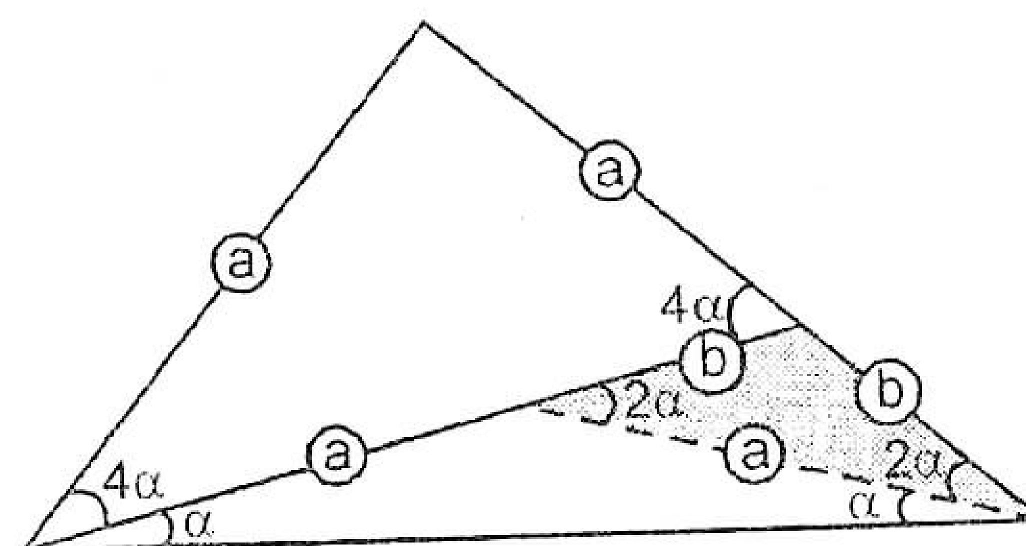
Paso N° 1:
Se observa de la figura un triángulo isósceles.



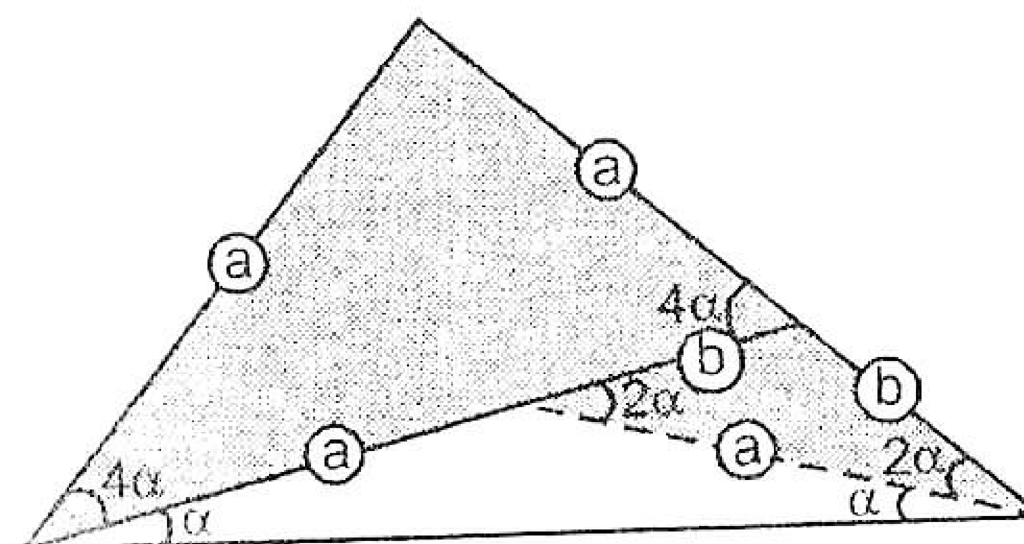
Paso N° 2:
Ahora realizamos el siguiente trazo para obtener lados iguales y así generar triángulos isósceles de la siguiente manera.

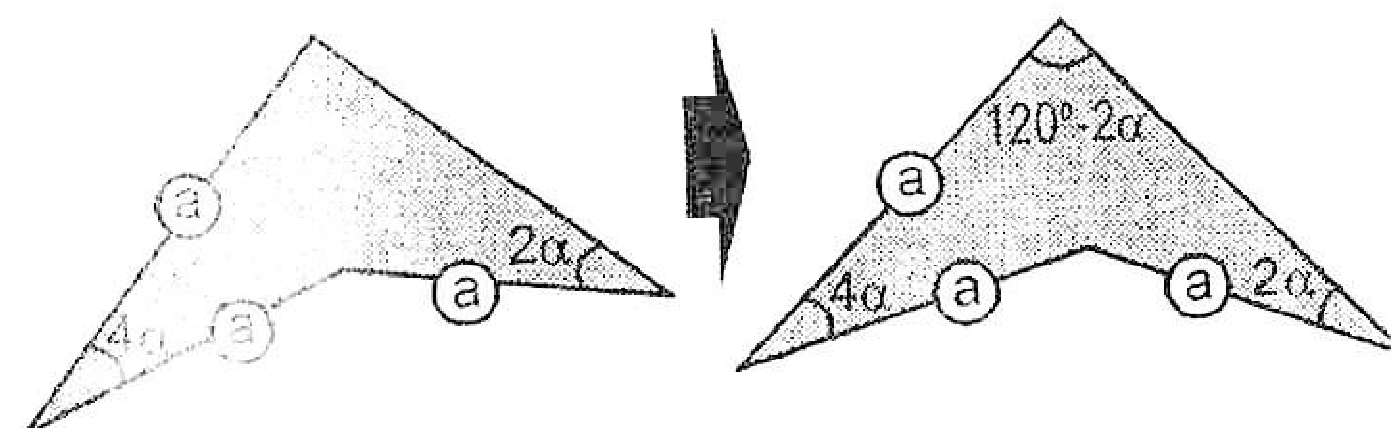


Luego se obtiene:

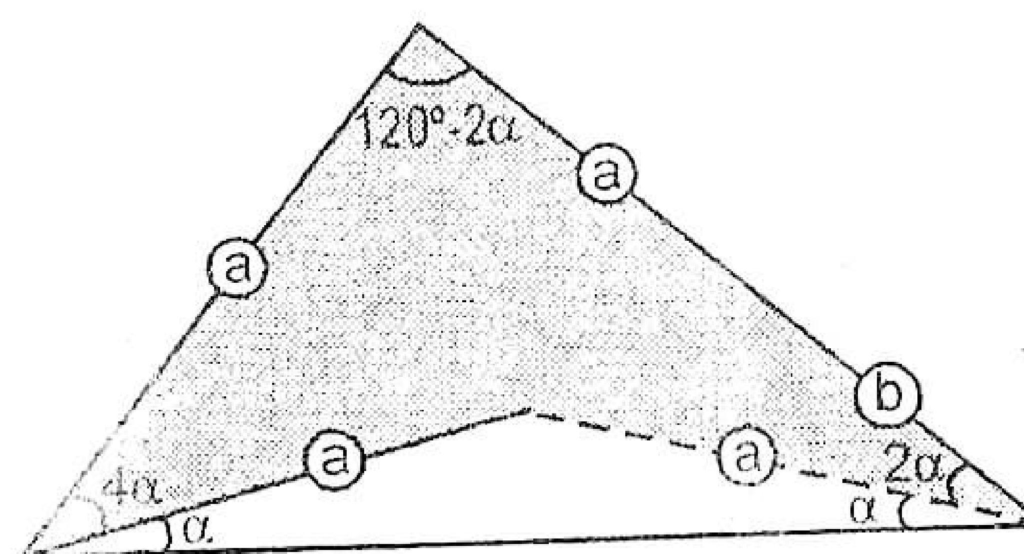


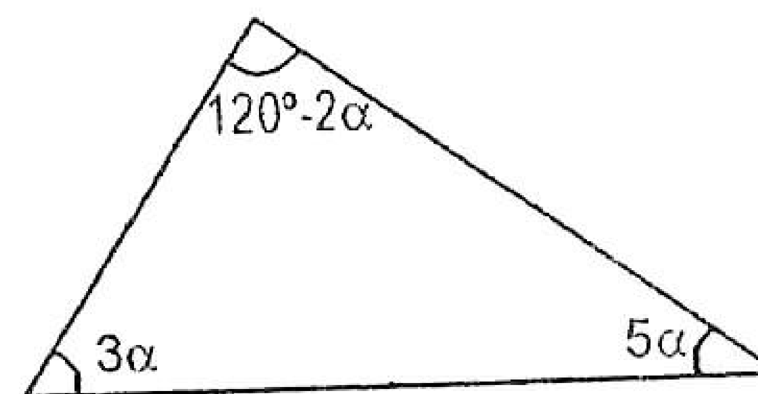
Paso N° 3:
Ahora se observa en la figura un cuadrilátero concavo donde se aplica el séptimo criterio de construcción.





Paso N° 4:



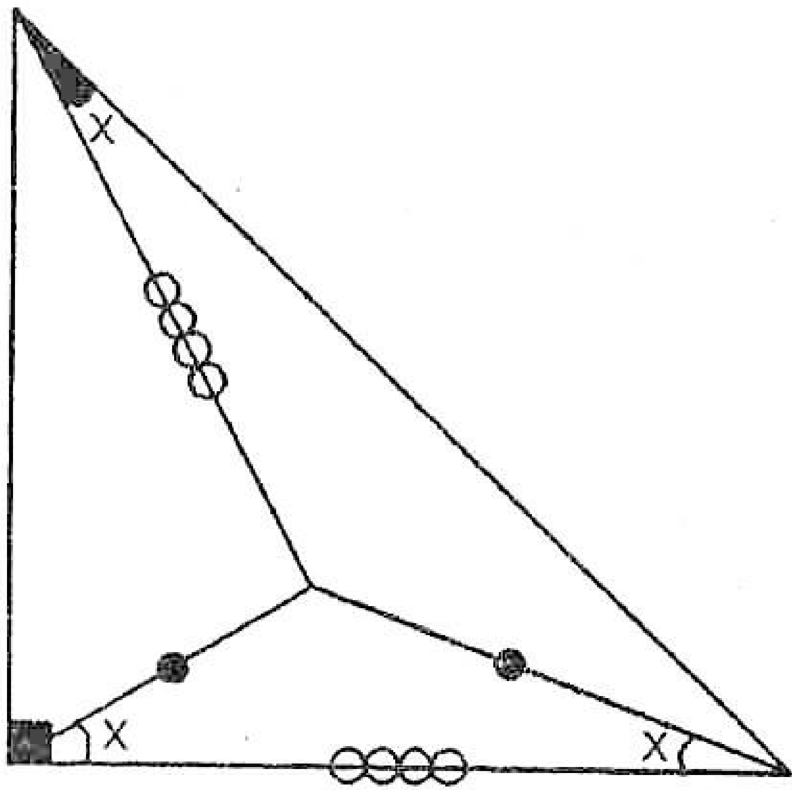


Ahora observamos en el triángulo total que se cumple:

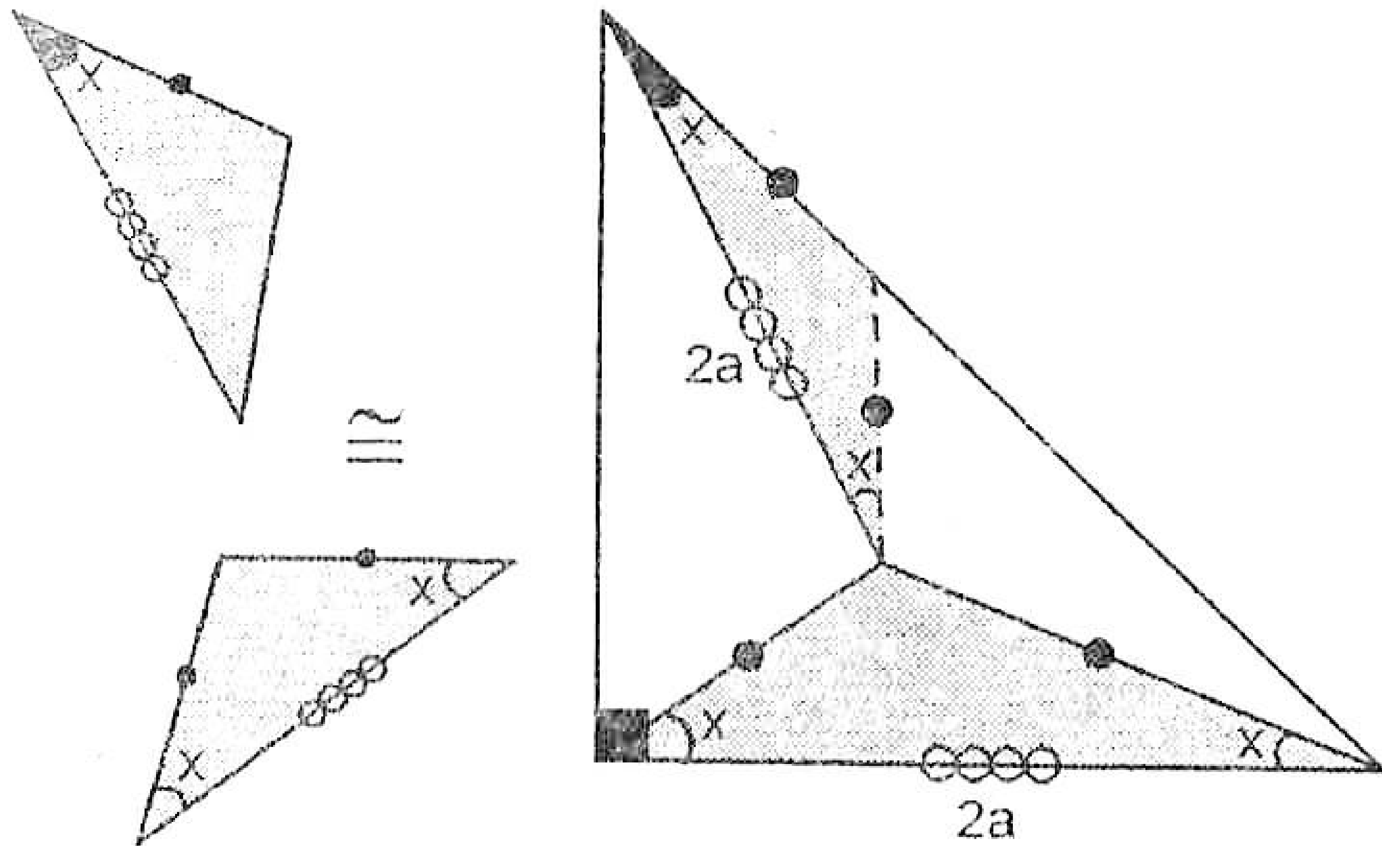
$$3\alpha + 120° - 2\alpha + 5\alpha = 180°$$
$$6\alpha = 60°$$
$$\alpha = 10°$$

Solución N° 40

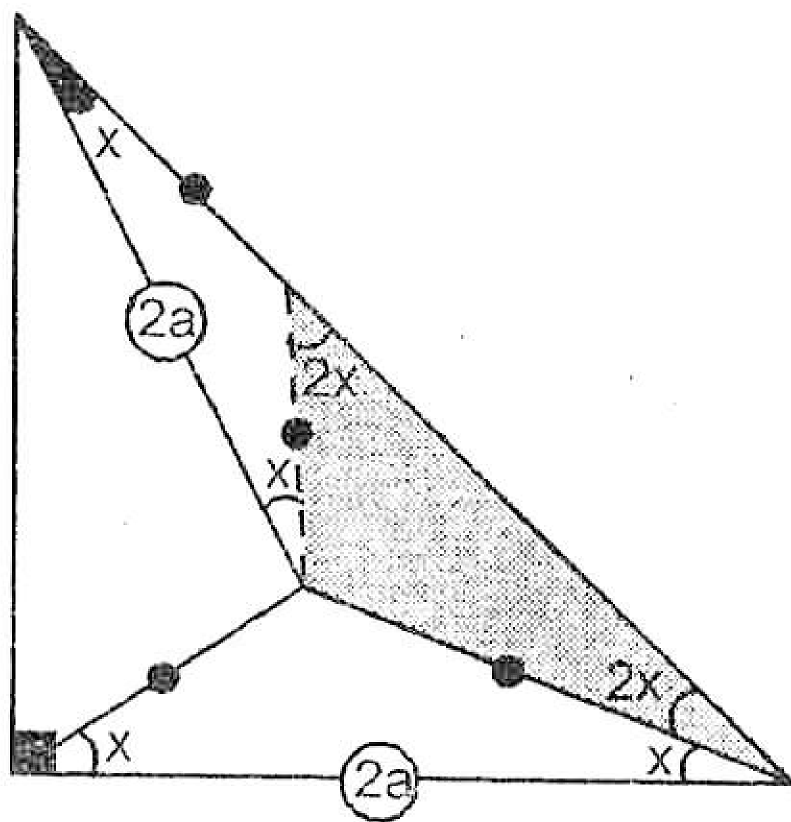
De la figura se observa:



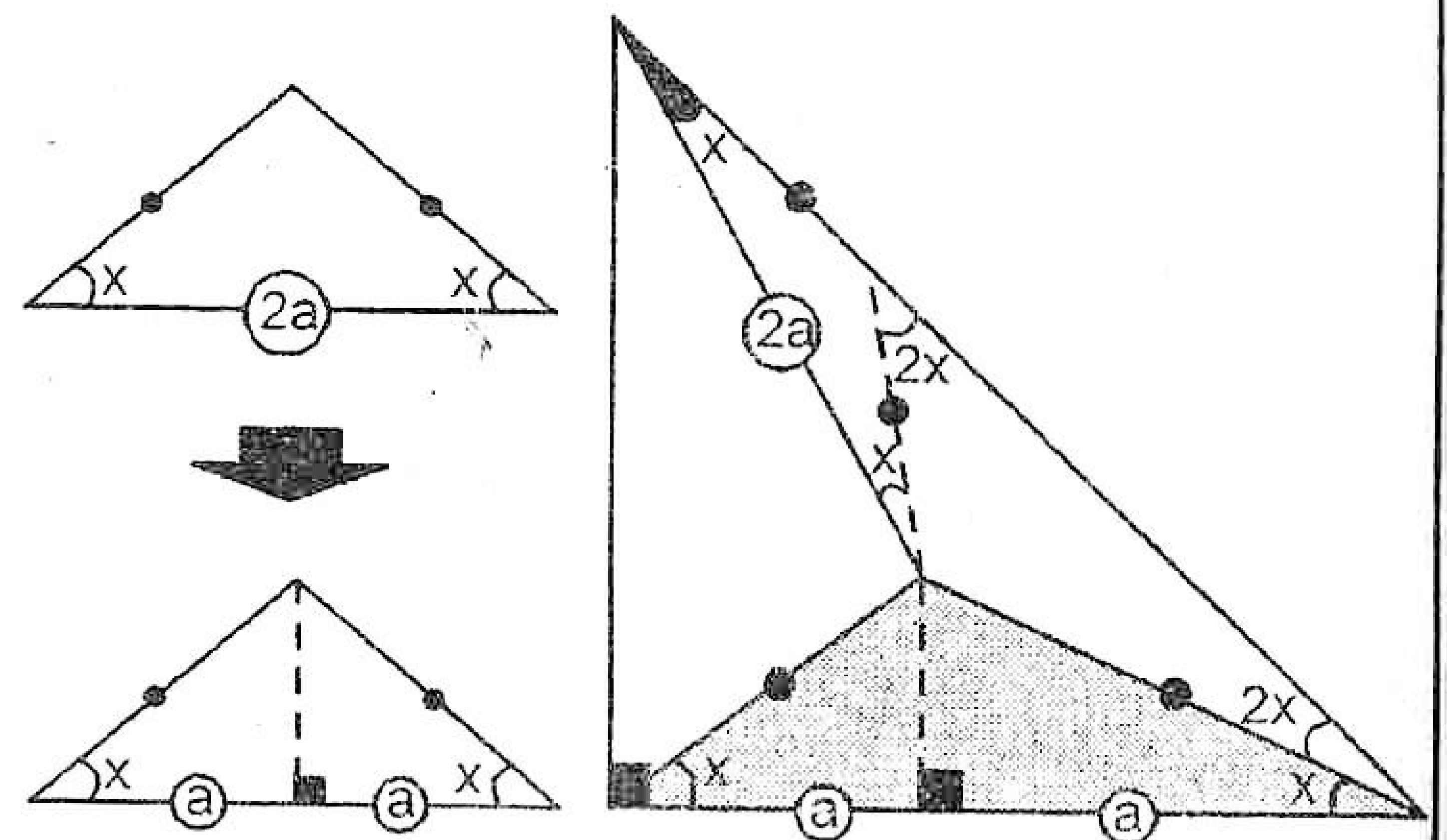
Paso N° 1:
Realizando el siguiente trazo para obtener dos triángulos congruentes de la siguiente manera. Caso (L.A.L.)



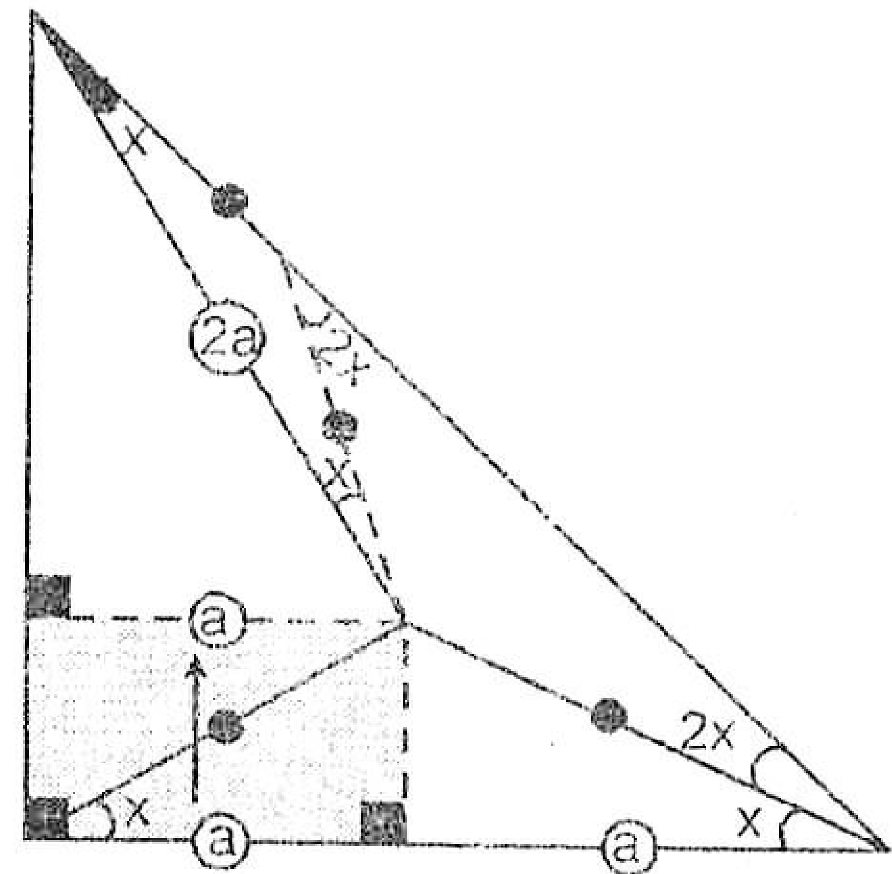
Paso N° 2:
Se observa que se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:



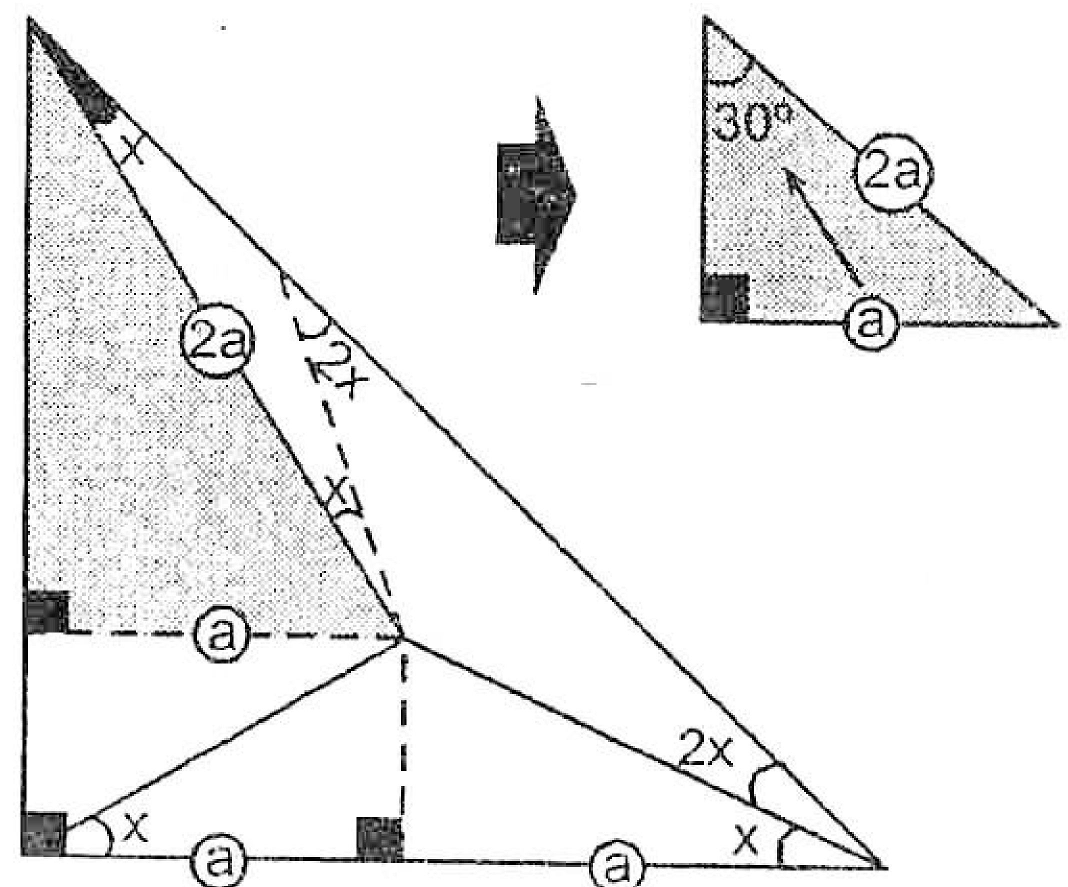
Paso N° 3:
Se observa en el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:



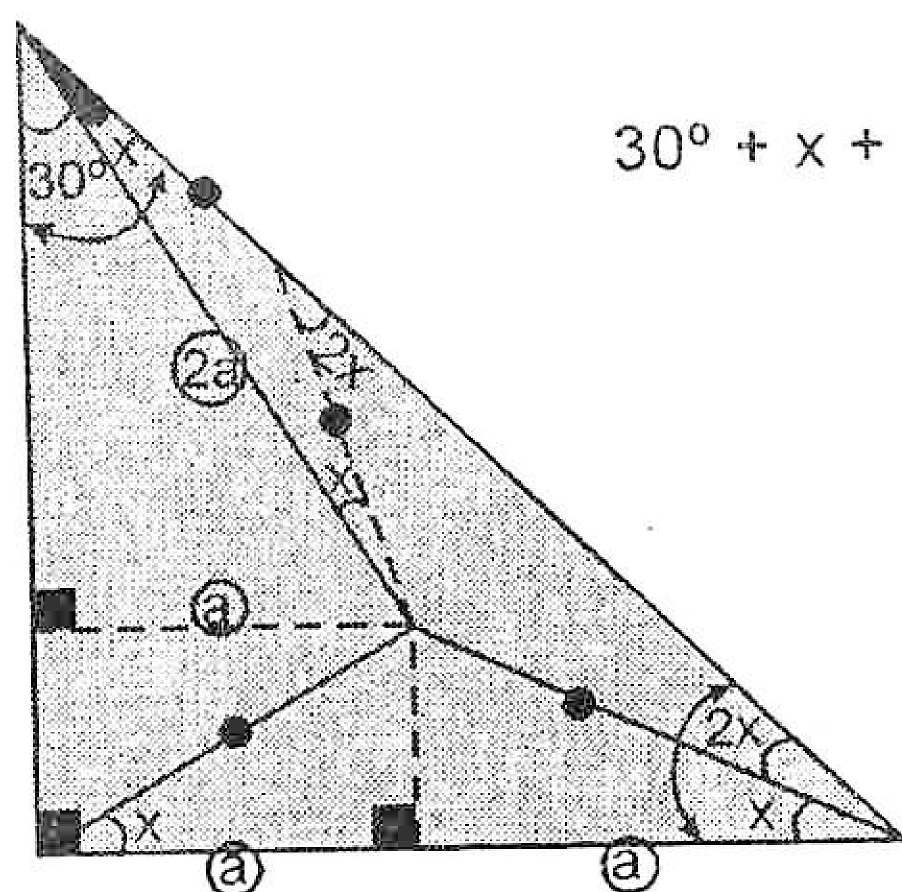
Paso N° 4:
Ahora hacemos el siguiente trazo.



Paso N° 5:
Con el trazo anterior se obtiene un triángulo rectángulo notable de (30° y 60°)



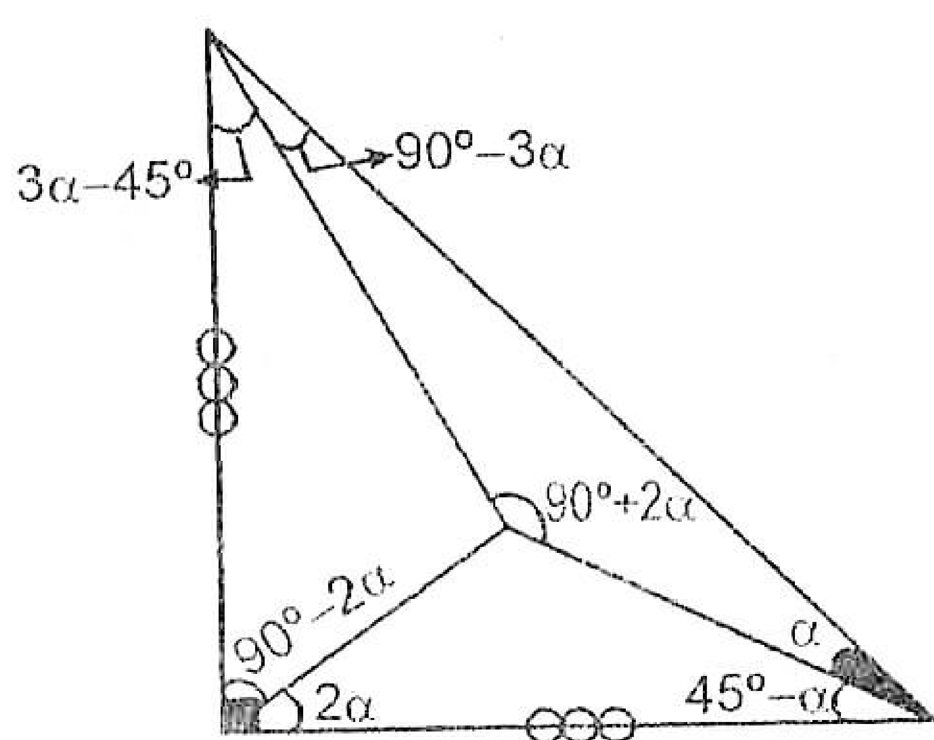
De la figura total se obtiene:



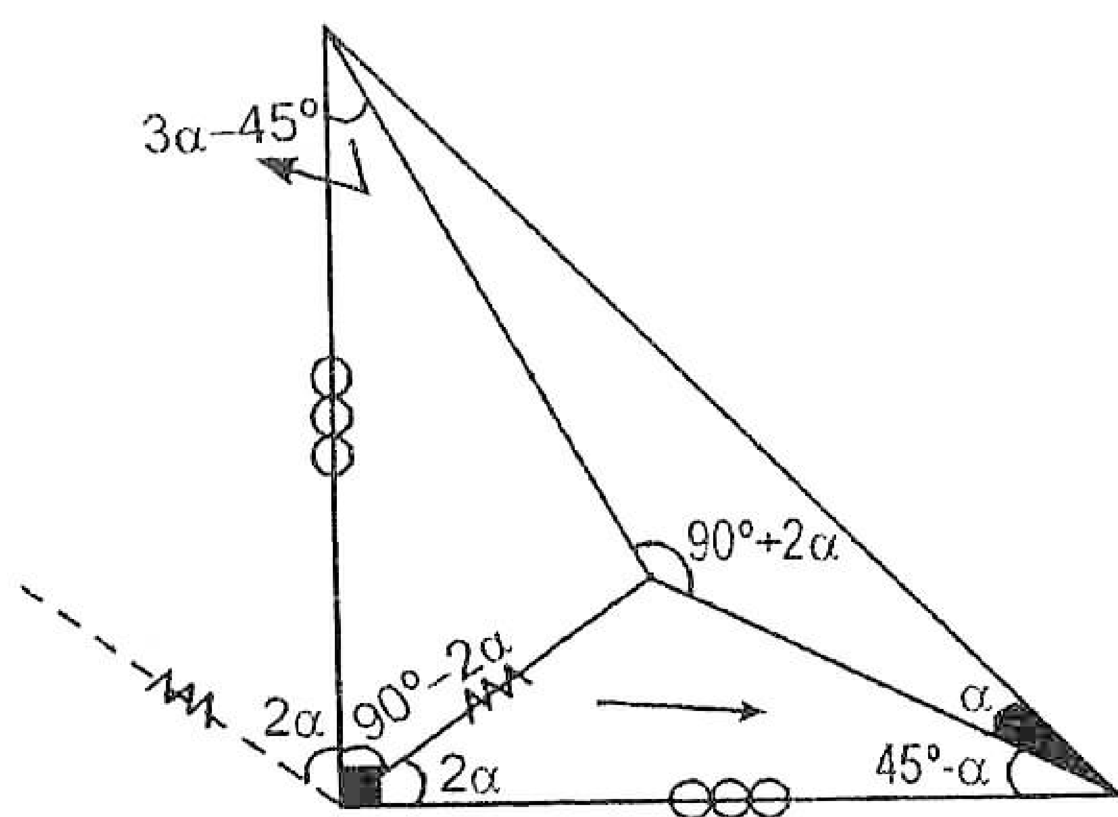
$$30° + x + 3x = 90°$$
$$4x = 60°$$
$$x = 15°$$

Solución Nº 41

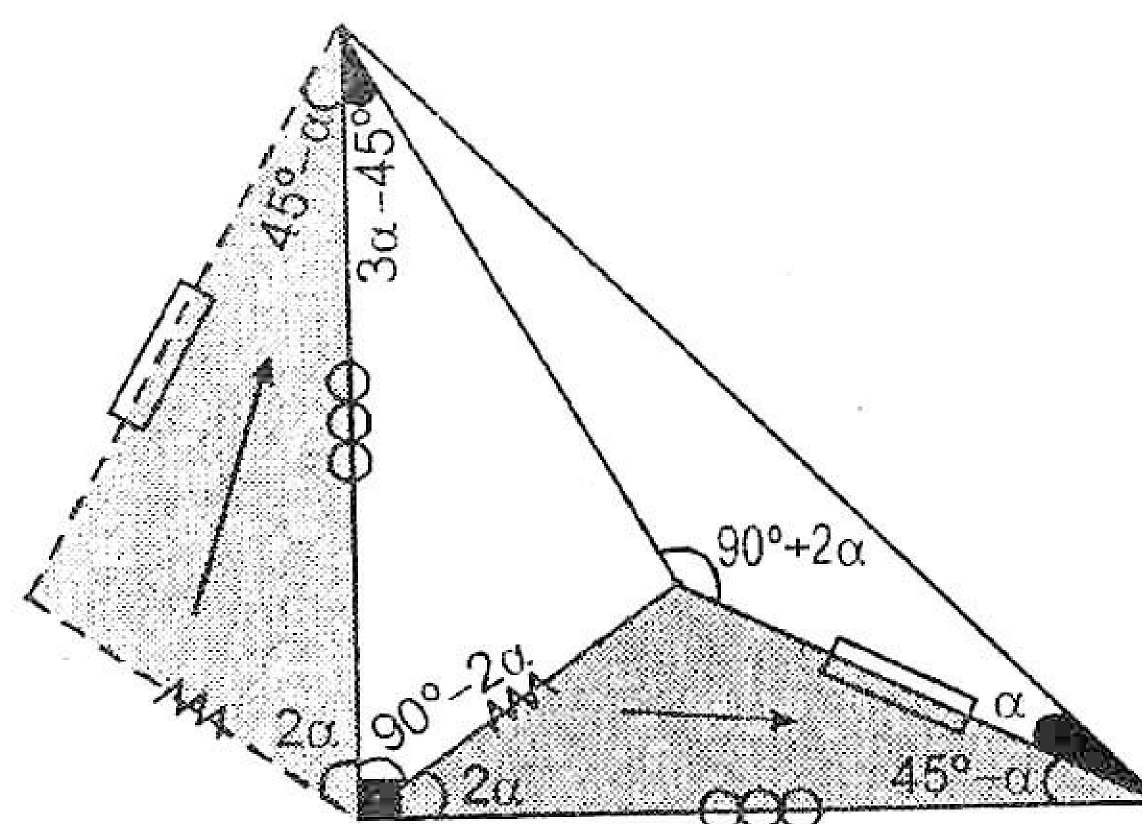
En la figura completamos los ángulos internos.



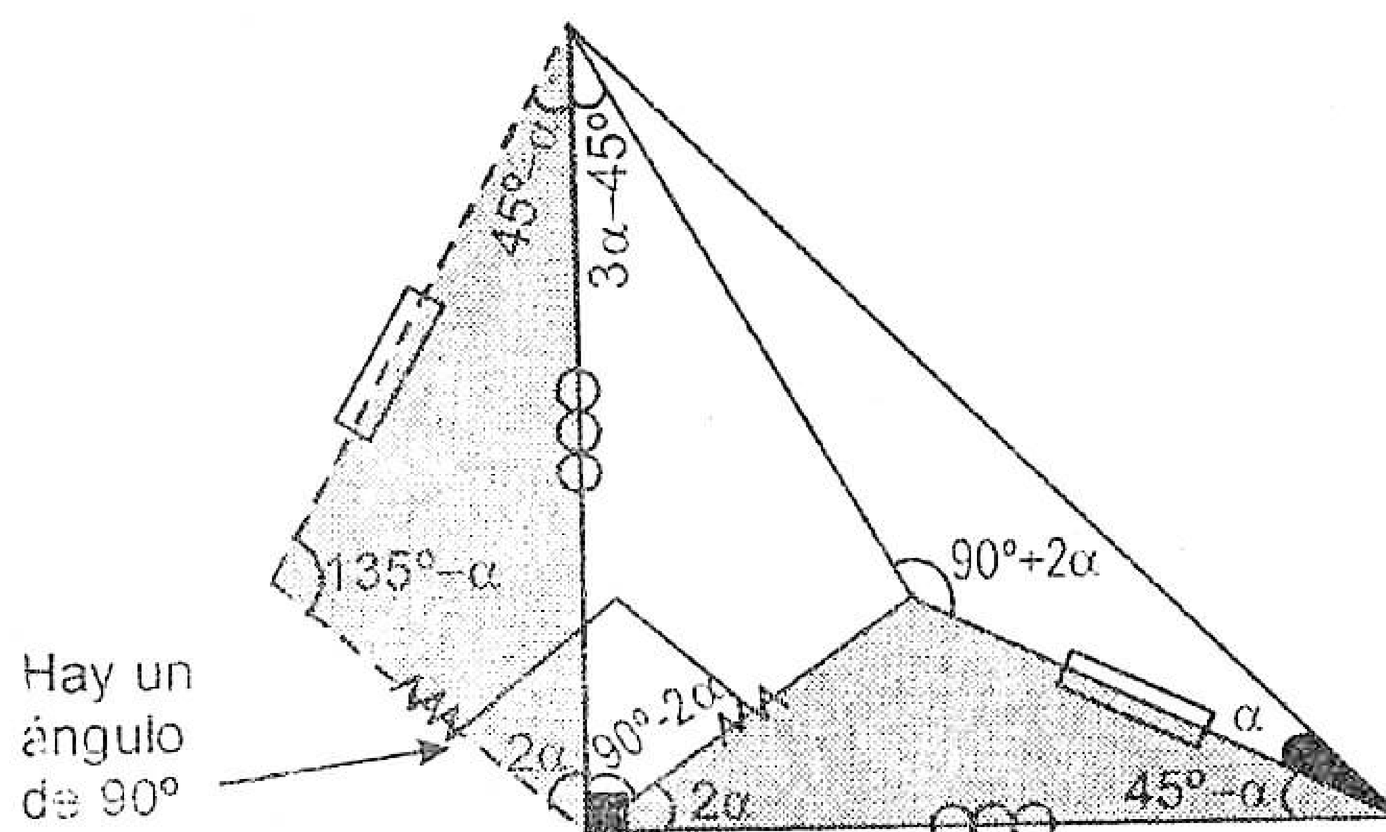
Paso Nº 1: Observamos que tenemos dos lados iguales, entonces tratemos de buscar triángulos congruentes, aplicando el quinto criterio de construcción.



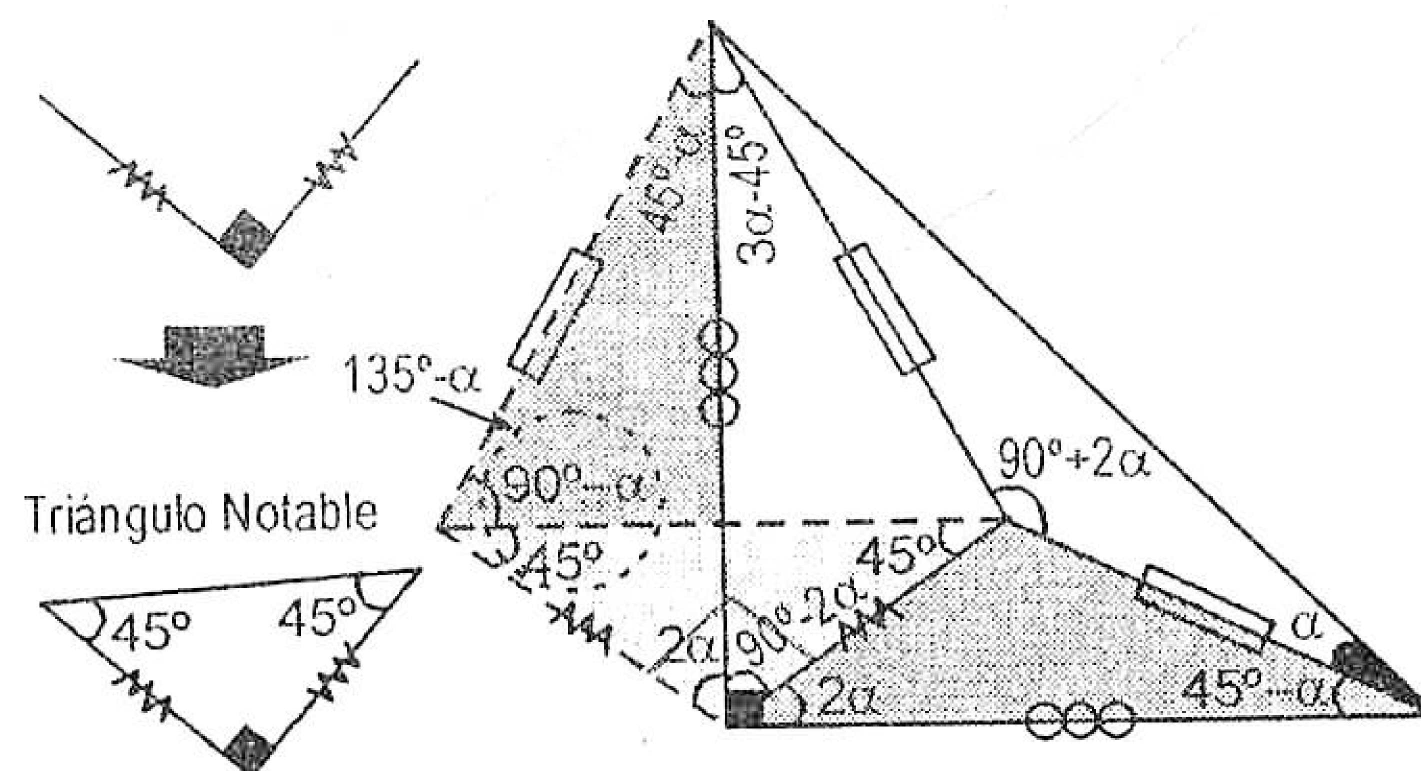
Paso Nº 2:
Con el trazo anterior se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



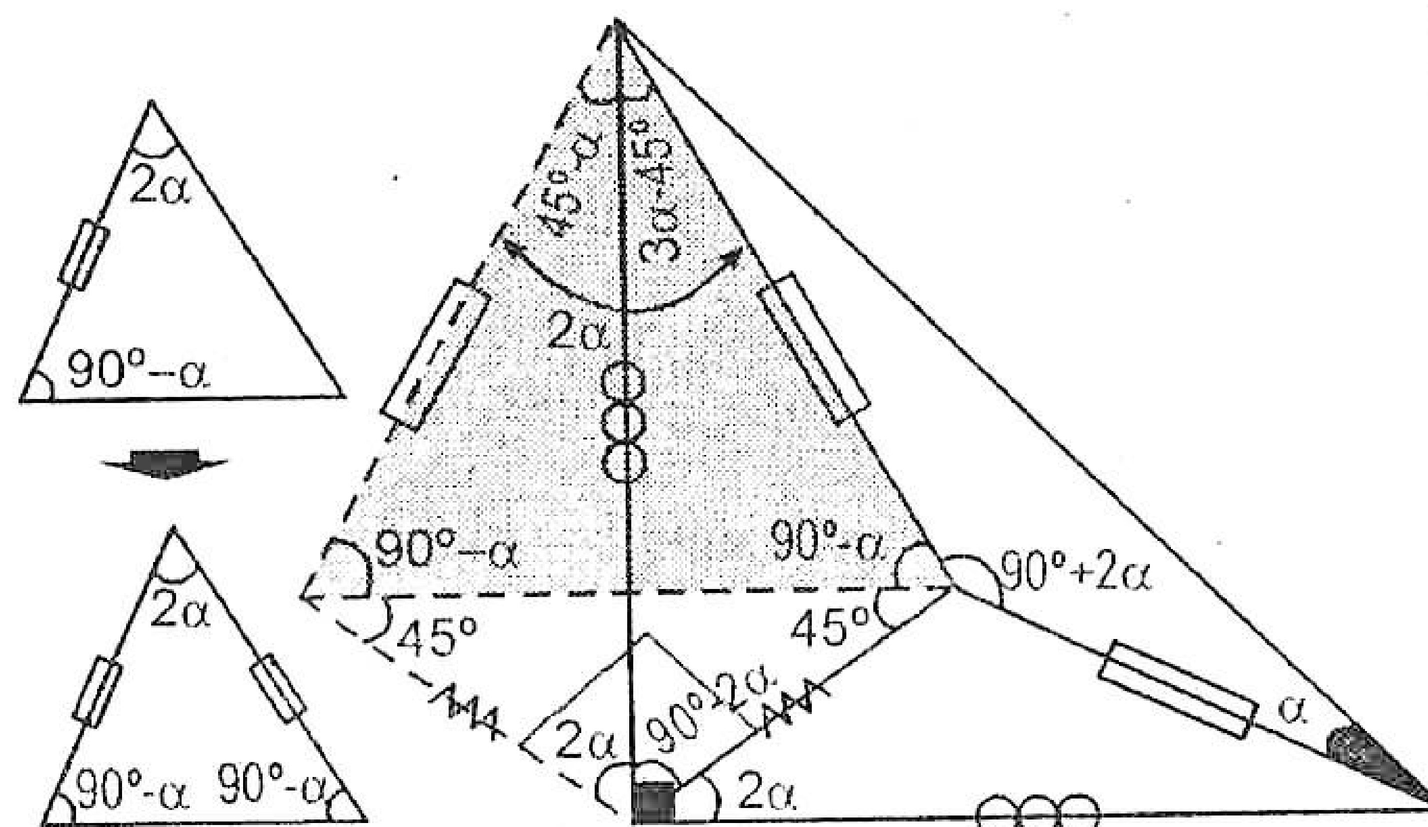
Paso Nº 3:
Ahora observamos en la figura que se cumple:



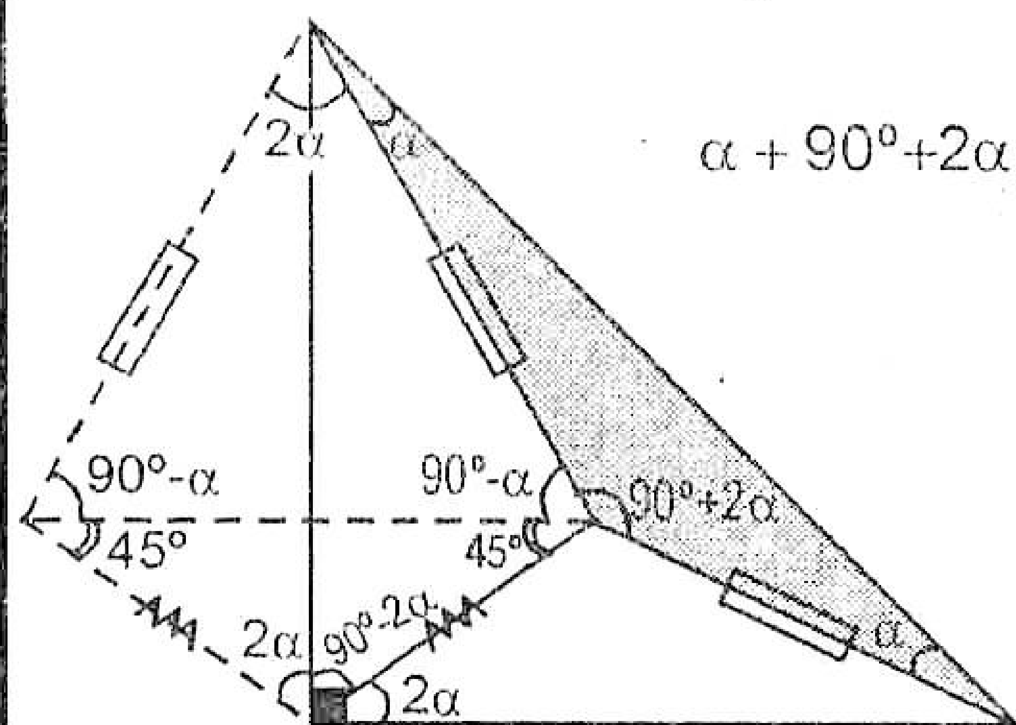
Paso Nº 4: También se observa que se obtiene:



Paso Nº 5: Realizado el paso anterior obtiene un triángulo isósceles con la siguiente característica.



Paso N° 6: Finalmente un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



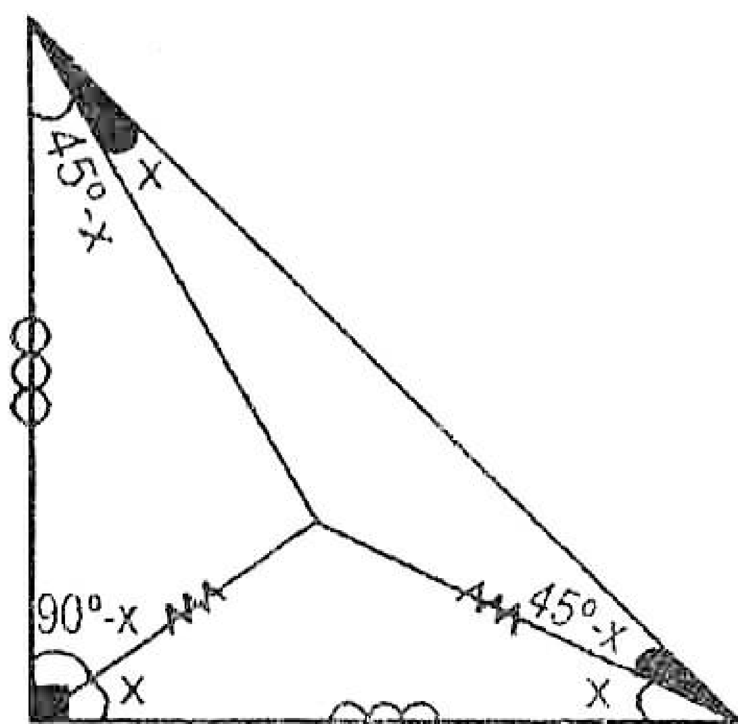
$$\alpha + 90° + 2\alpha + \alpha = 180°$$

$$4\alpha = 90°$$

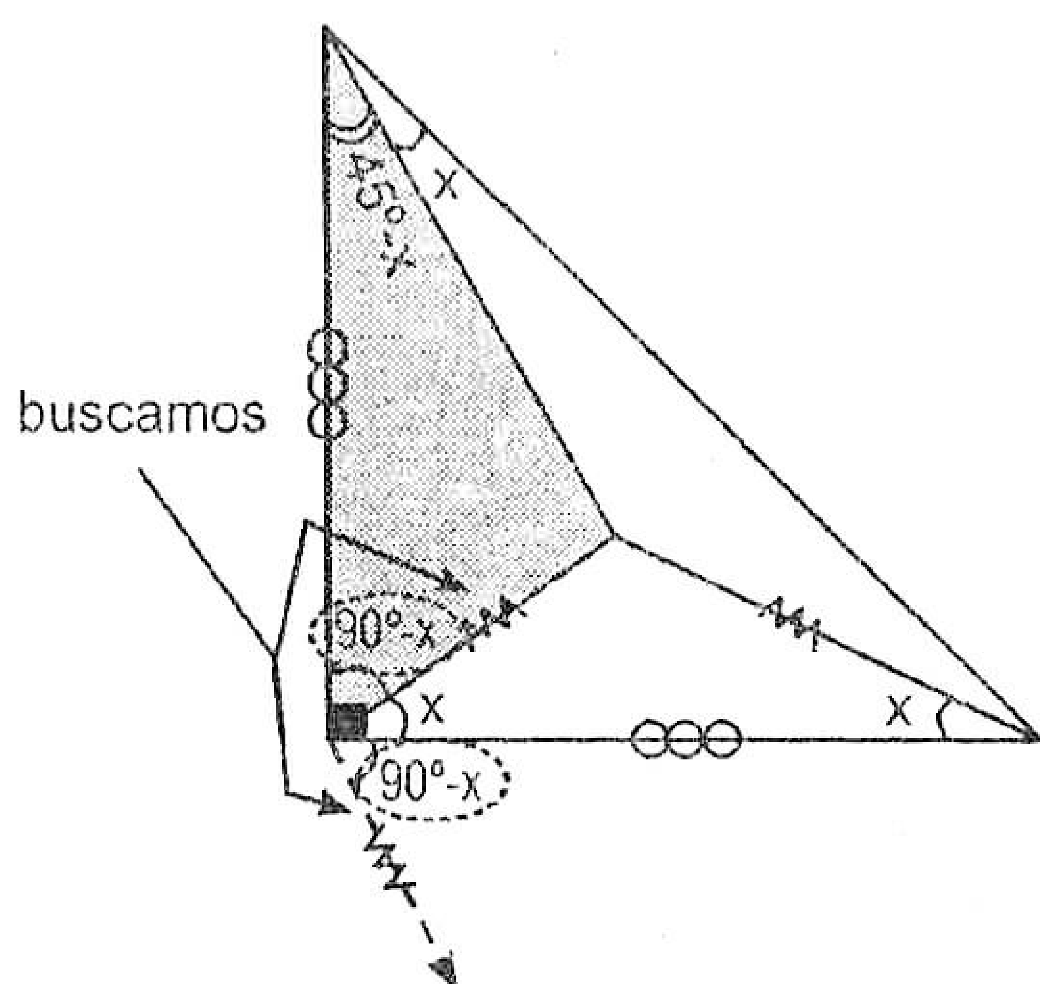
$$\alpha = 22°30'$$

Solución Nº 42

En la figura completamos los ángulos internos

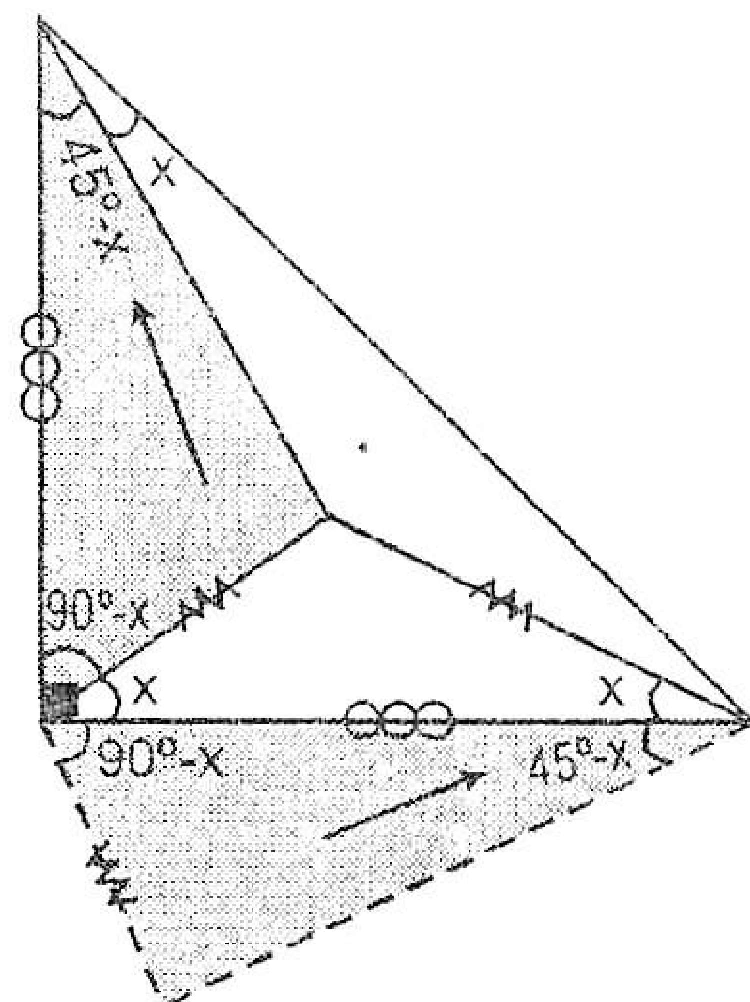


Paso N° 1:
Se observa que se tiene dos lados iguales, entonces buscaremos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo aplicando el quinto criterio de construcción.

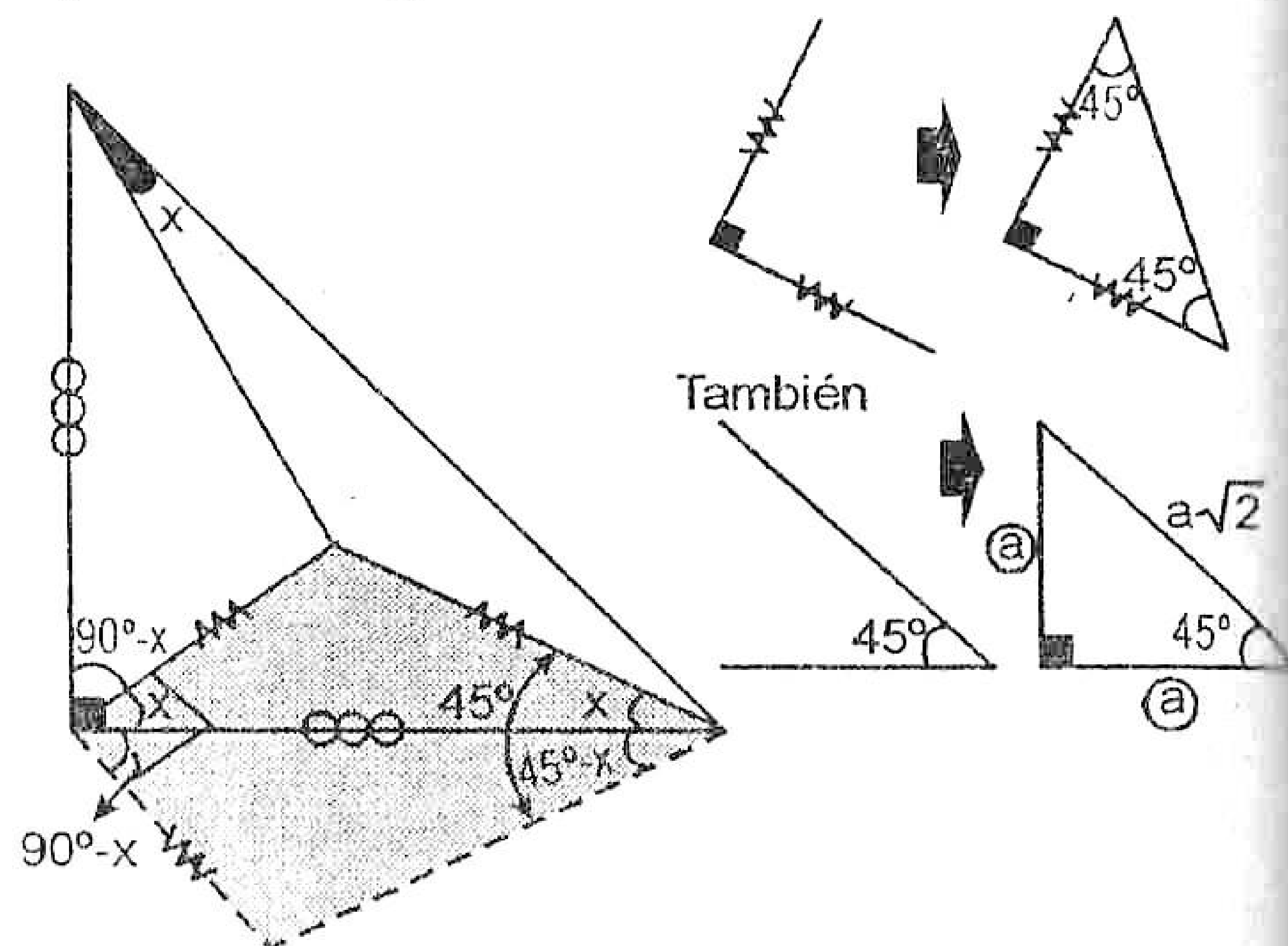


Paso N° 2: Con el trazo anterior se observa que se ha obtenido dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)

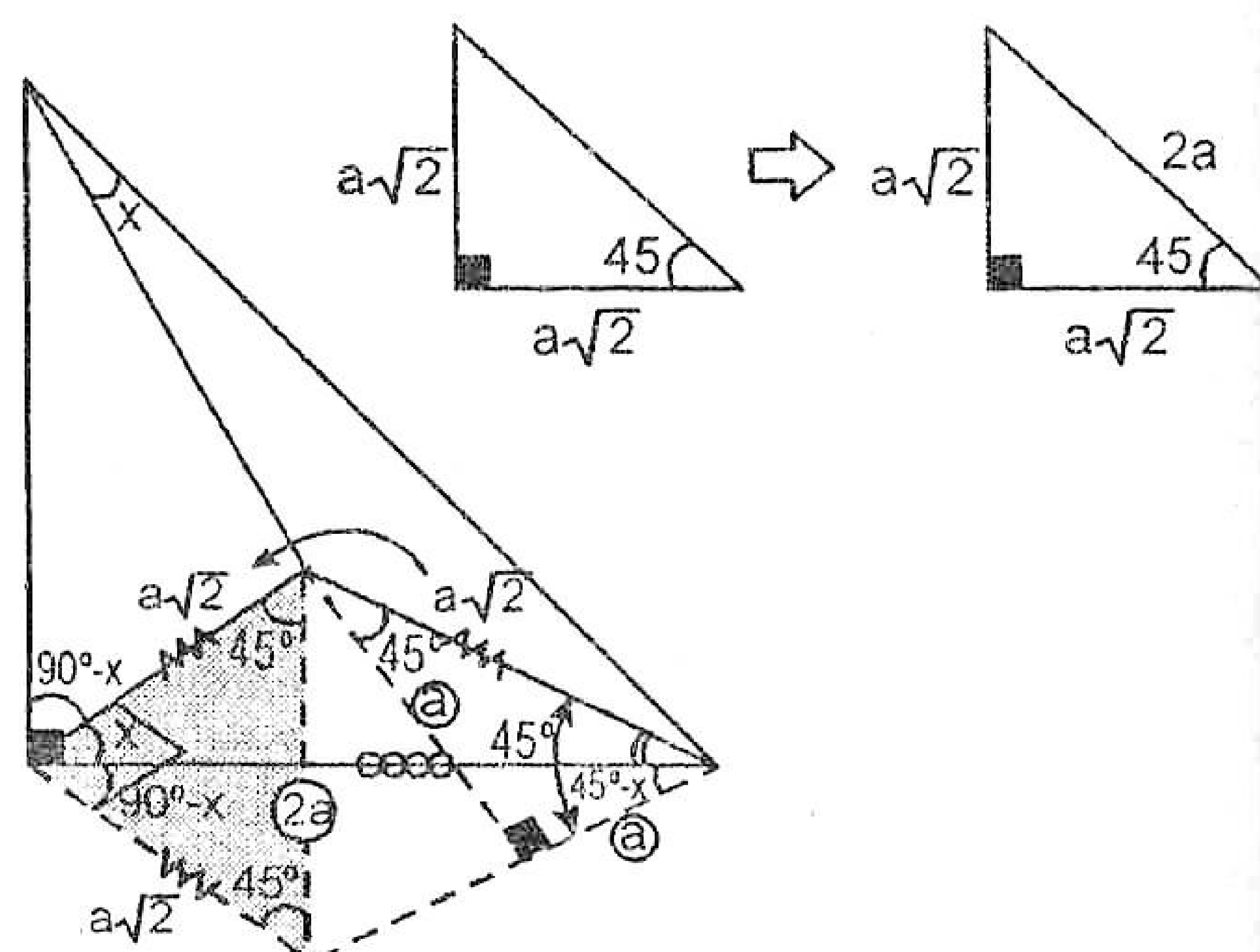
* Realizado el paso anterior, en la figura se obtiene:



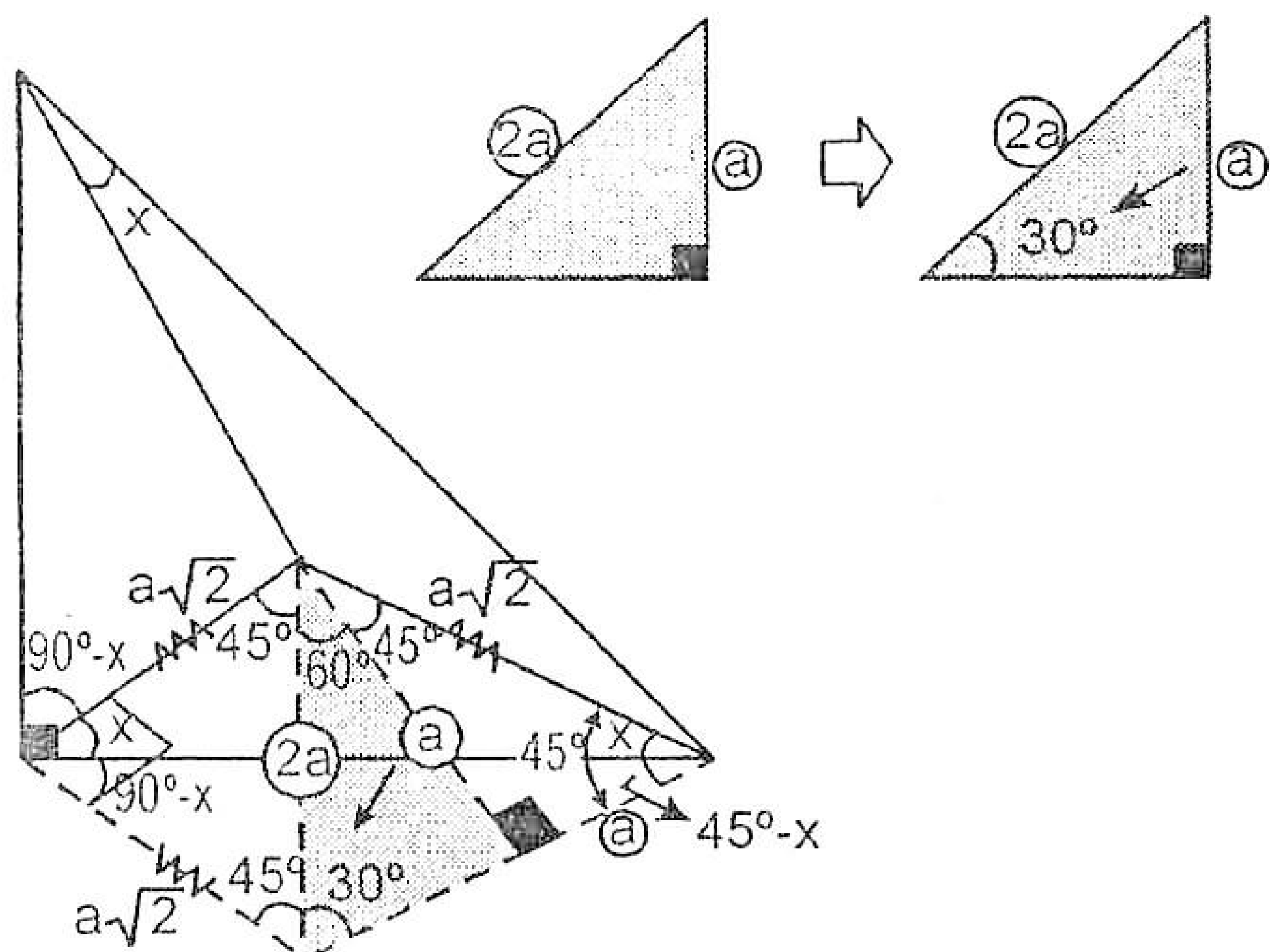
Paso N° 3:
Ahora se observa en la figura que tenemos los siguientes ángulos:



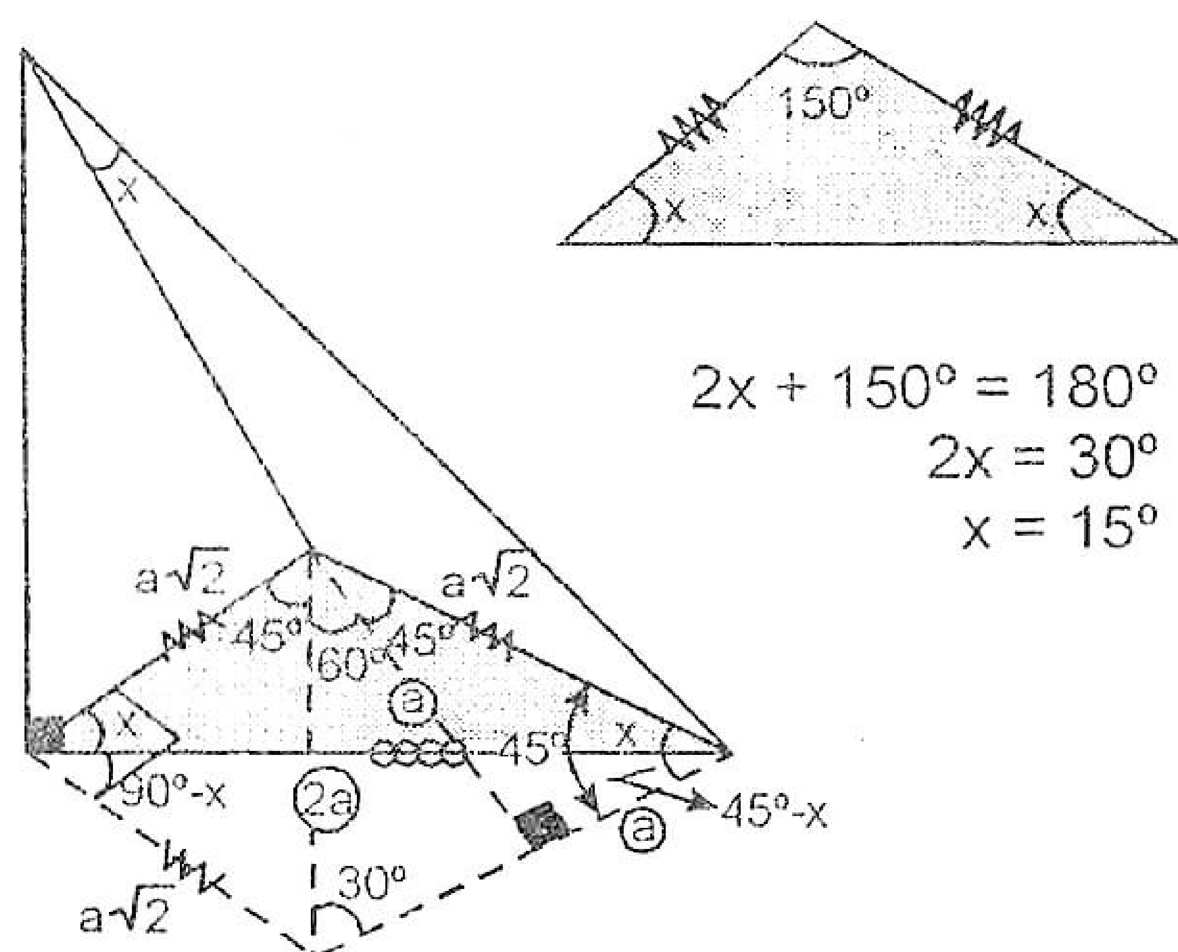
Paso N° 4:
Con dichos ángulos encontrados formamos triángulos rectángulos notables de 45° de la siguiente manera:



Paso Nº 5:
Ahora en la figura se observa que se obtiene otro triángulo notable de (30° y 60°)

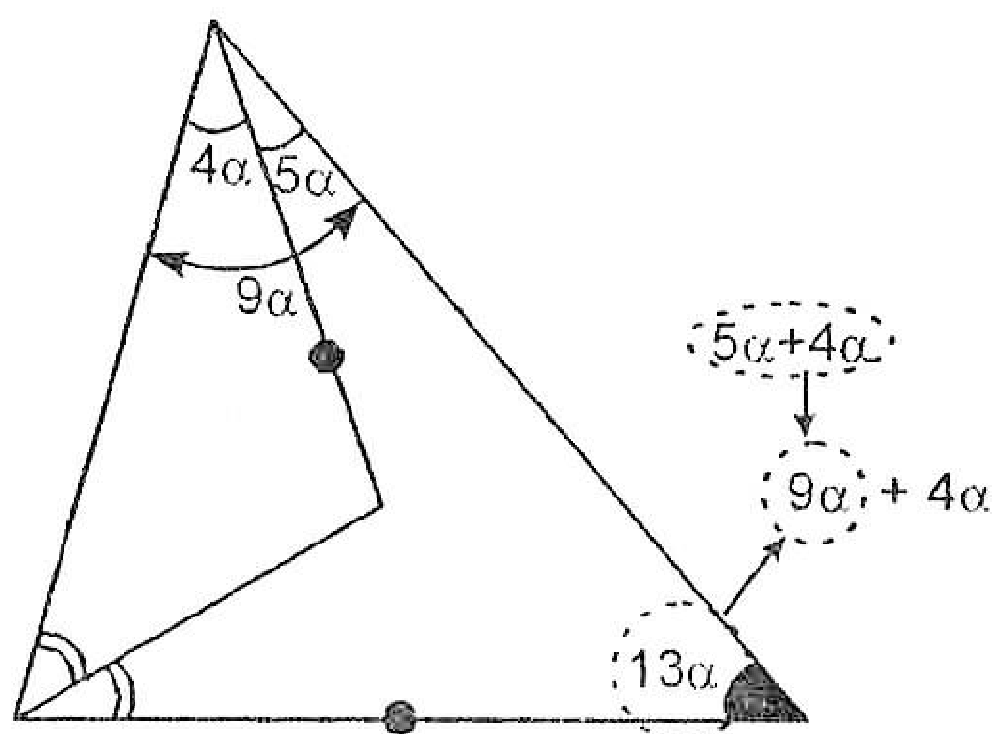


Paso Nº 6:
Finalmente se obtiene el siguiente triángulo isósceles.

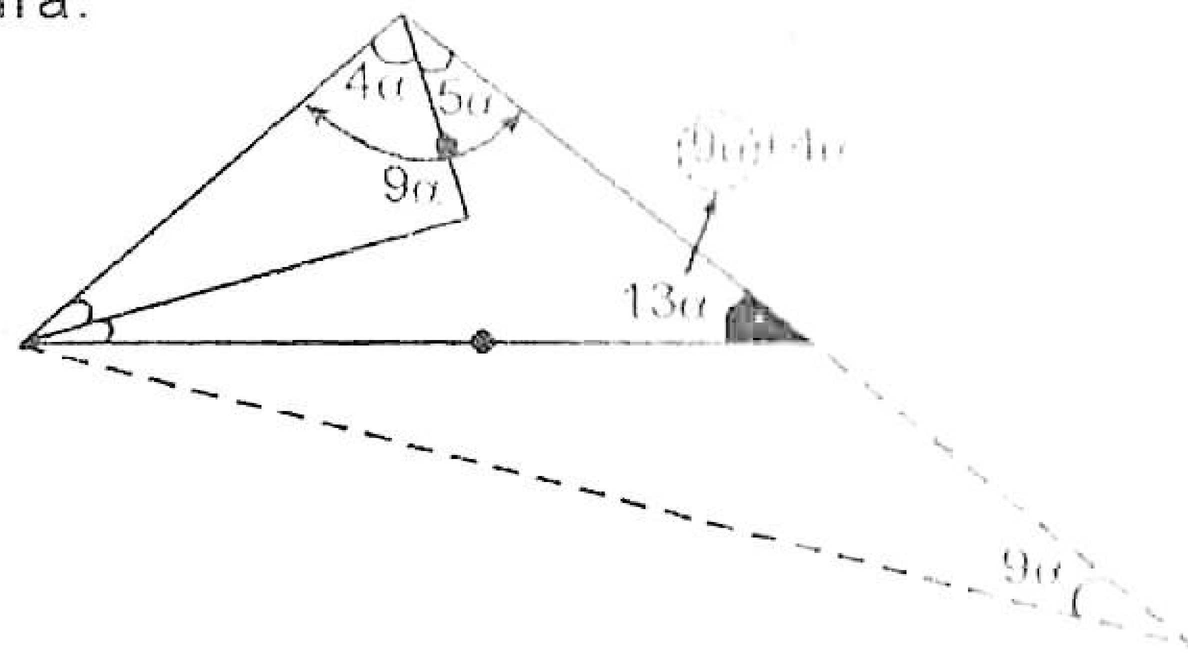


Solución Nº 43

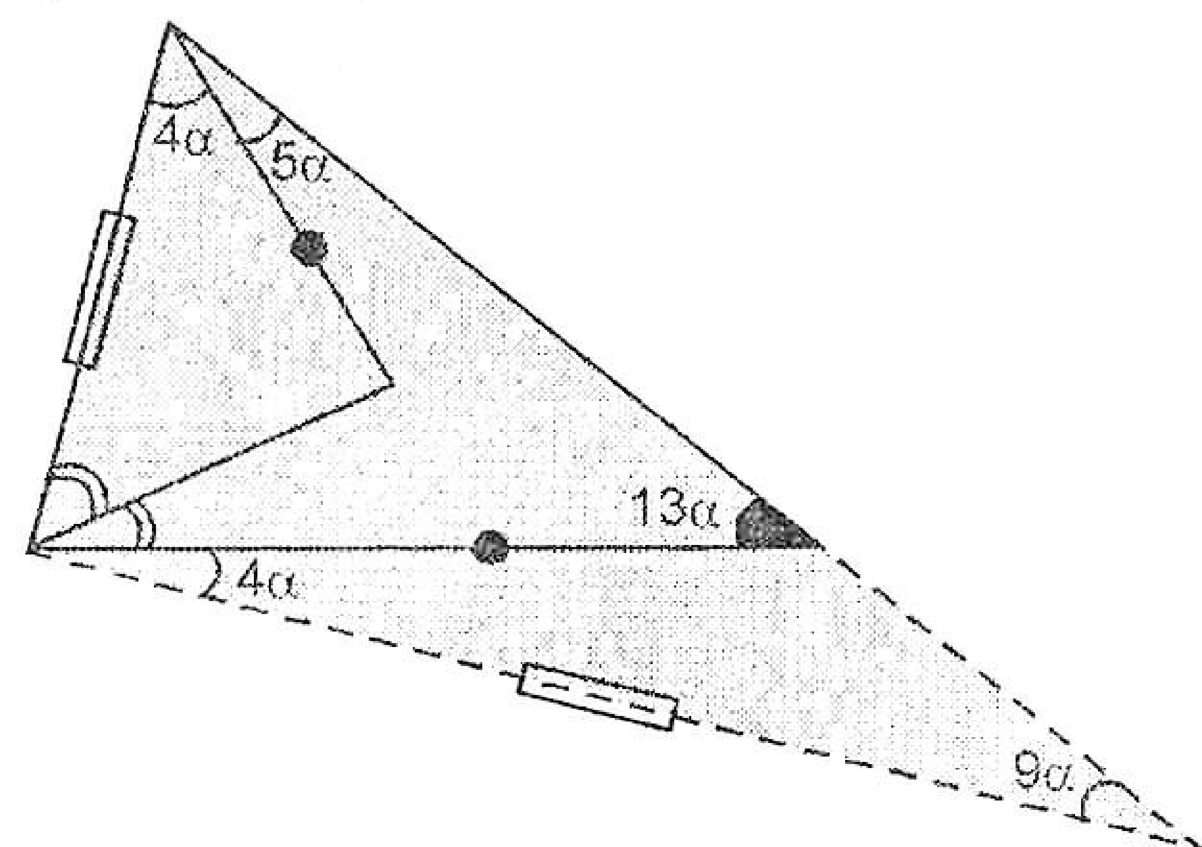
En la figura se observa:



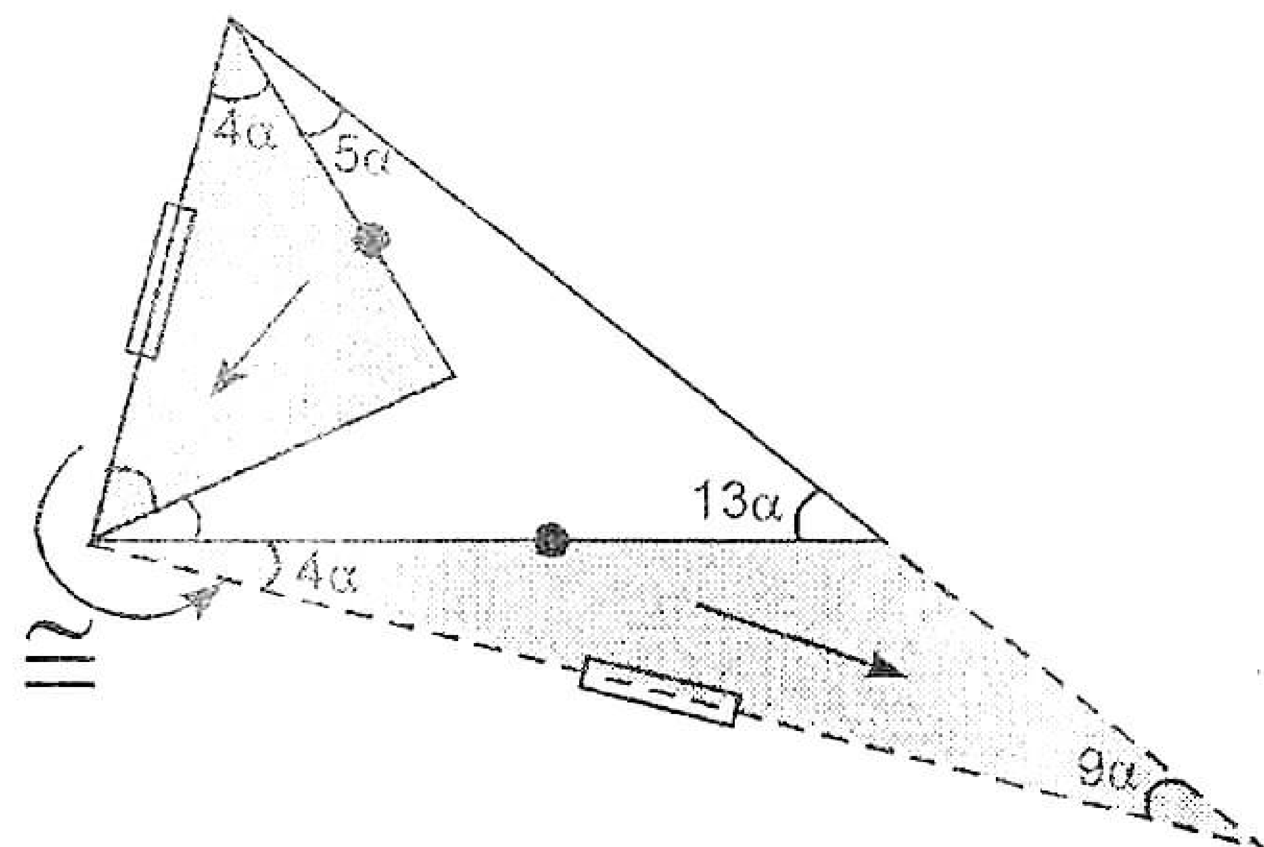
Paso Nº 1: Observamos que se tiene dos lados iguales, entonces trataremos de buscar triángulos congruentes realizando un trazo exterior a la figura.



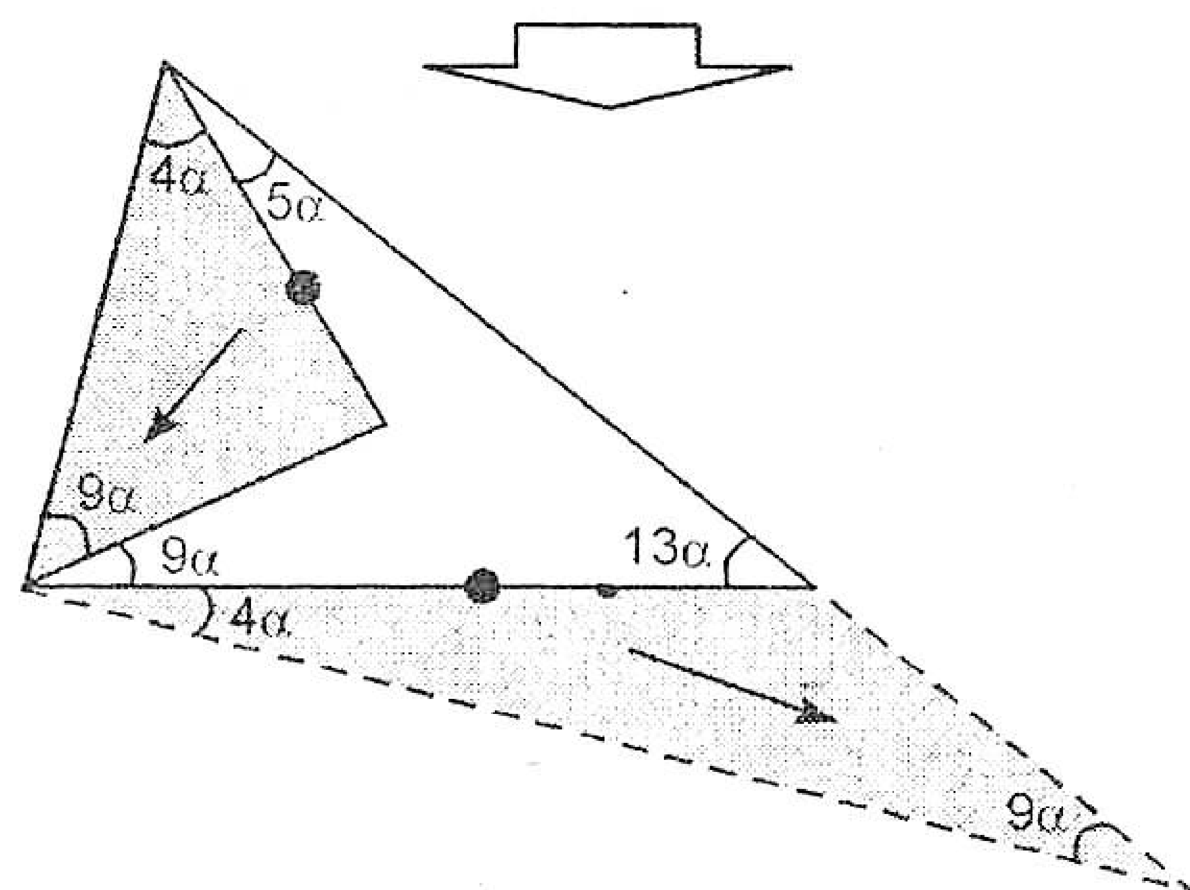
Buscando un triangulo isósceles para encontrar triángulos congruentes.



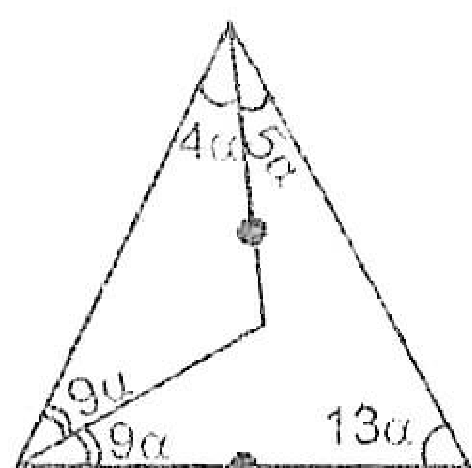
Paso Nº 2: Se obtienen dos triángulos congruentes, caso: (L.A.L.)



Aqui se cumple: "A lados iguales se opone angulos iguales"



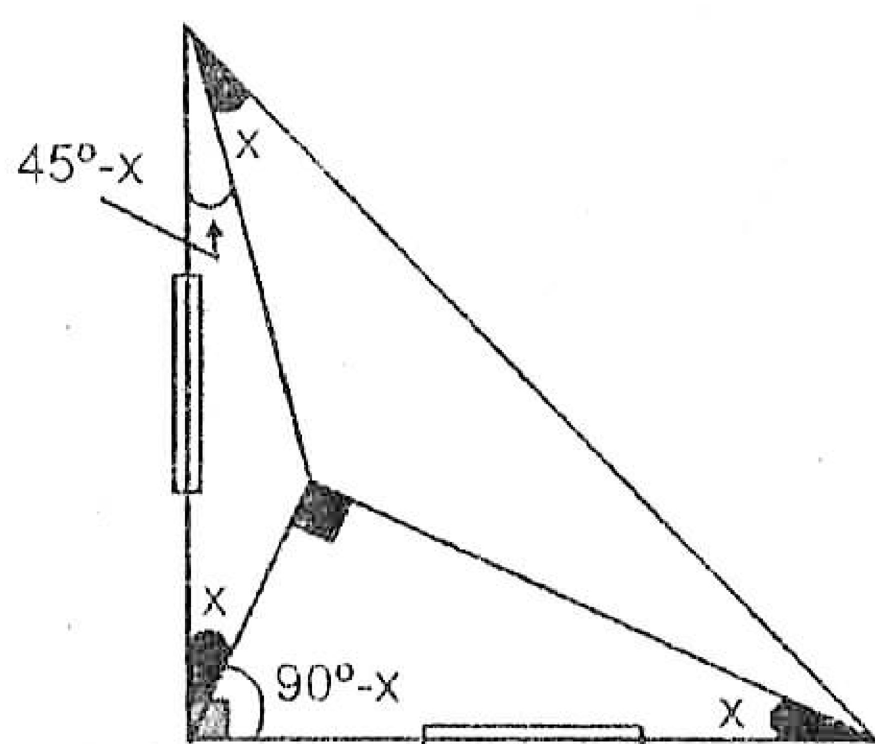
Paso N° 3:
Luego en el triángulo inicial, tenemos:



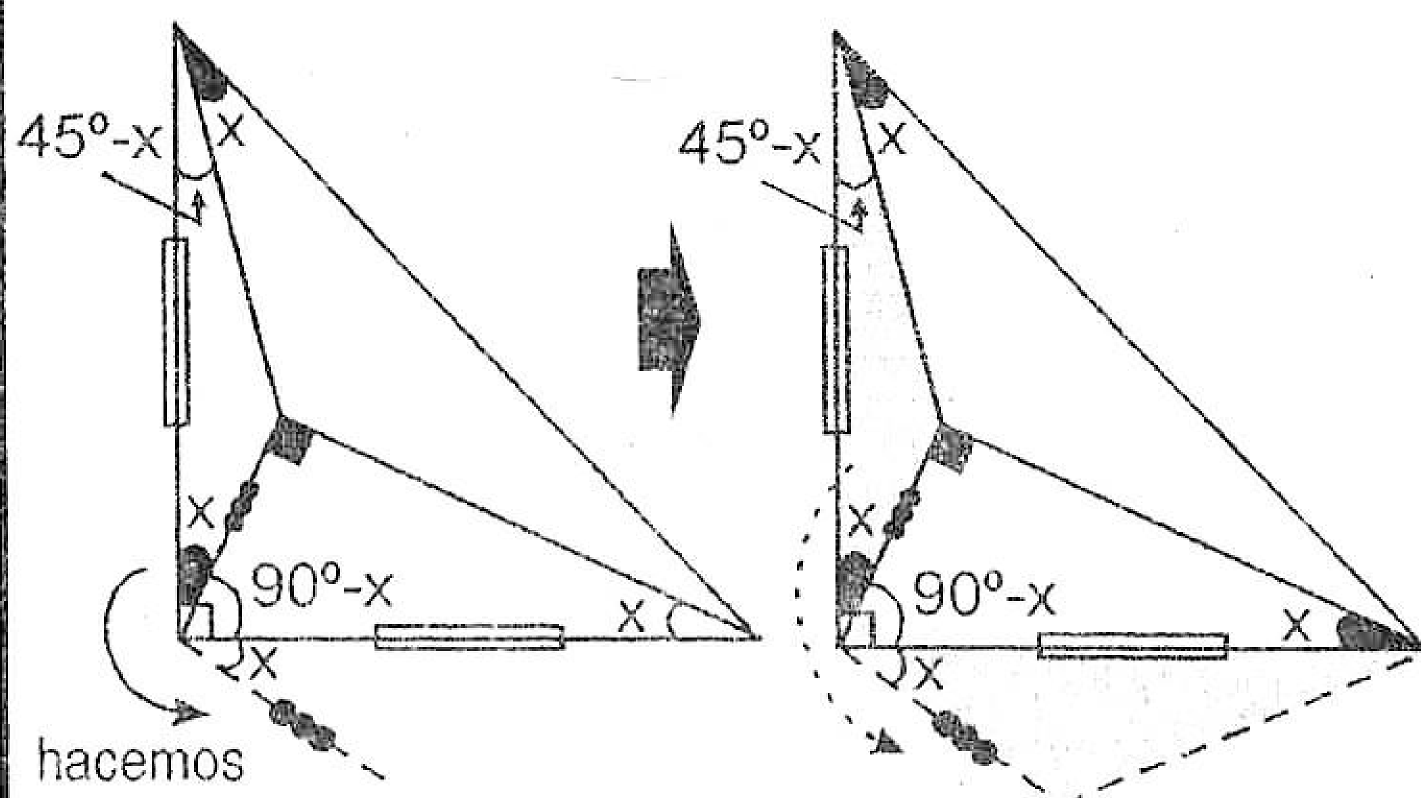
$$18\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 13\alpha = 180^\circ$$
$$40\alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = 4^\circ\ 30'$$

Solución N° 44

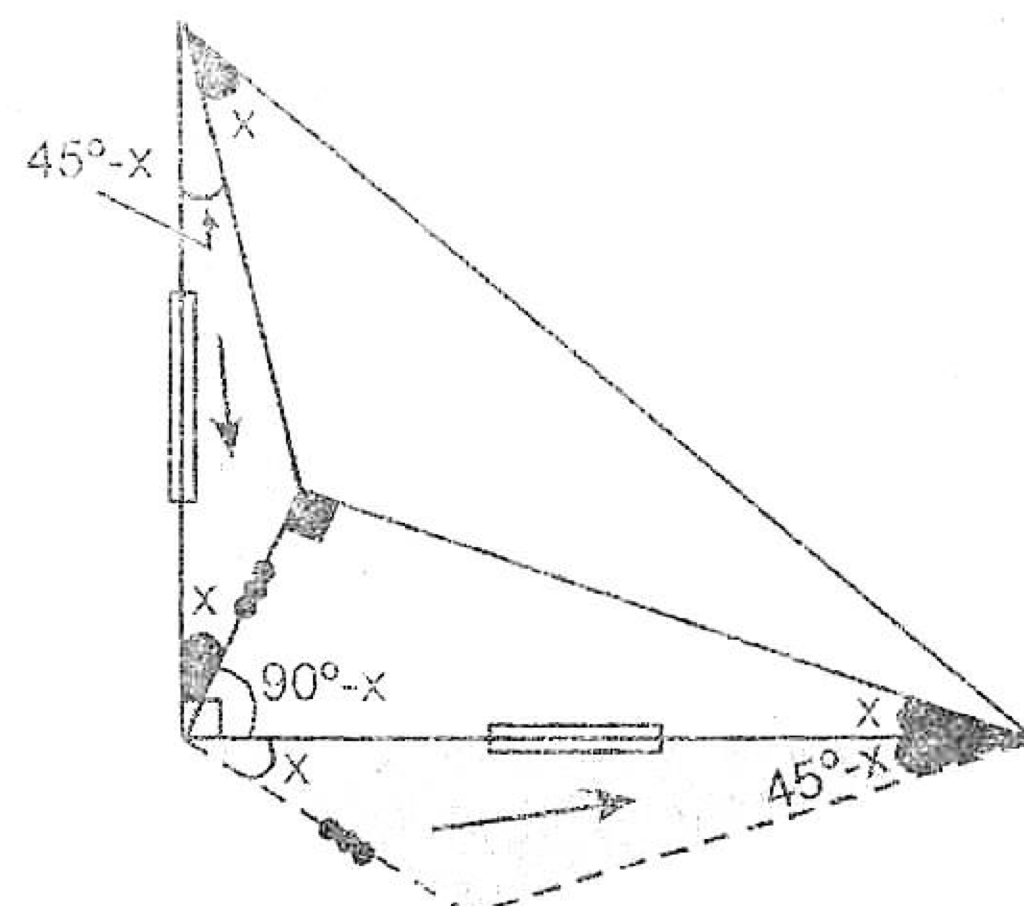
En la figura se observa



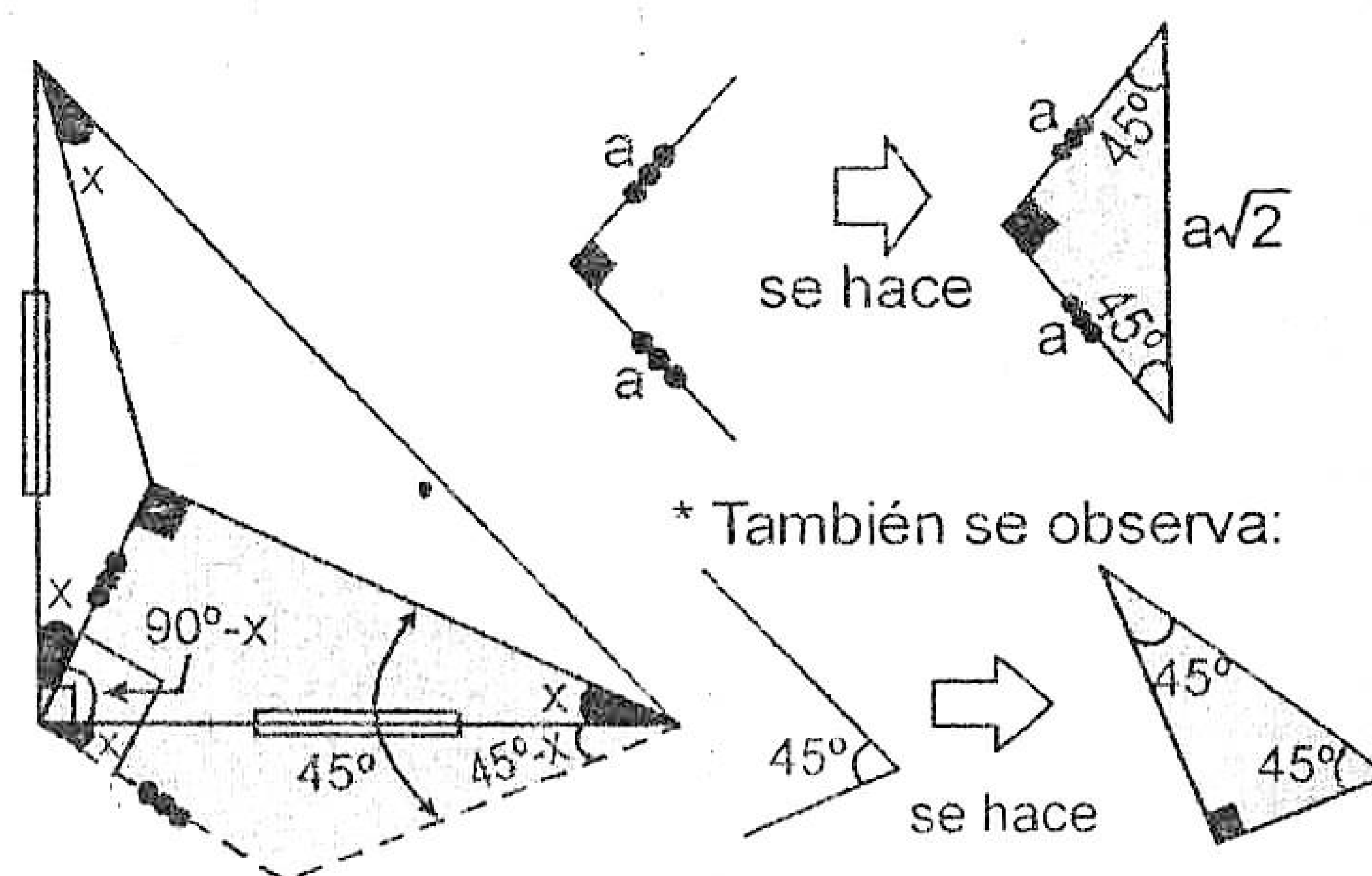
Paso N° 1:
Observamos que tenemos dos lados iguales entonces buscaremos triángulos congruentes aplicando el quinto criterio de construcción, de la siguiente manera:



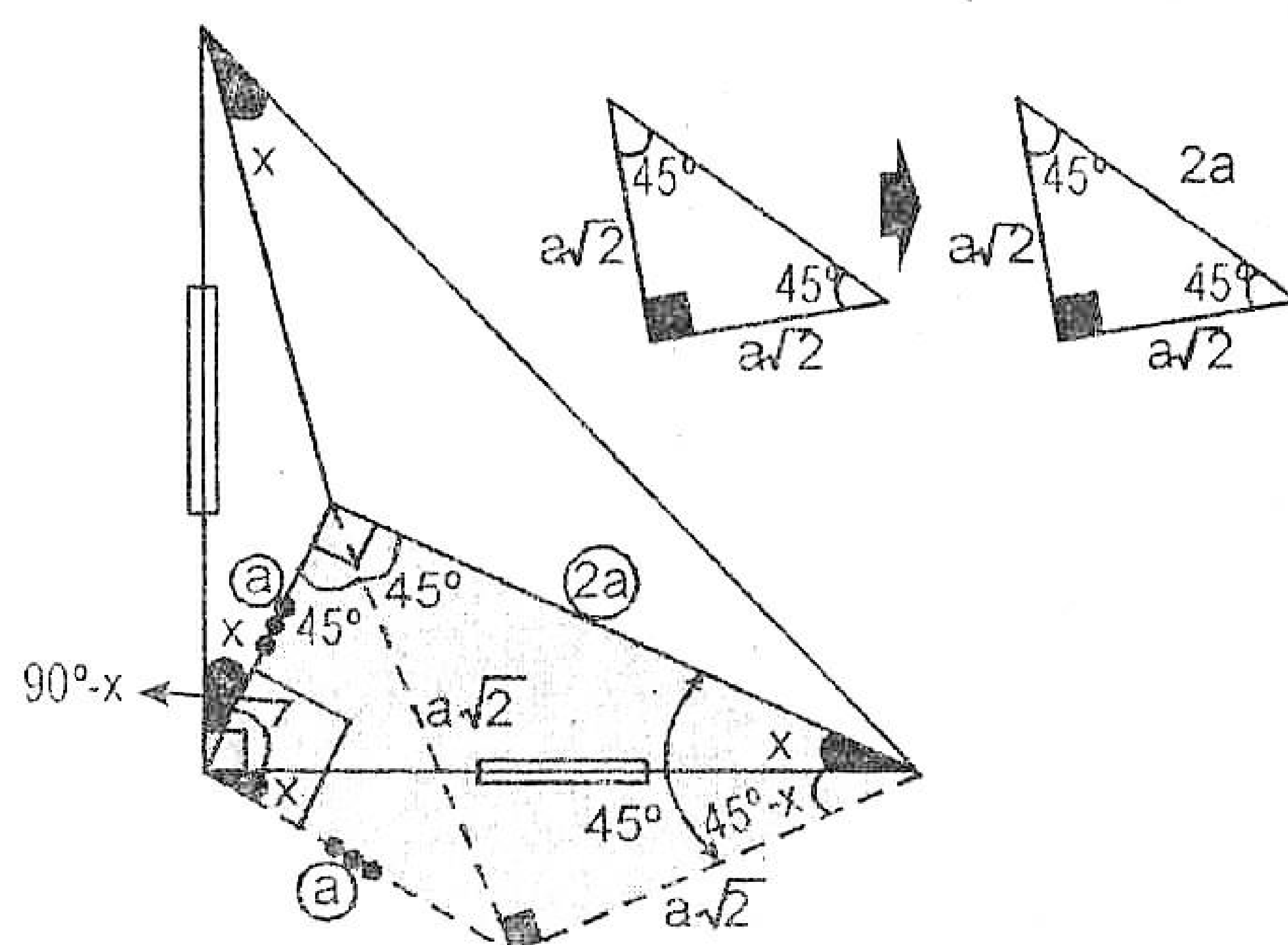
Paso N° 2: Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.), donde se cumple:



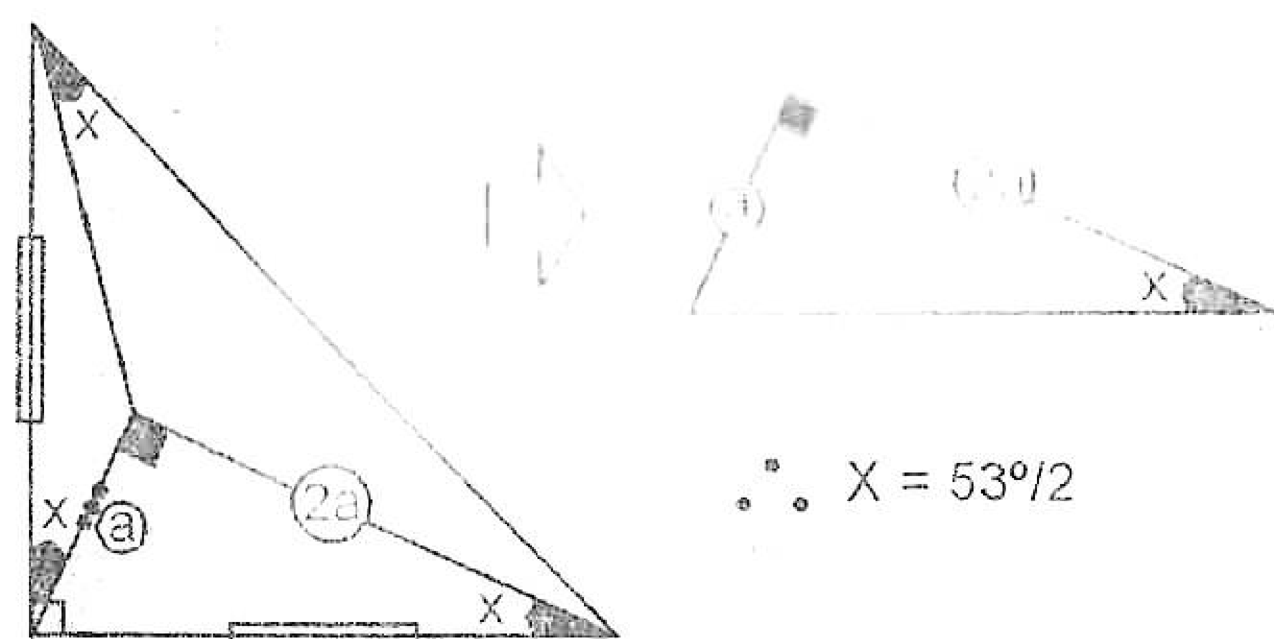
Paso N° 3:
Observamos que en la figura se tiene los siguientes ángulos:



Paso N° 4:
Con dichos ángulos encontrados formamos triángulos rectángulos notables (ver figura):

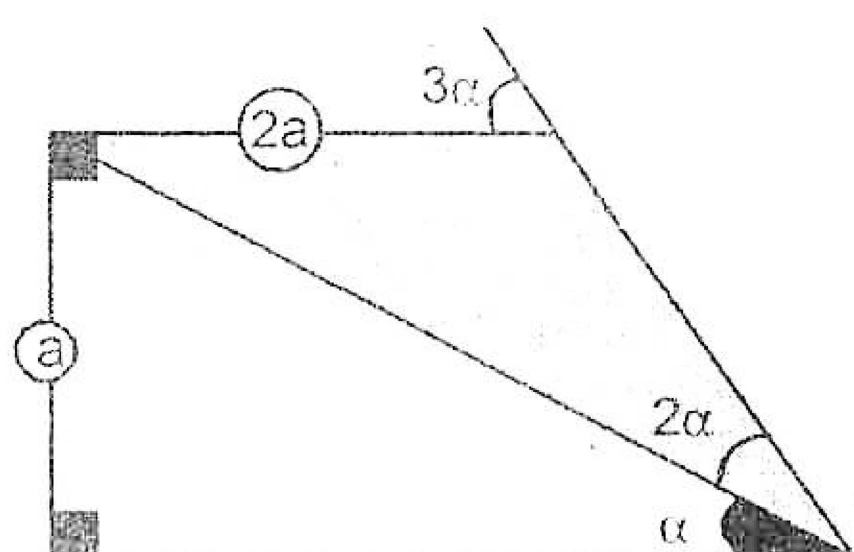


Paso N° 5:
En la figura se observa que se obtiene un nuevo triángulo rectángulo notable donde se cumple:

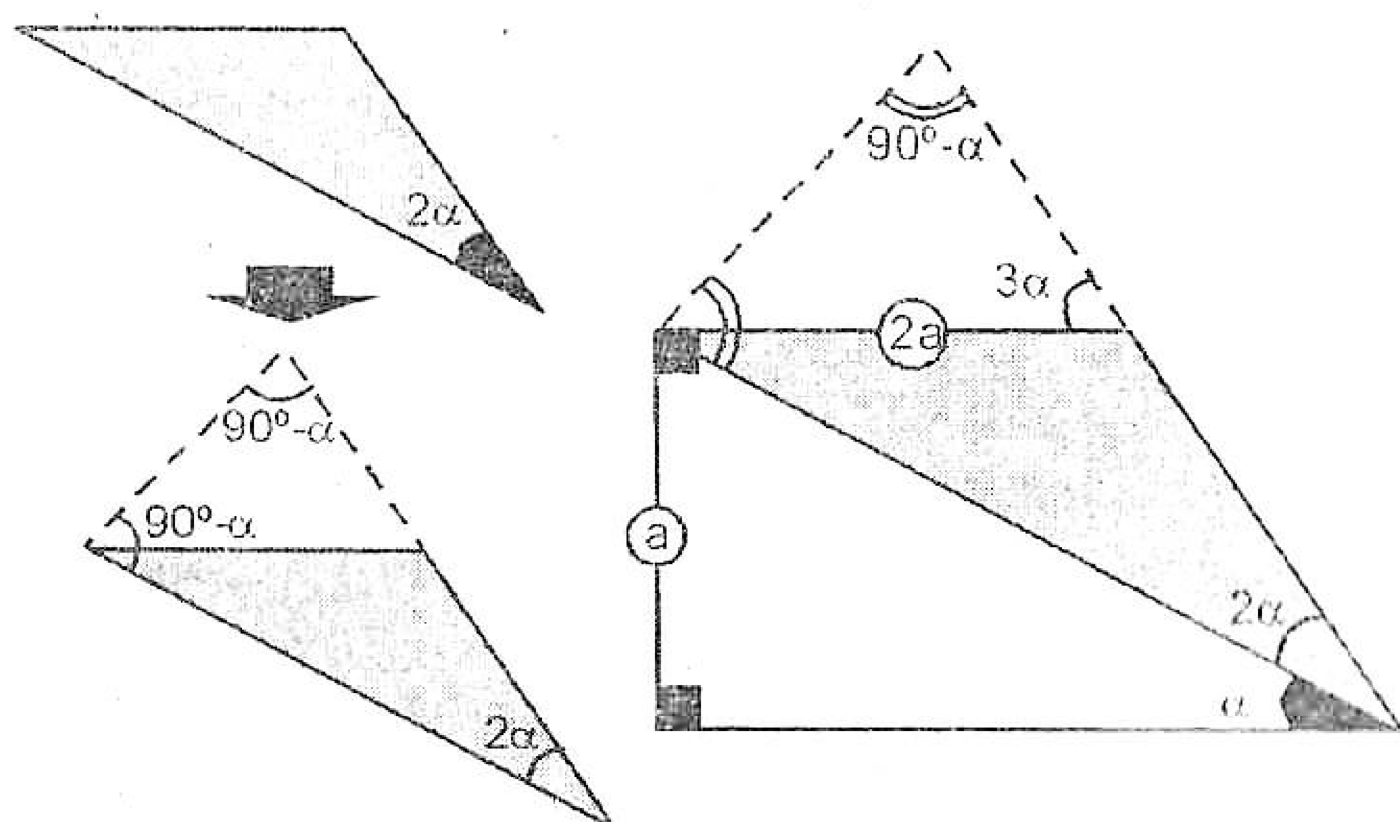


Solución Nº45

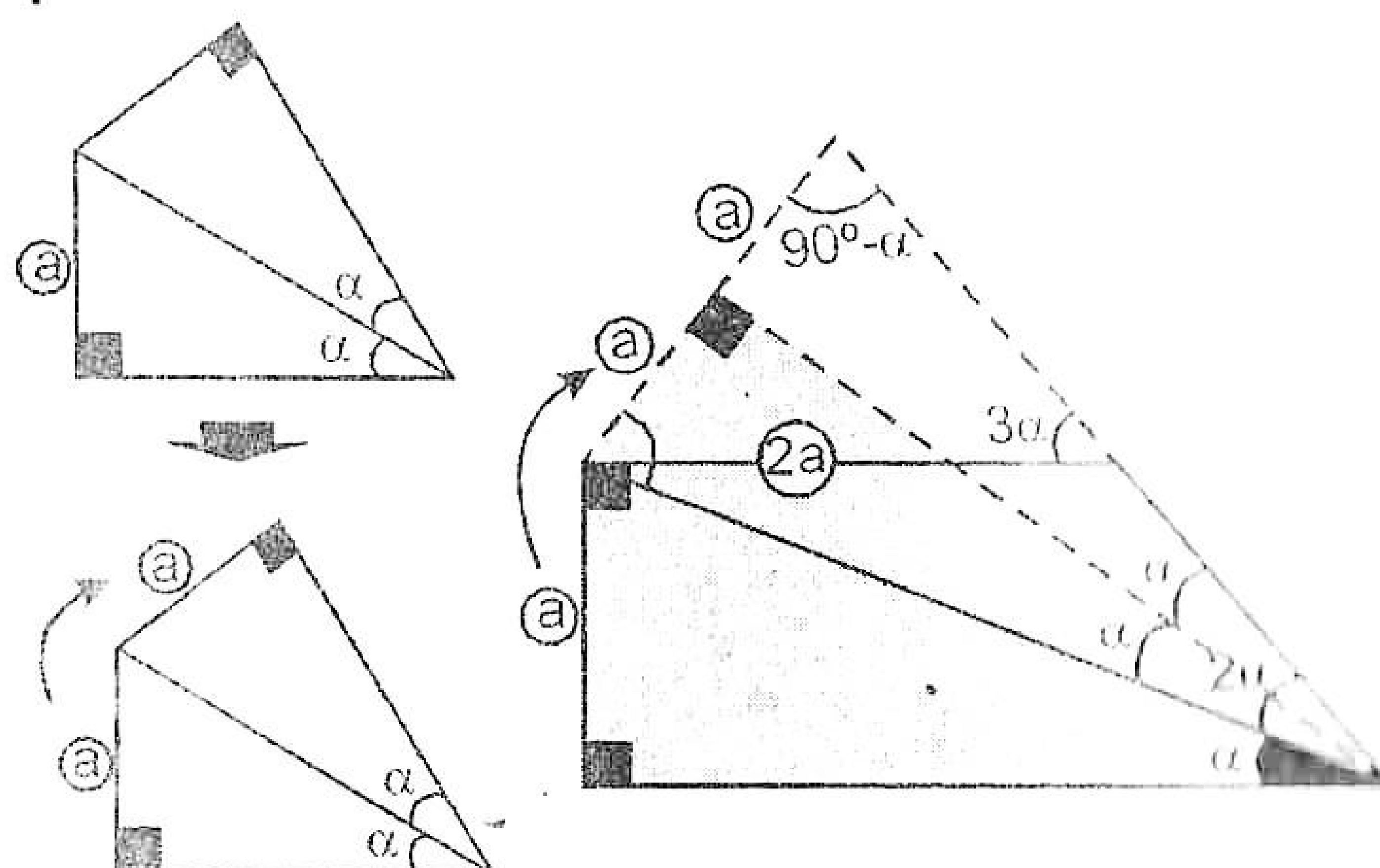
En la figura se observa que podemos aplicar el "Cuarto criterio de construcción" de la siguiente manera.



Paso N° 1:
Observamos el siguiente ángulo y realizamos el siguiente trazo: Formando un triángulo isósceles.

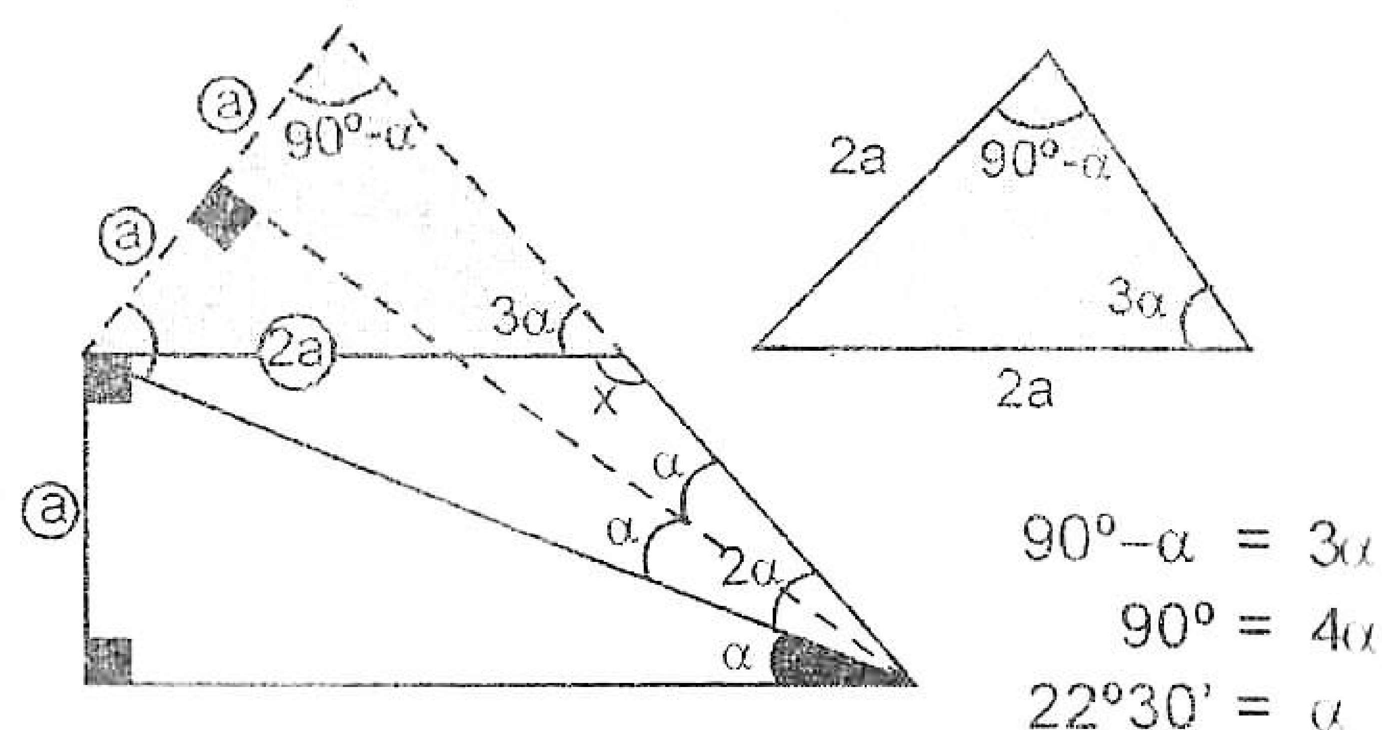


Paso N° 2:
En el triángulo isósceles formado, trazamos su altura y se obtiene:



Paso N° 3: En la figura se observa la propiedad de la bisectriz.

Paso N° 4: Observamos en la siguiente figura un nuevo triángulo isósceles (ver figura sombreada) donde se obtiene:

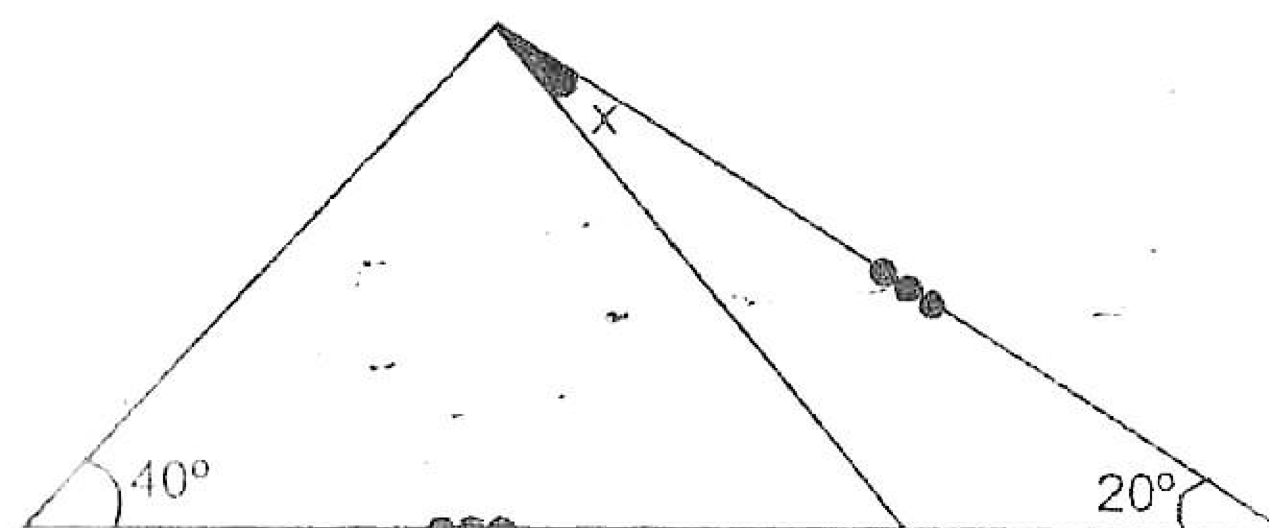


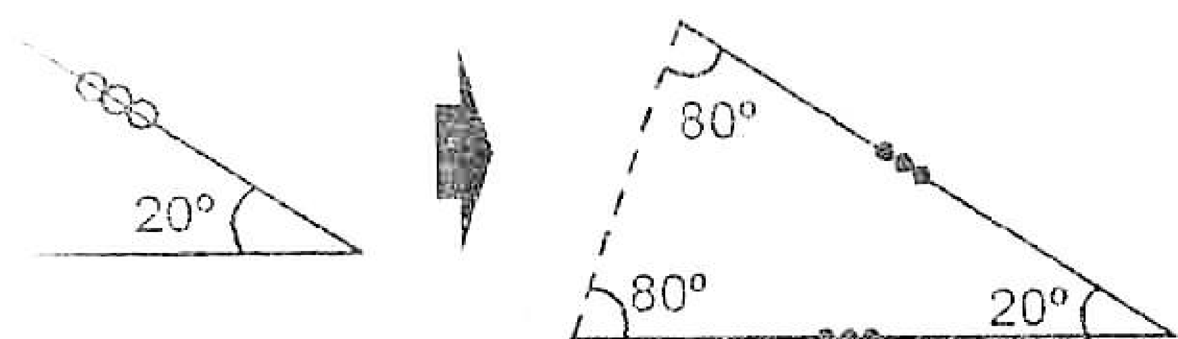
$$90° - \alpha = 3\alpha$$
$$90° = 4\alpha$$
$$22°30' = \alpha$$

Ahora: $x + 3\alpha = 180° \Rightarrow x = 112°\ 30'$

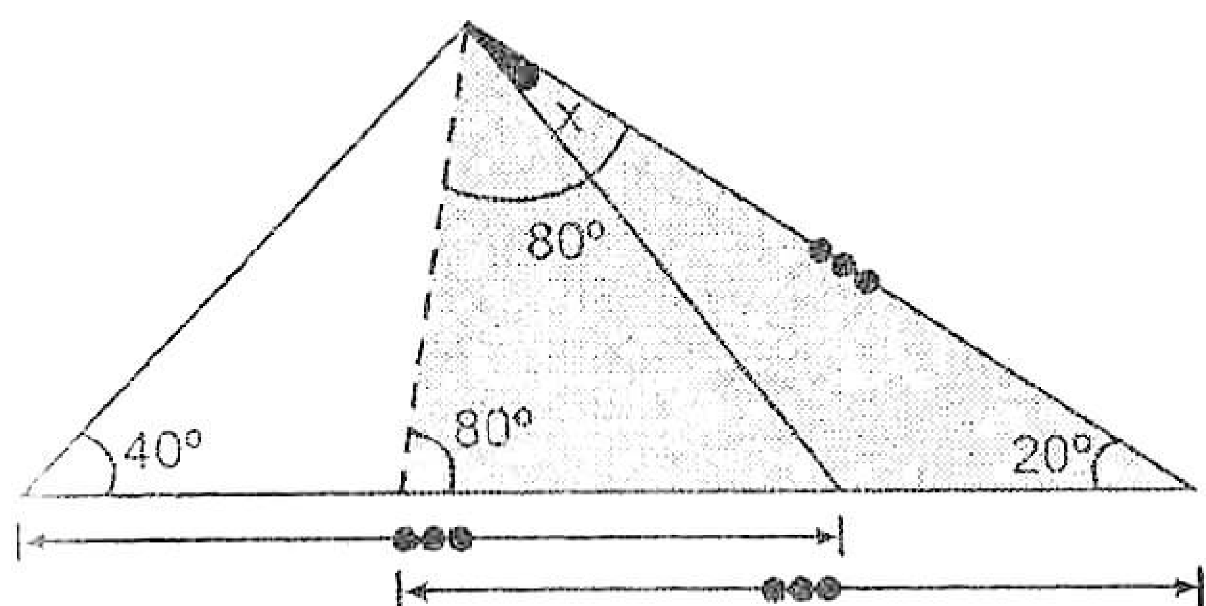
Solución Nº46

En la figura mostrada se observa que se puede obtener un triángulo isósceles realizando el siguiente trazo:

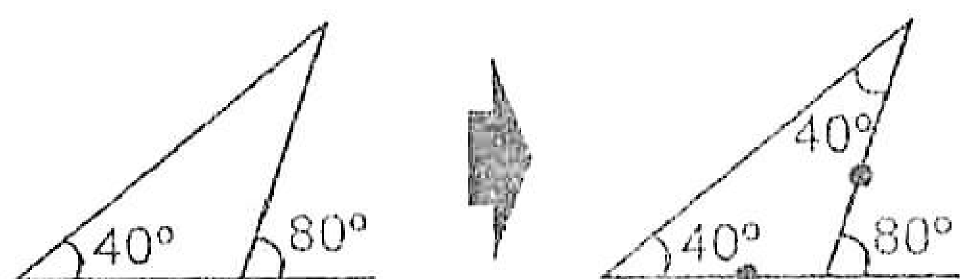




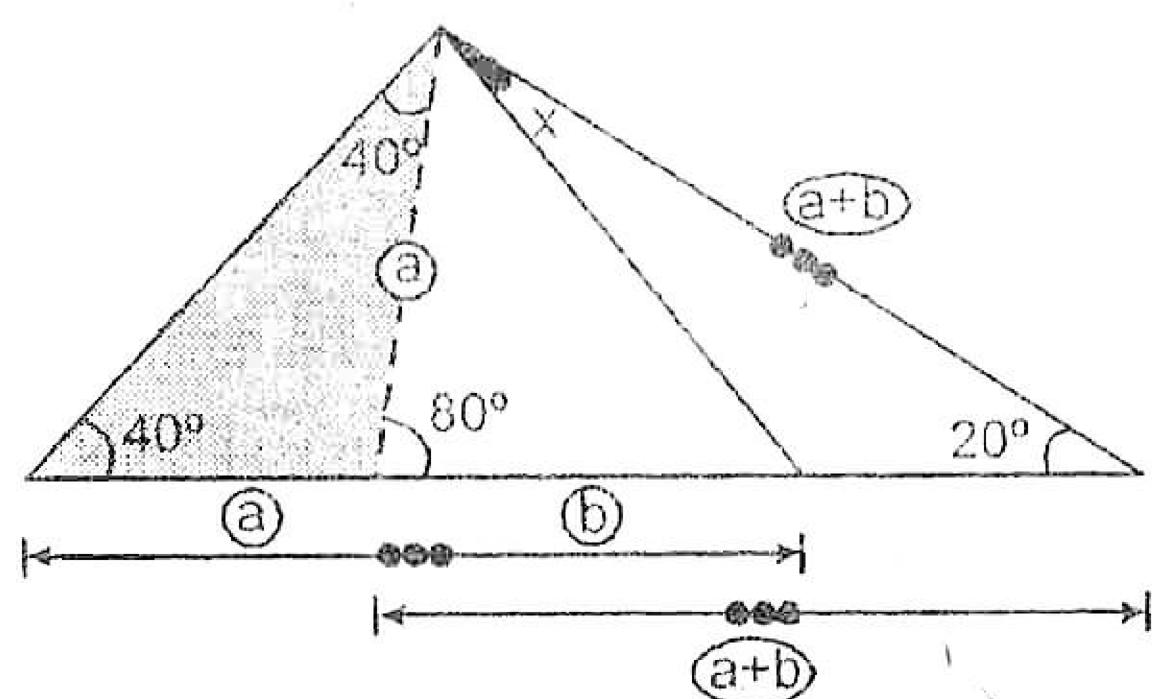
Paso Nº 1:
Entonces realizamos el trazo mencionado para generar triángulos isósceles.



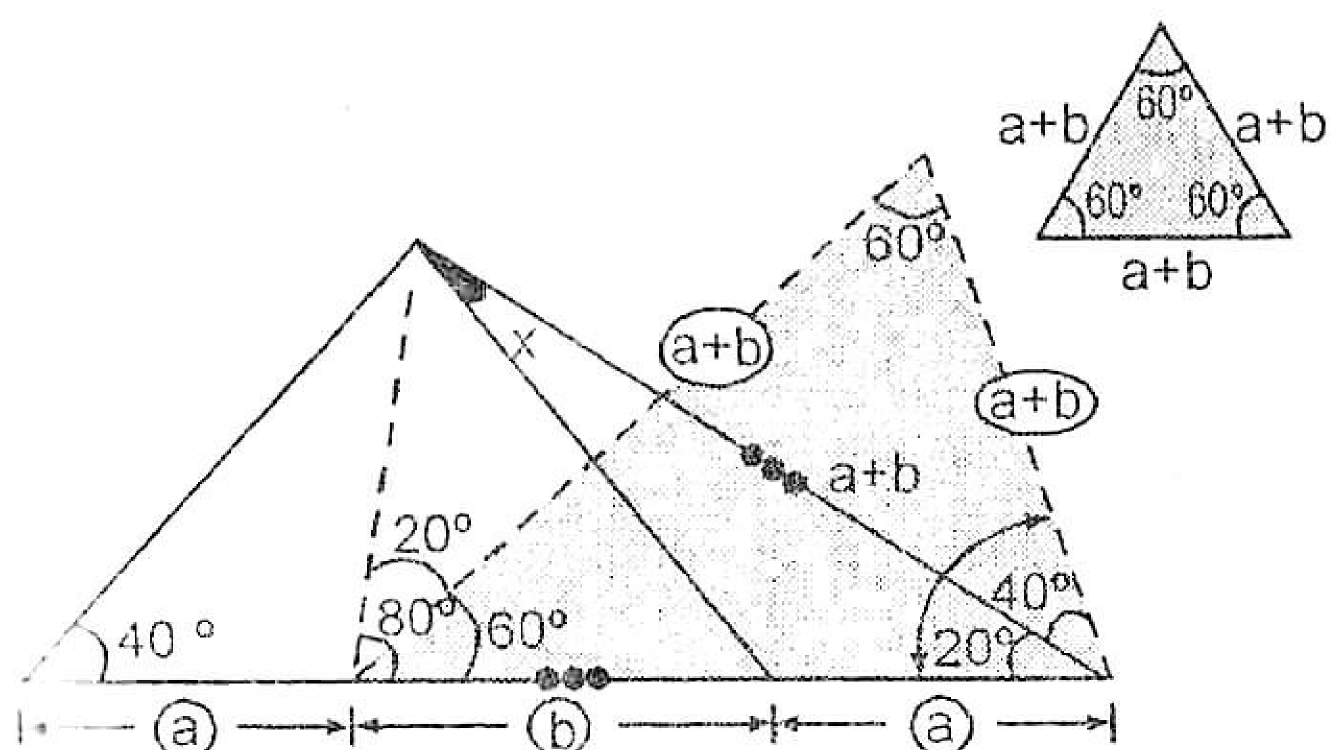
También se observa:



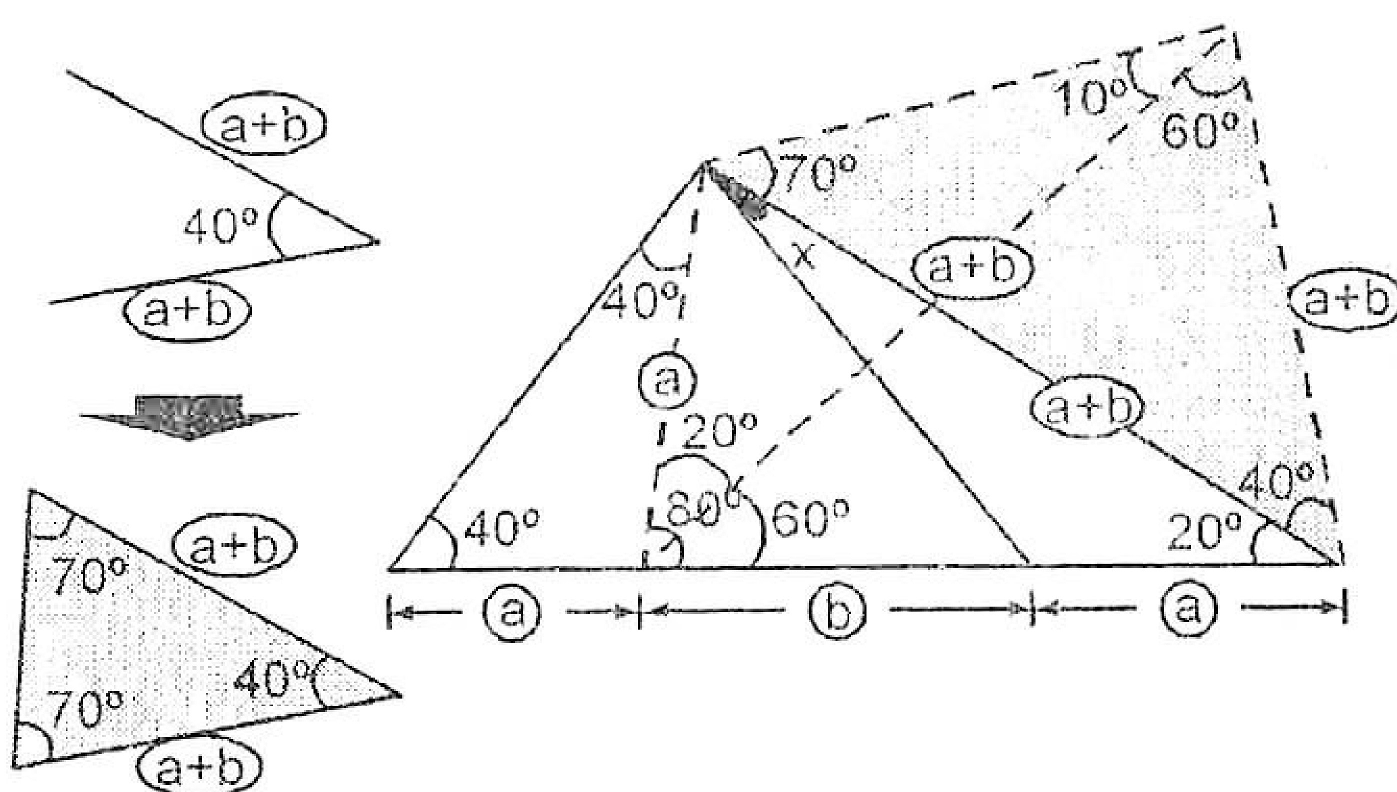
Paso Nº 2:
Identificamos los lados iguales colocando variables:



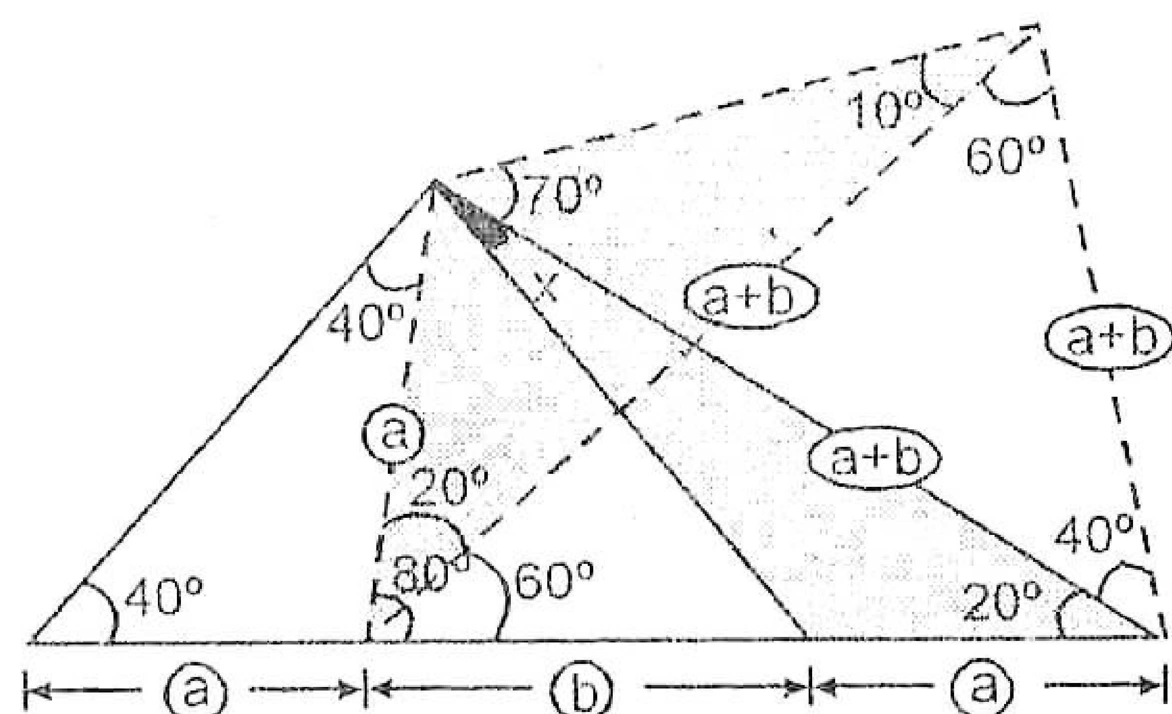
Paso Nº 3:
Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo equilátero de la siguiente manera:



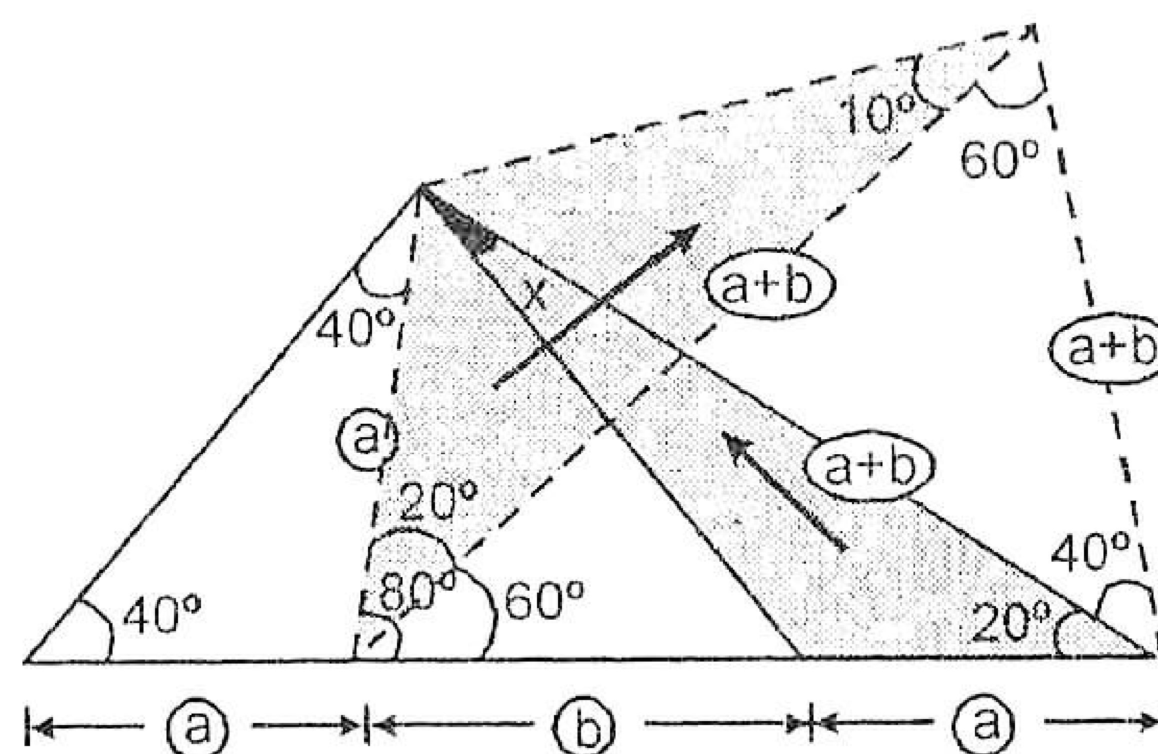
Paso Nº 4:
Como consecuencia del trazo anterior realizado, se observa un nuevo triángulo isósceles.



Paso Nº 5: También se ha logrado obtener dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.) en las siguientes posiciones.



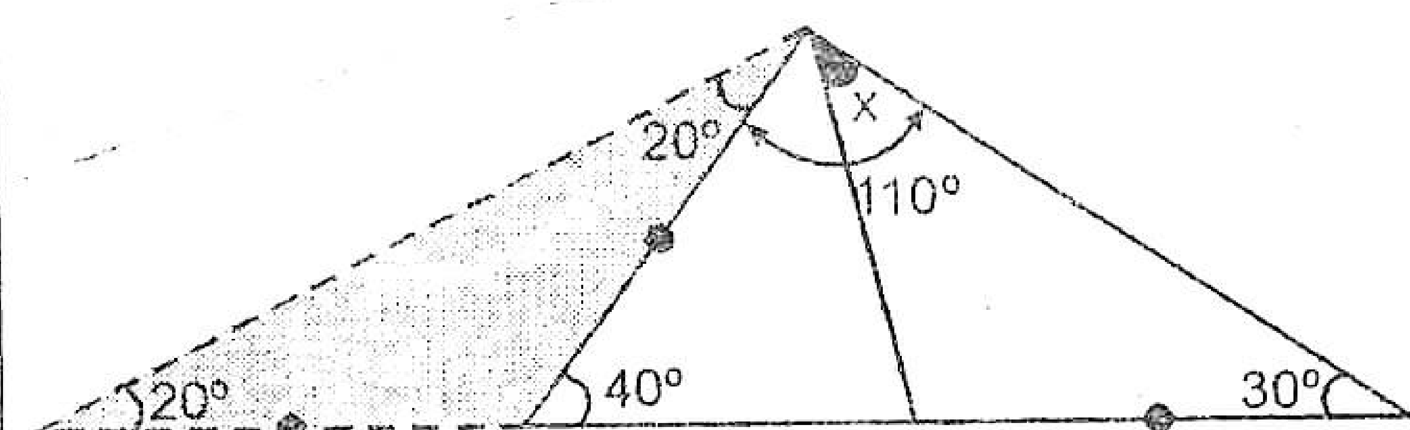
Donde se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



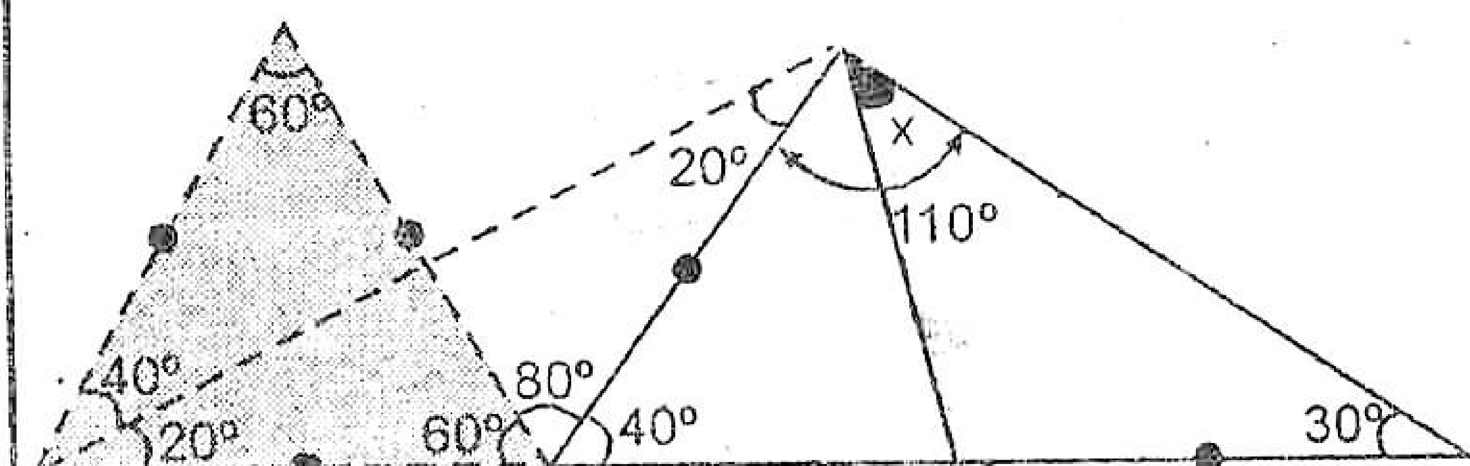
$\therefore \quad x = 10°$

Solución Nº 47

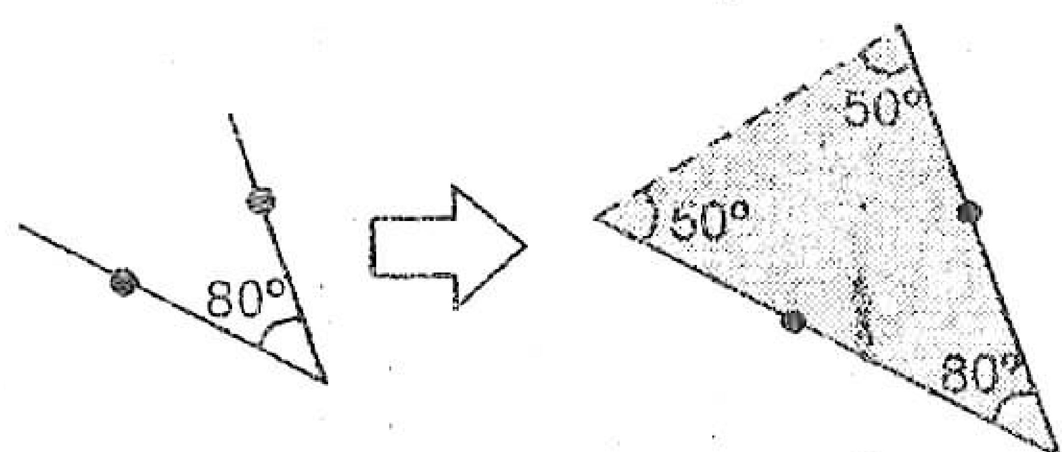
Paso Nº 1:
De la figura realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.

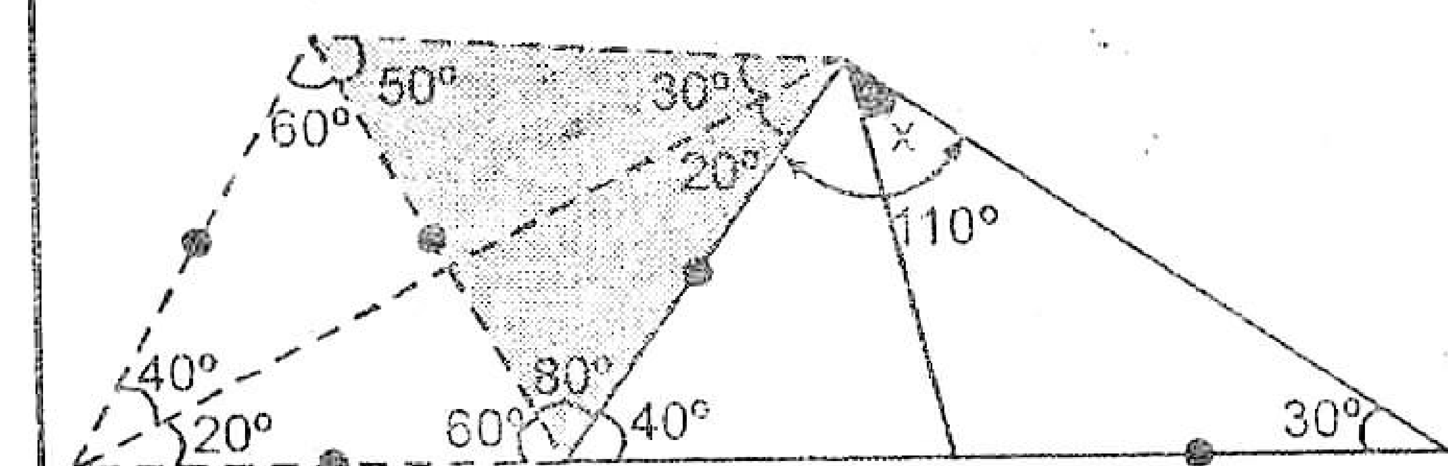


Paso N° 2:
Ahora, realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo equilátero de la siguiente manera.

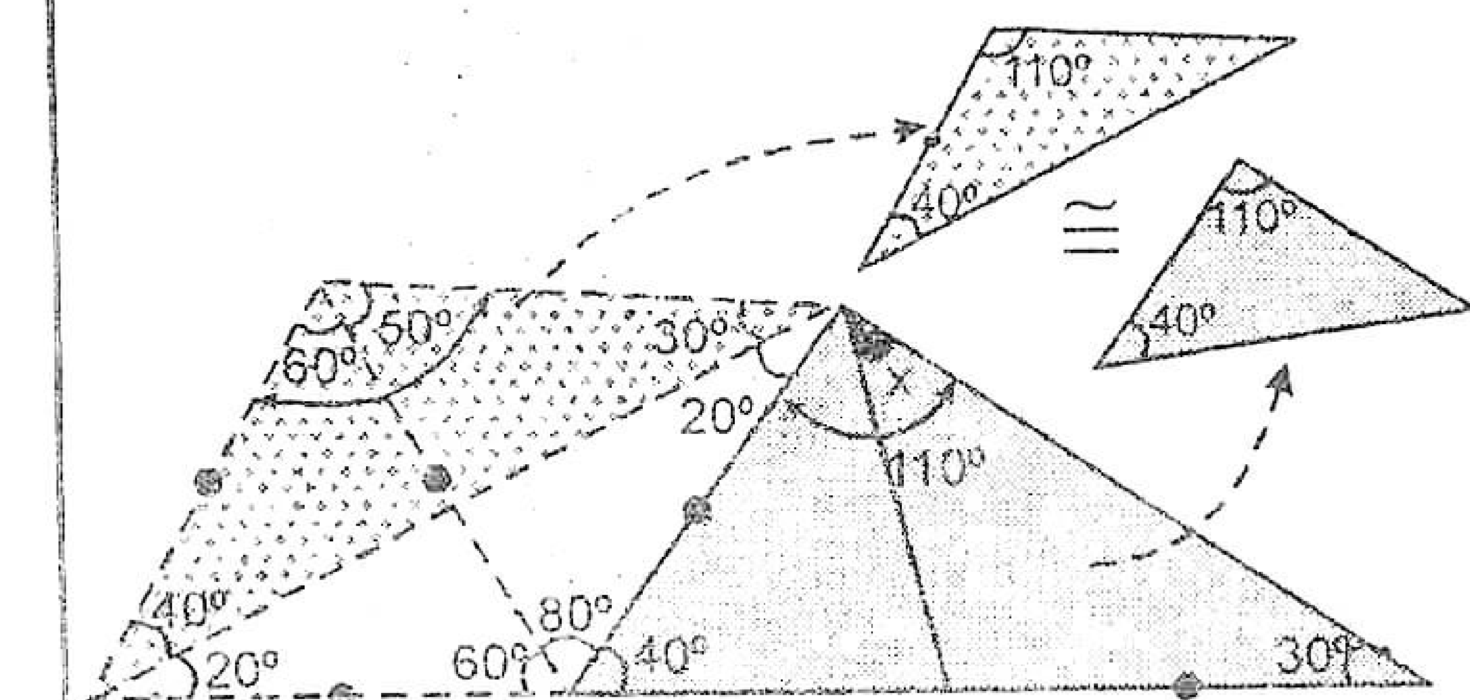


Paso N° 3:
Como consecuencia del trazo realizado se observa un nuevo triángulo isósceles.

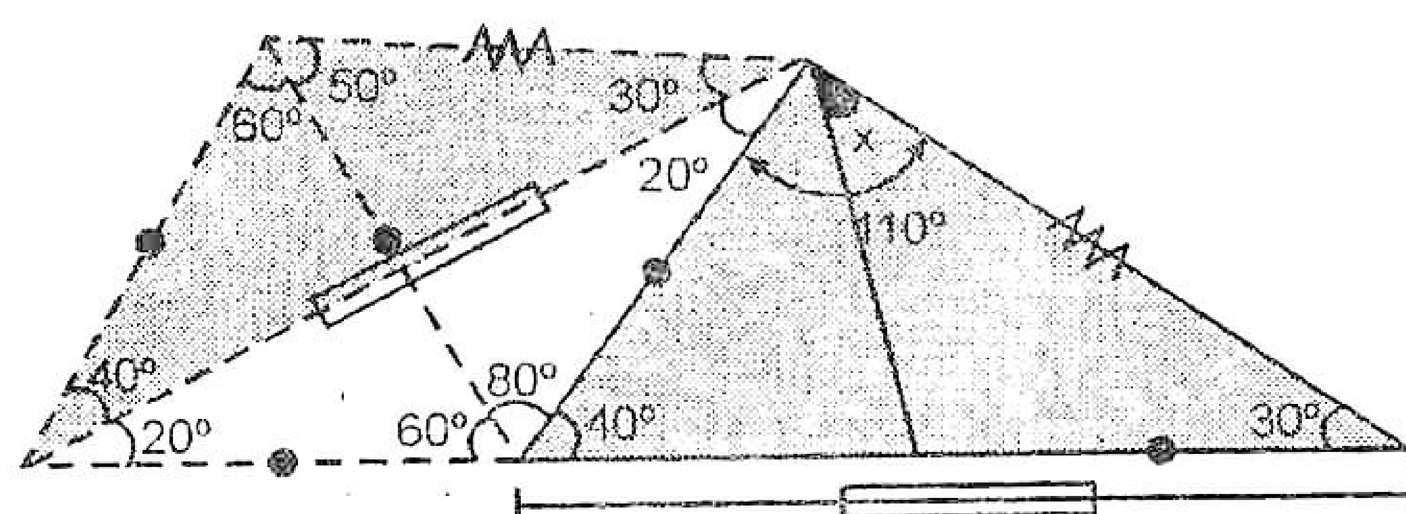




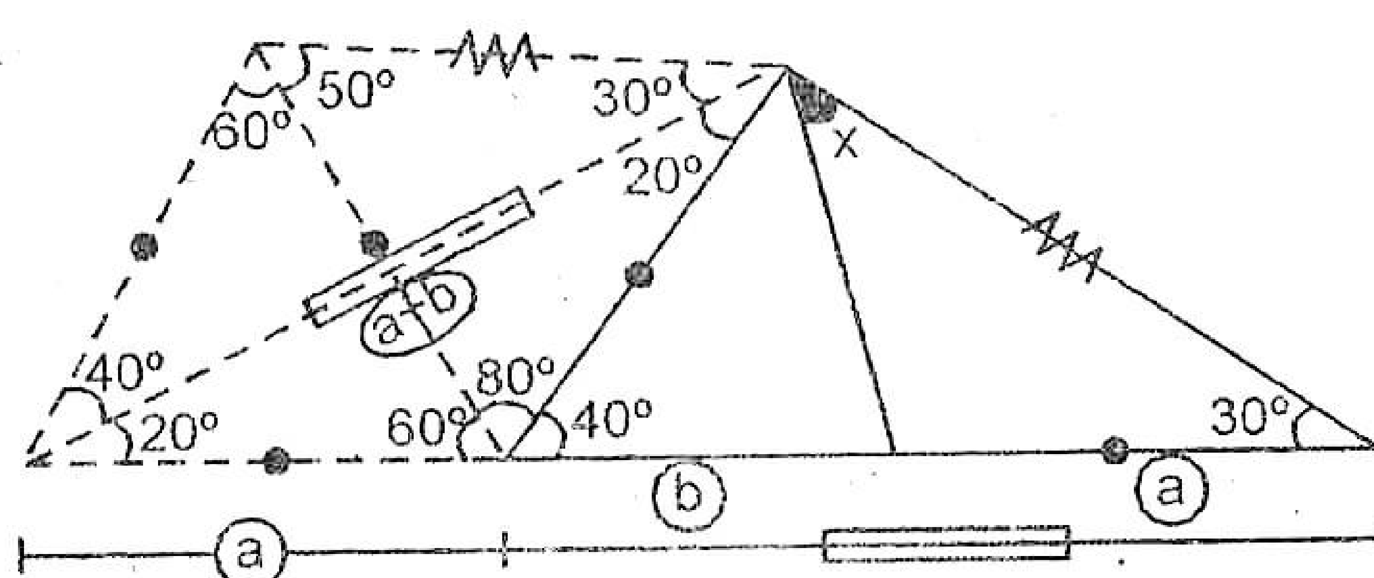
Paso N° 4:
De la figura resultante total se ha logrado obtener dos triángulos congruentes con las siguientes características. Caso (L.A.L.)



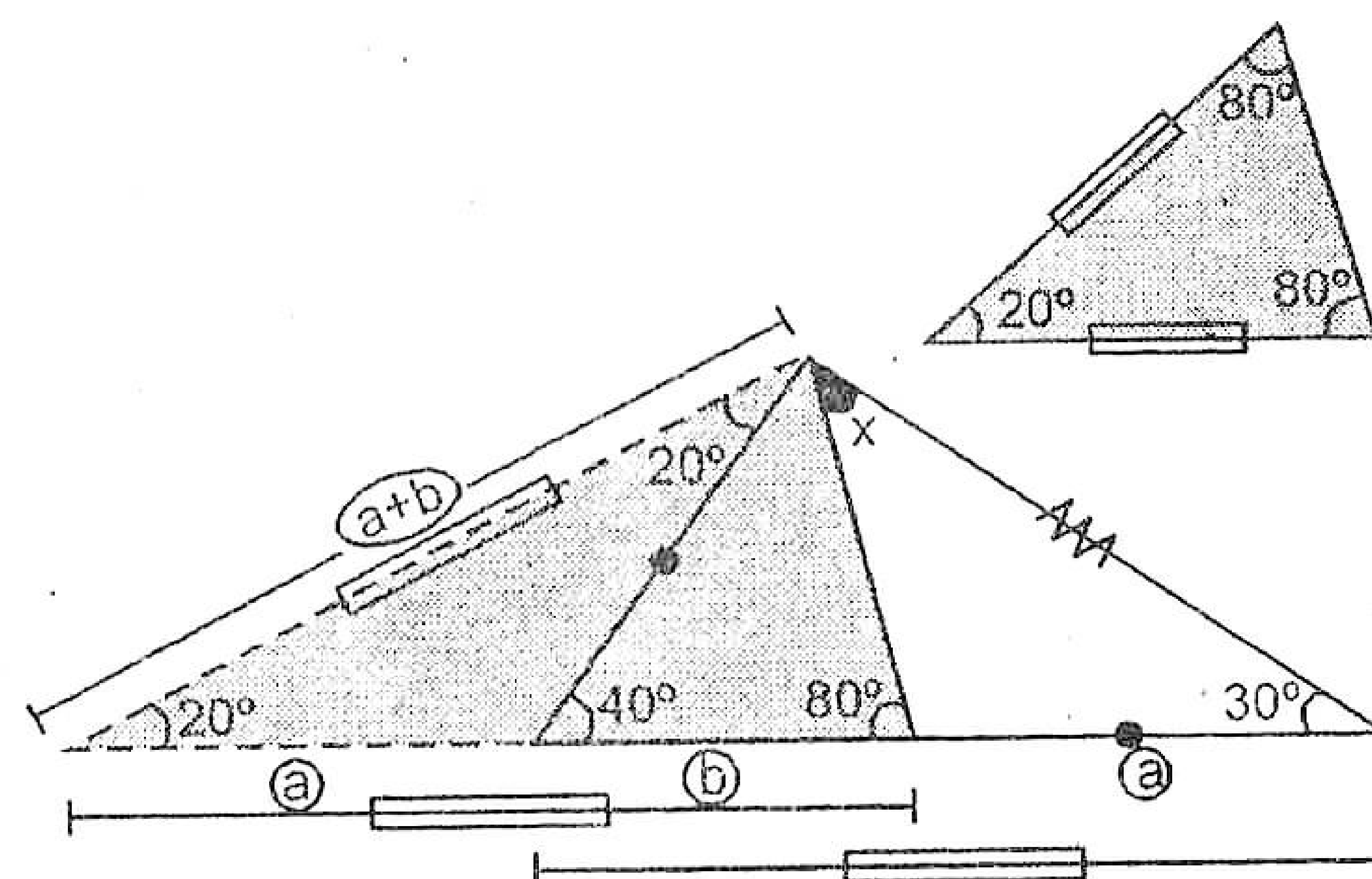
Aqui se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



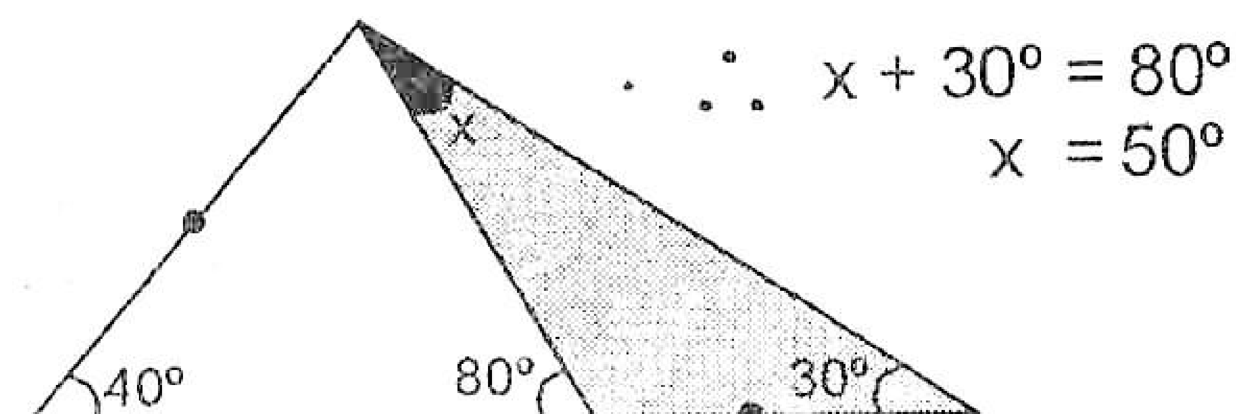
Paso N° 5:
Identificamos los lados o segmentos iguales colocando variables de la siguiente manera.



De la figura se logra obtener un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

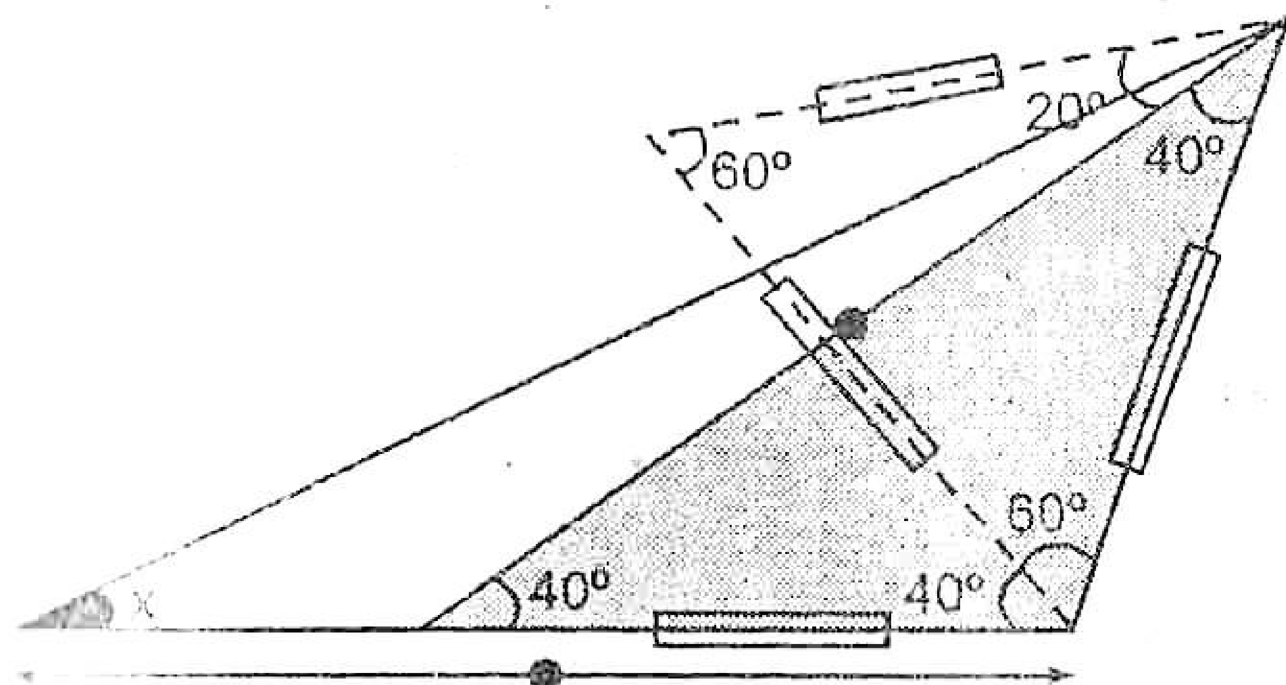


De aquí, se obtiene:

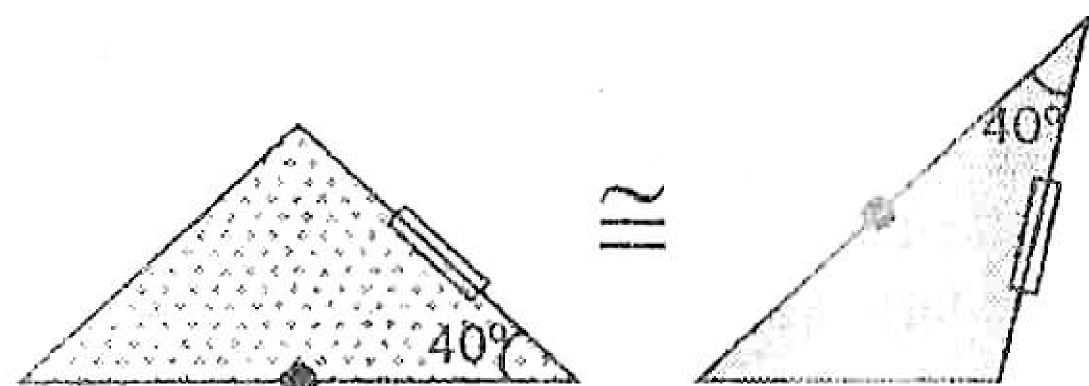


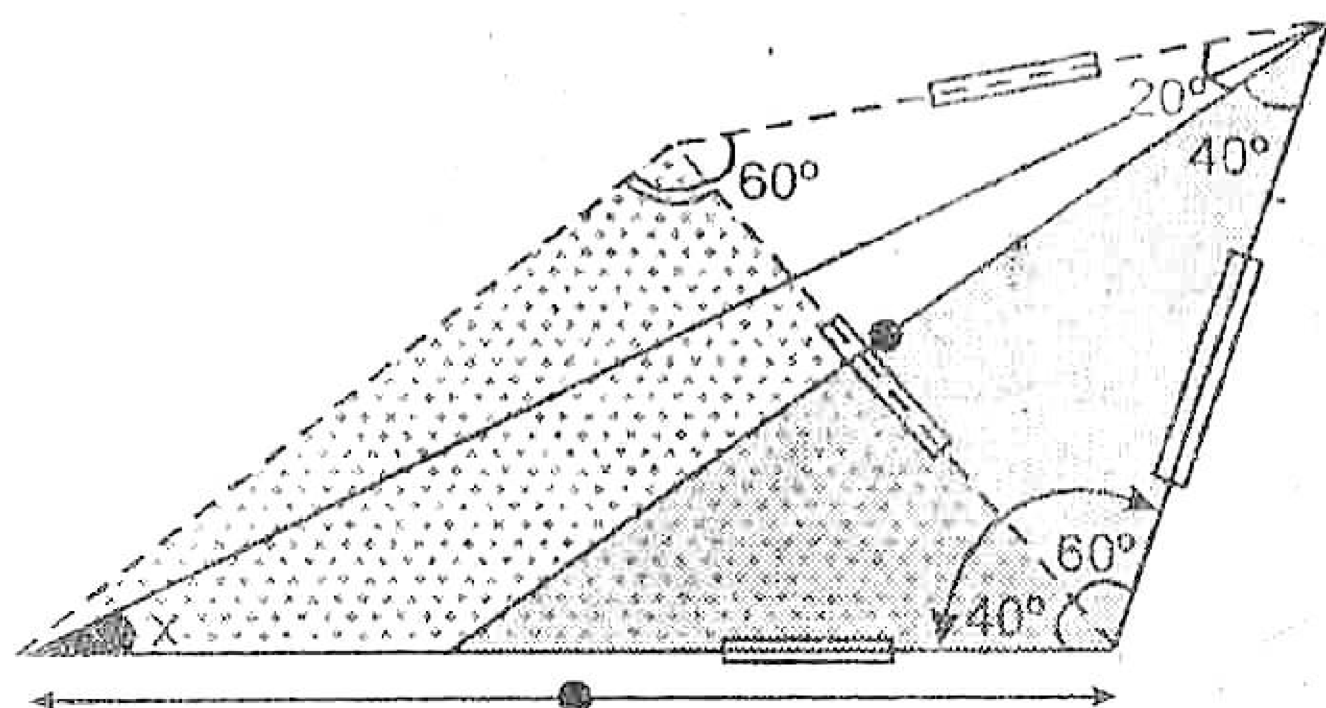
$$\therefore \; x + 30^\circ = 80^\circ$$
$$x = 50^\circ$$

Paso Nº 1:
Se traza un triángulo equilátero (Nos brinda 3 ángulos y 3 lados iguales).
El trazo se realizaría de la siguiente manera.

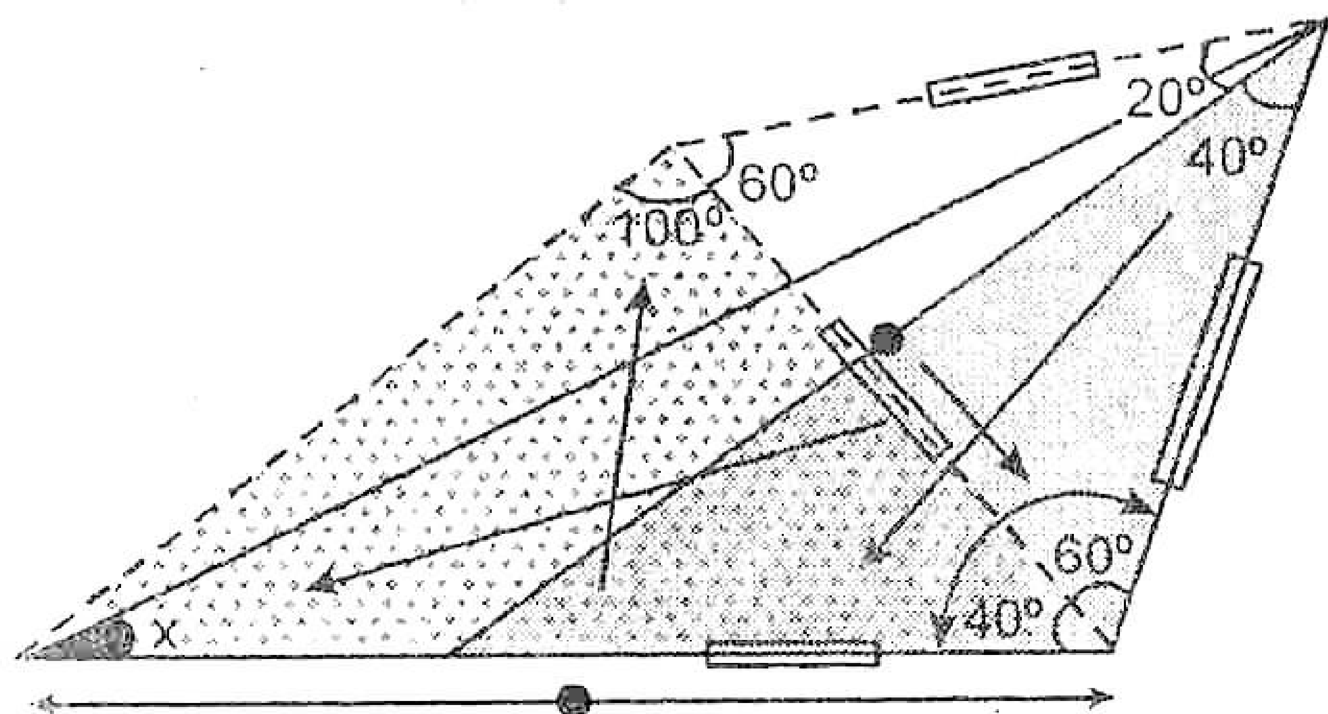


Paso Nº 2:
Se observa que se ha generado en la nueva figura dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)

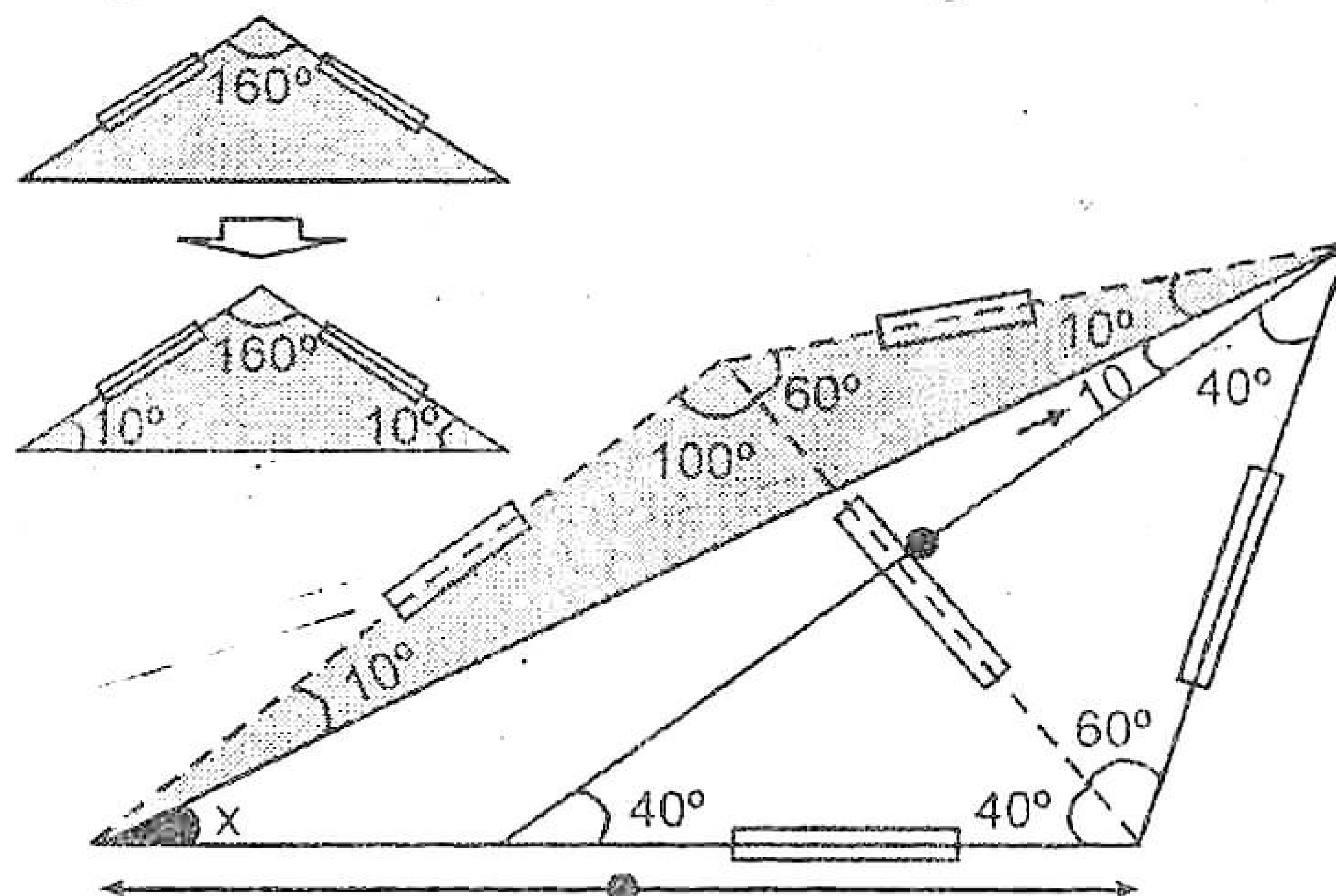




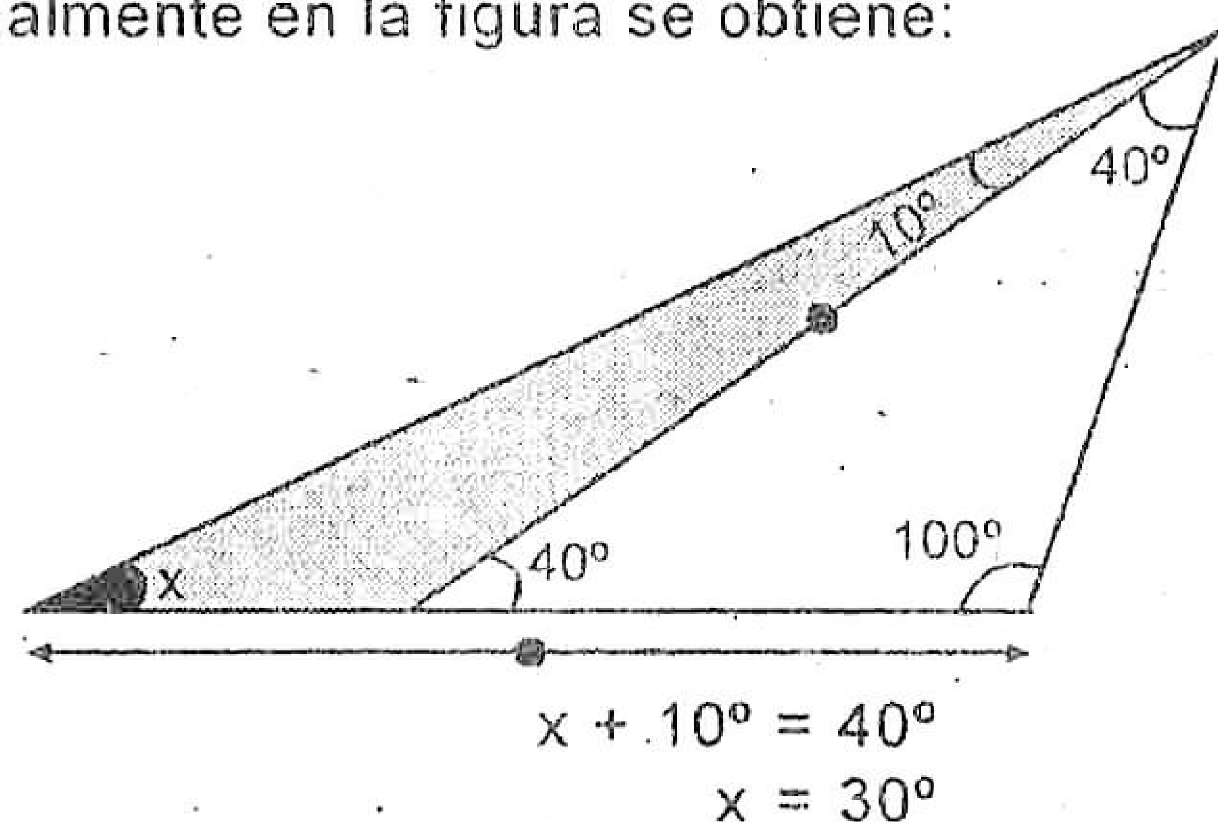
Donde se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"



Paso Nº 3:
Luego se observa un nuevo triángulo isósceles.



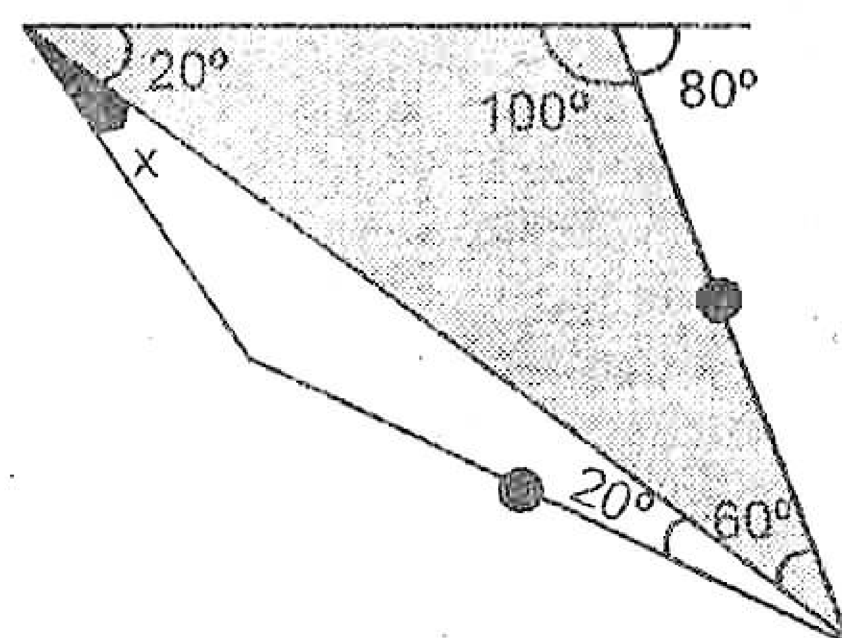
Paso Nº 4:
Finalmente en la figura se obtiene:



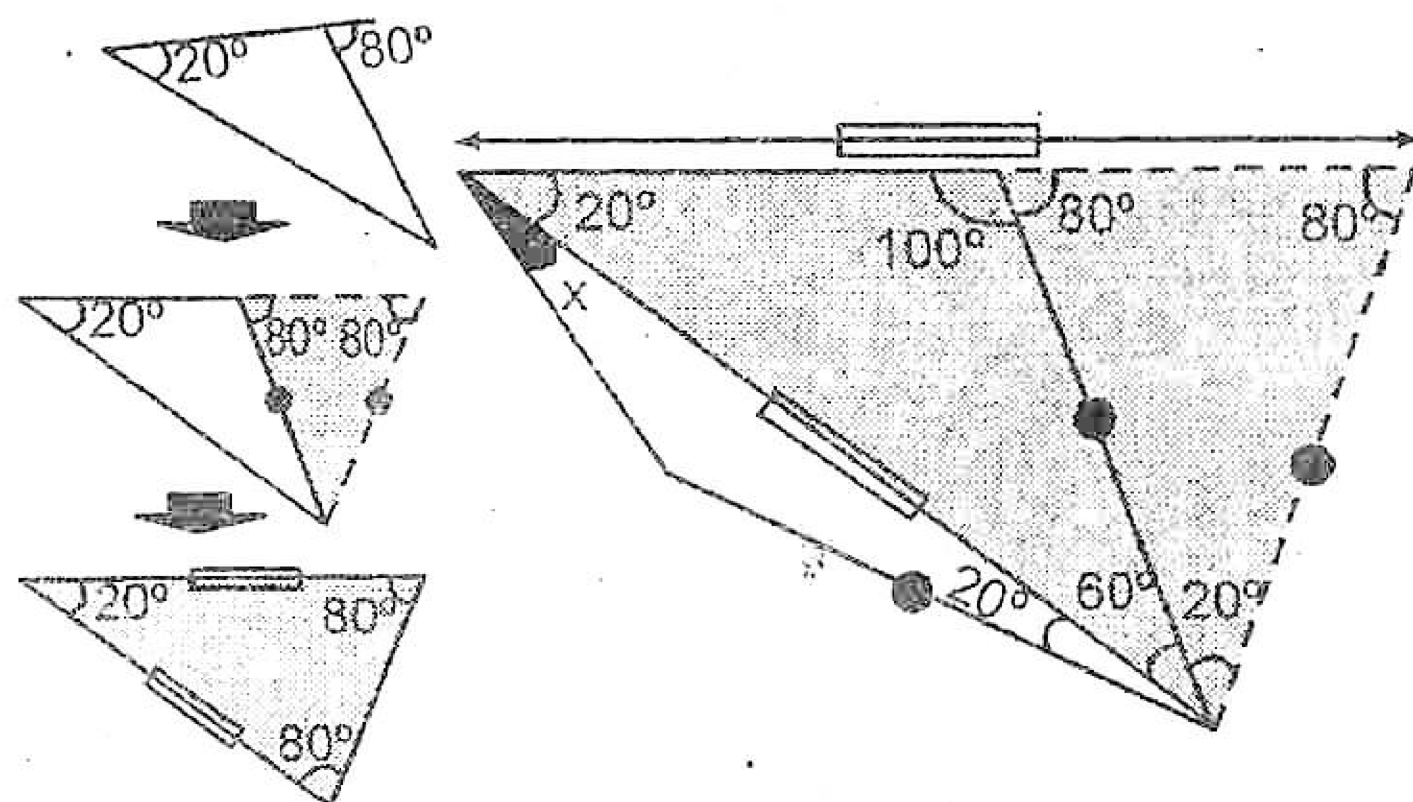
$$x + 10^\circ = 40^\circ$$
$$x = 30^\circ$$

Solución Nº 52

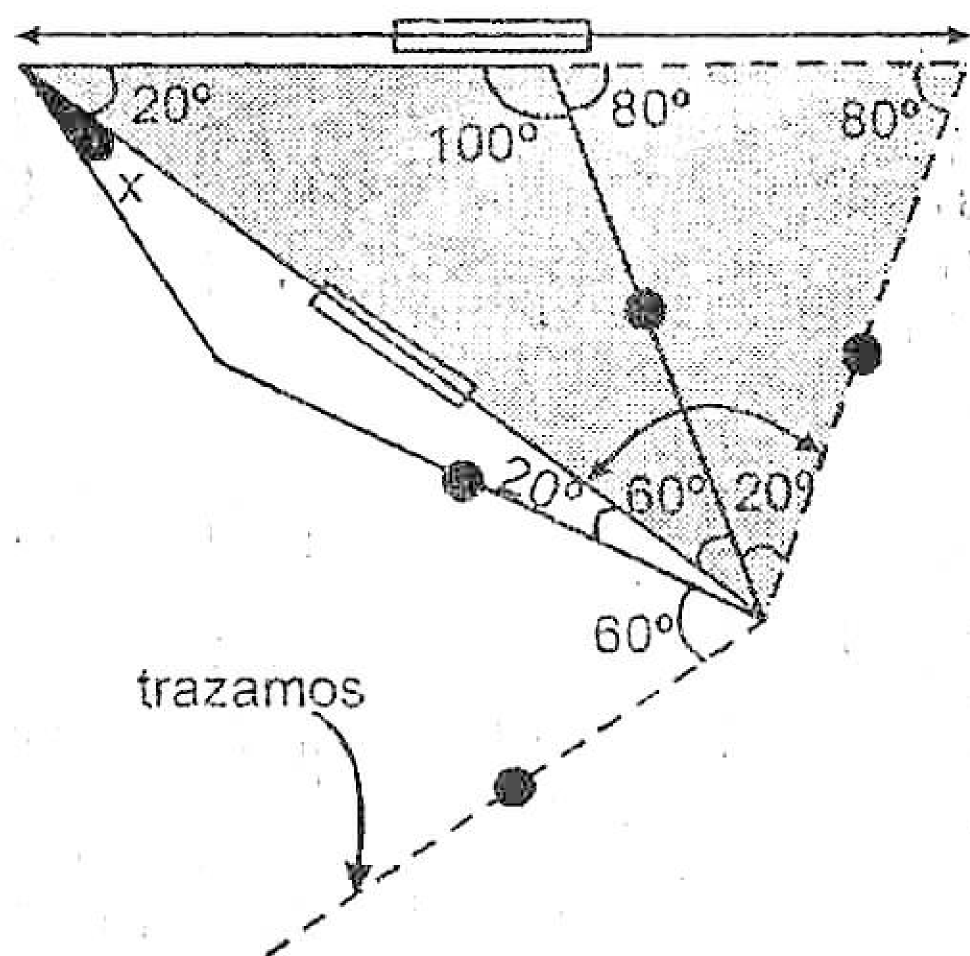
En la figura observamos:



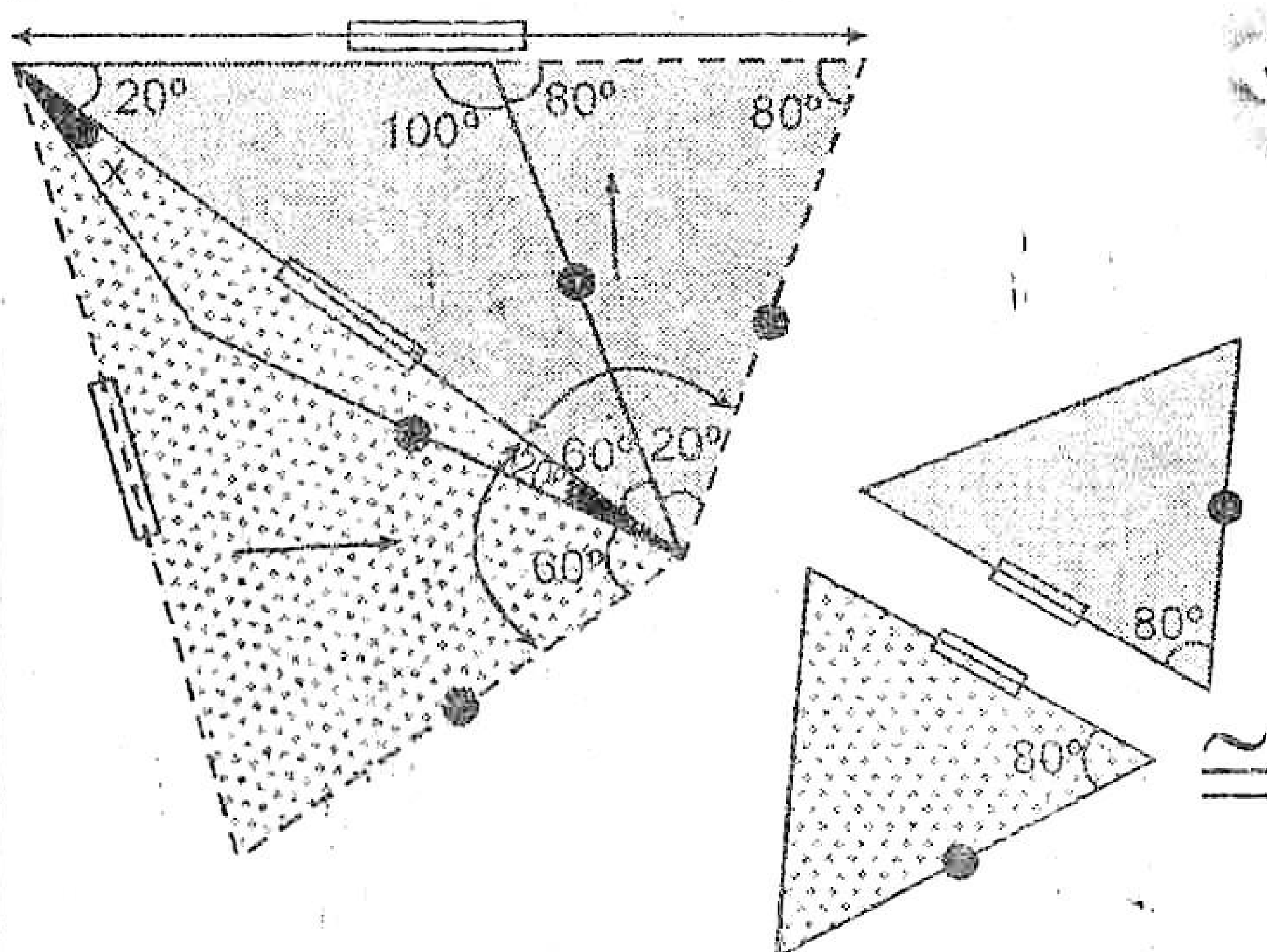
Paso Nº 1:
Se observa que tenemos el siguiente triángulo.



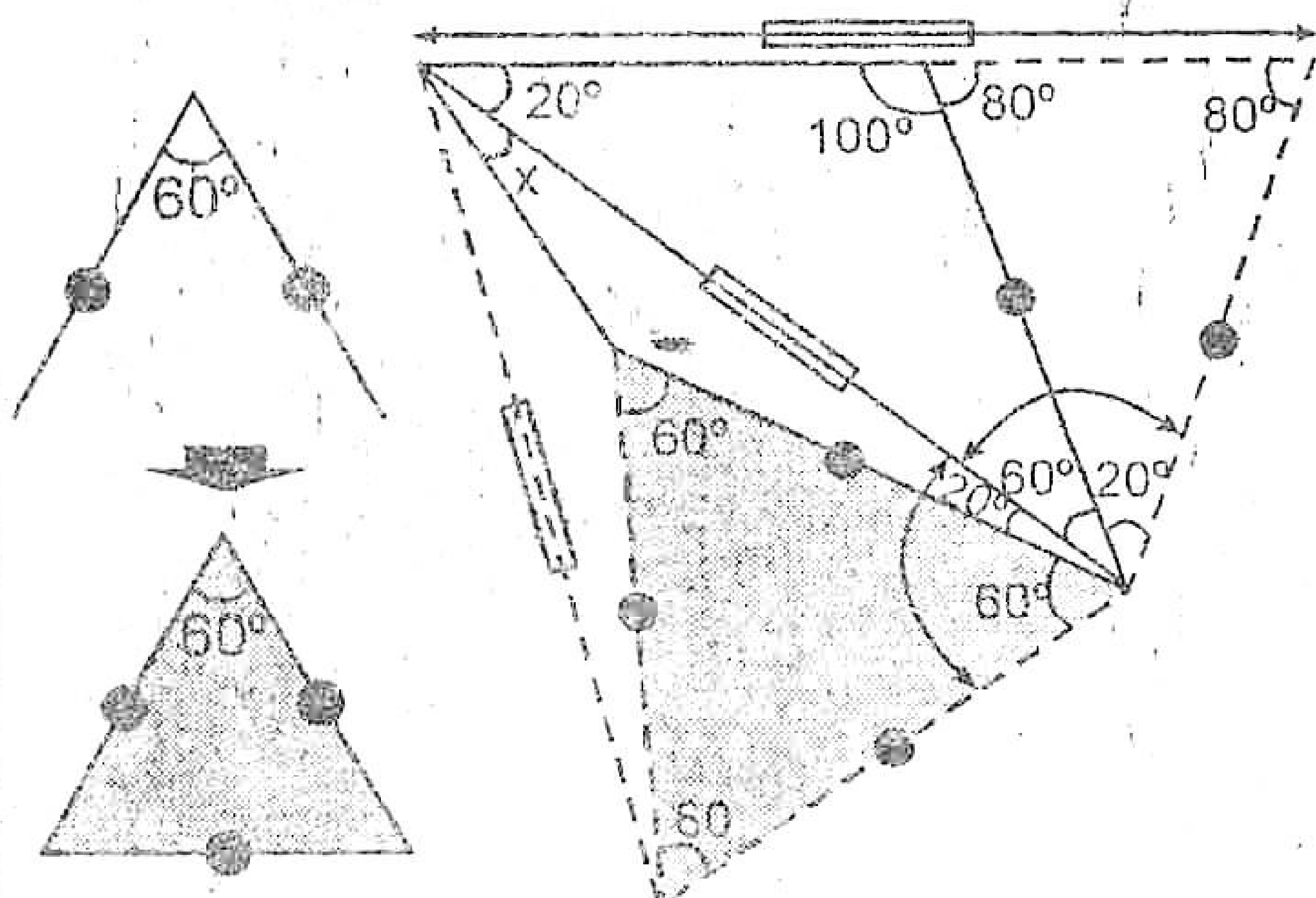
Paso N° 2: Como observamos lados iguales buscaremos trazar en la figura triángulos congruentes, para ello realizamos el siguiente trazo. (Quinto criterio de construcción)



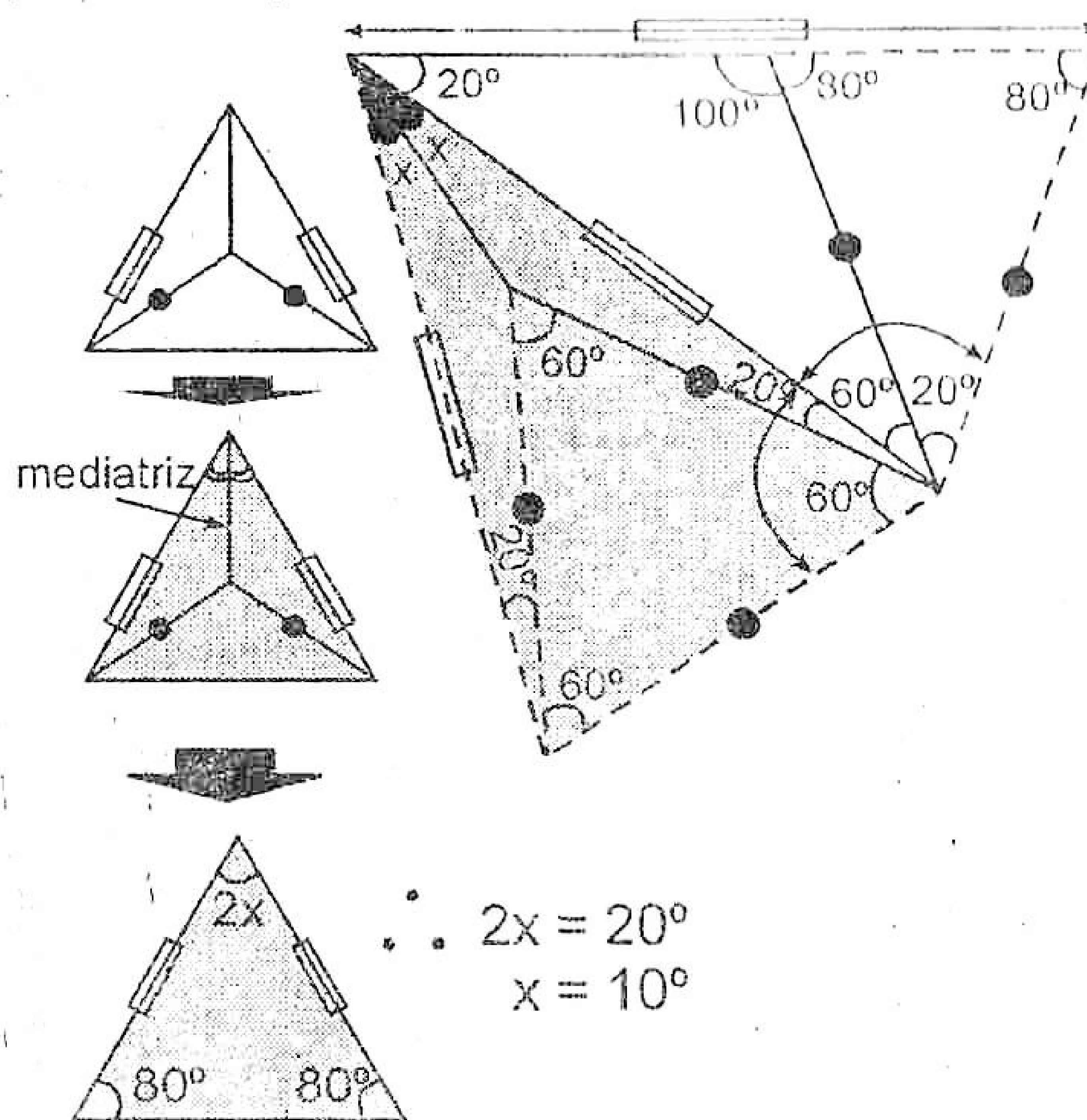
Con ello generamos congruencia, caso (L.A.L.)



Paso N° 3: Ahora observamos un triángulo equilátero de la siguiente manera:



Paso N° 4: Luego observamos la siguiente figura que se cumple:

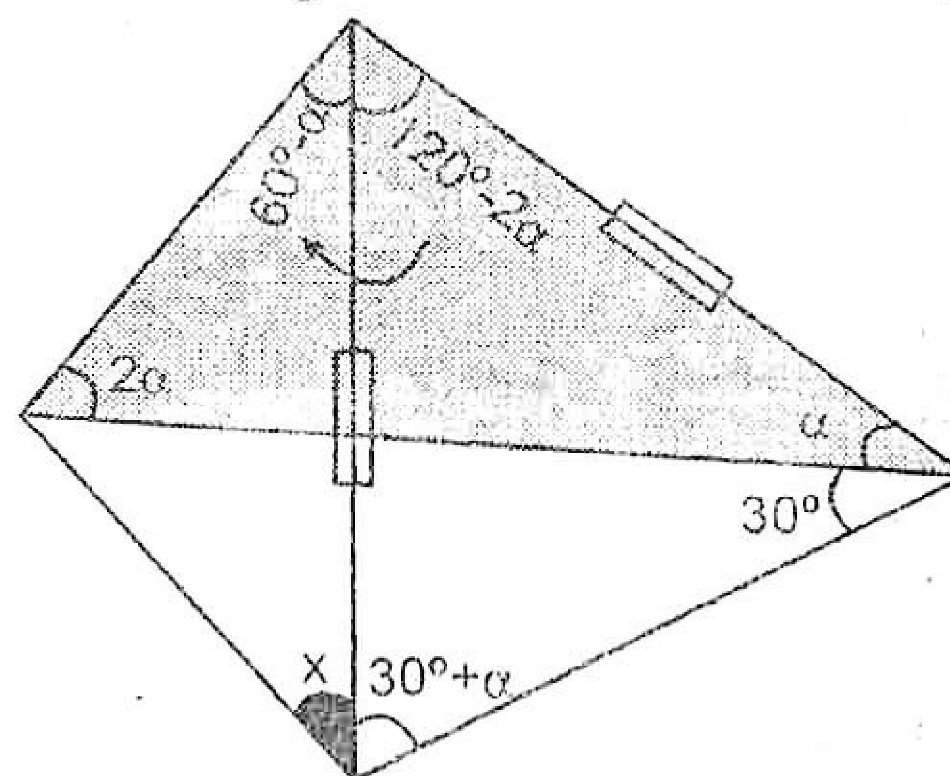


$\therefore\ 2x = 20°$

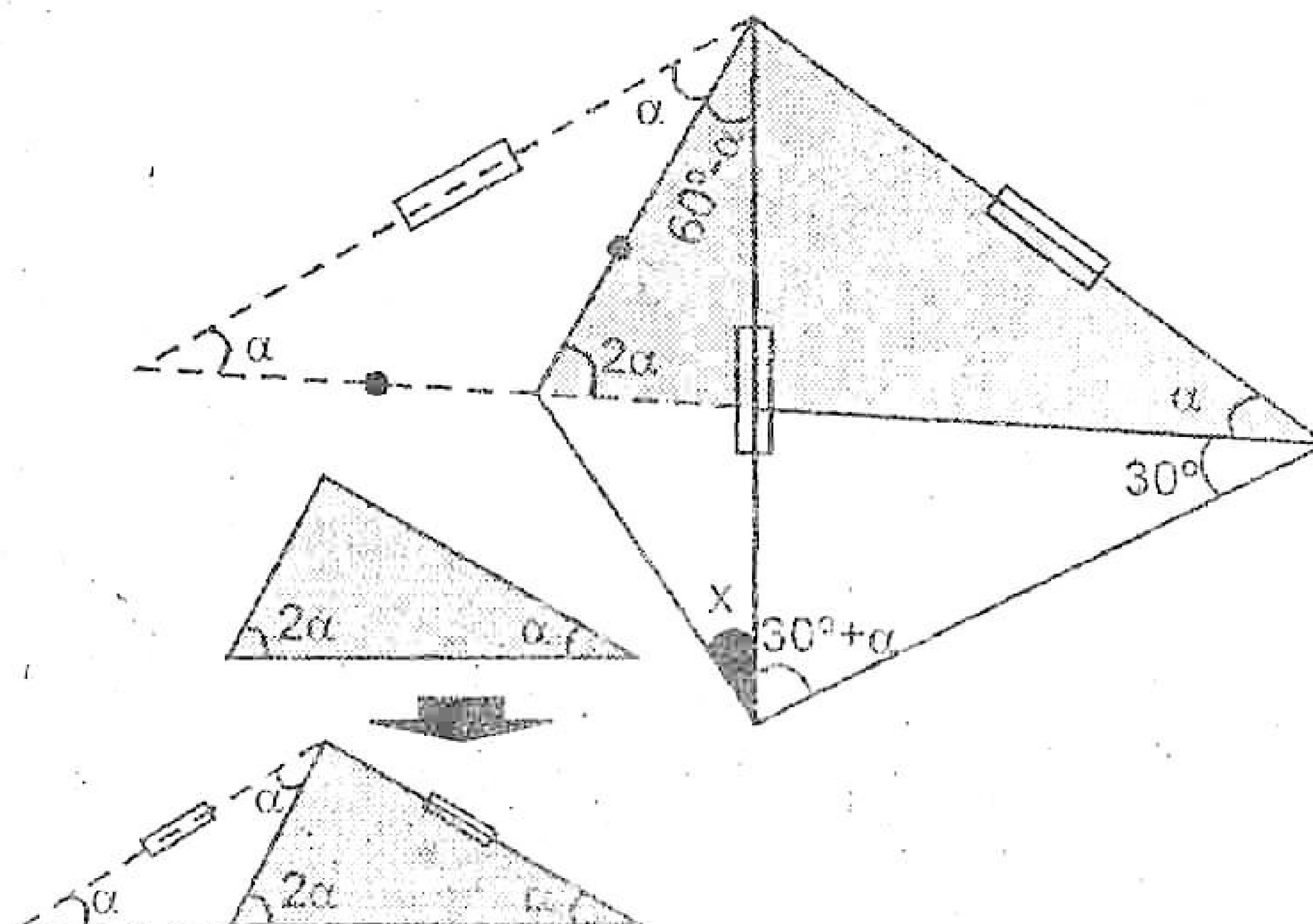
$x = 10°$

Solución N° 53

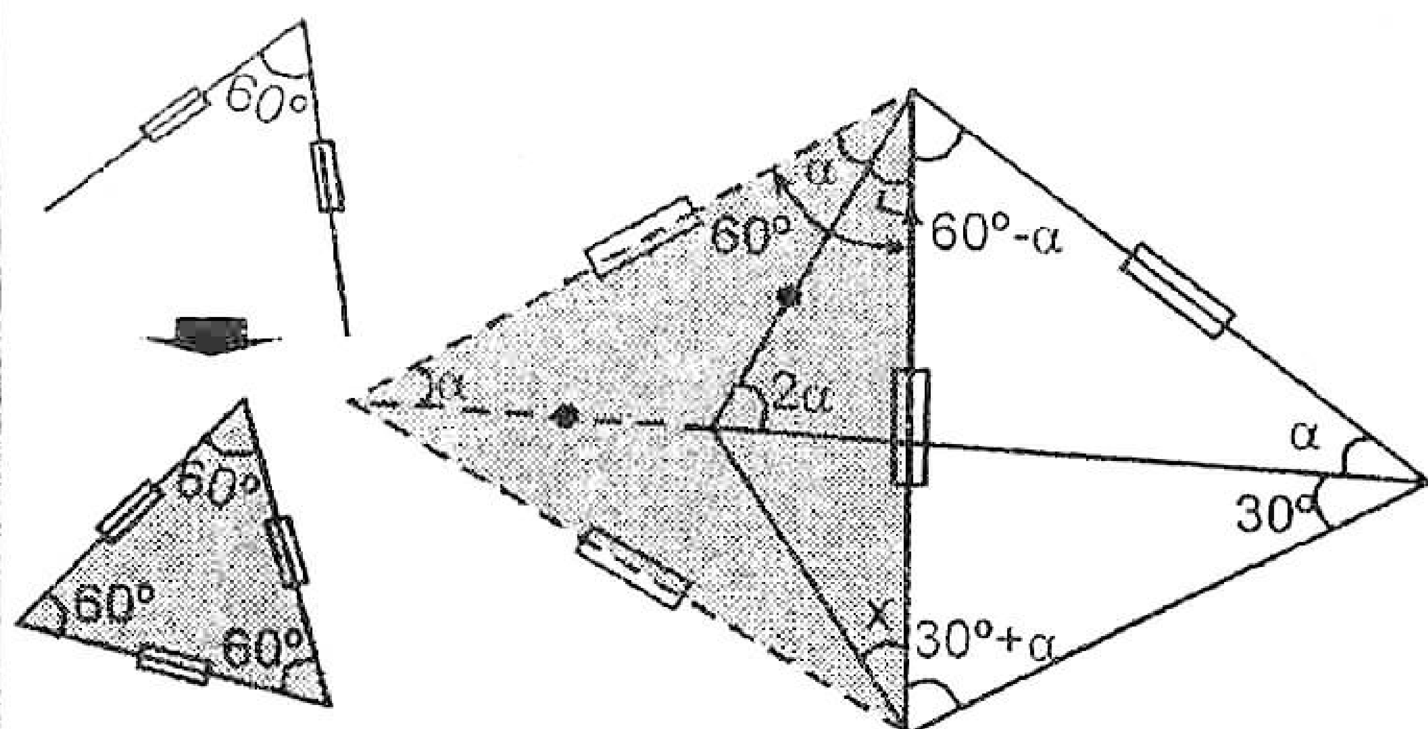
Completamos ángulos internos de la figura.



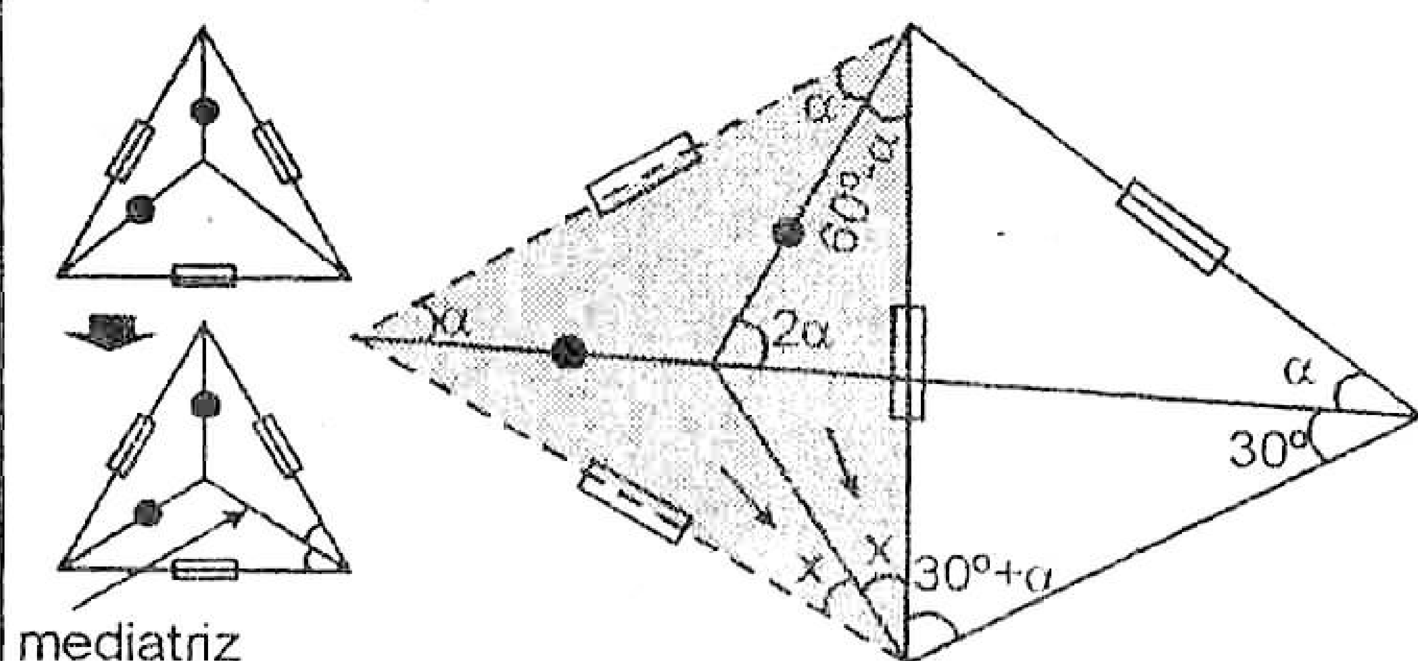
Paso N° 1: Se tiene un triángulo donde tiene ángulos en la relación de 1 a 2; entonces se realizamos el primer criterio de construcción.



Paso N° 2: Ahora tenemos en la figura un triángulo equilátero.



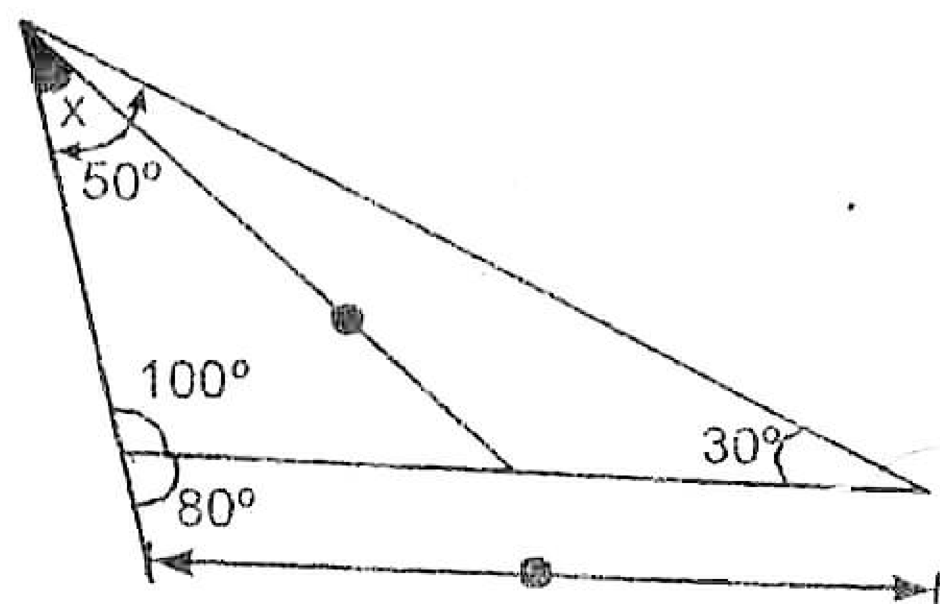
Paso N° 3: Luego observamos la siguiente figura donde se cumple:



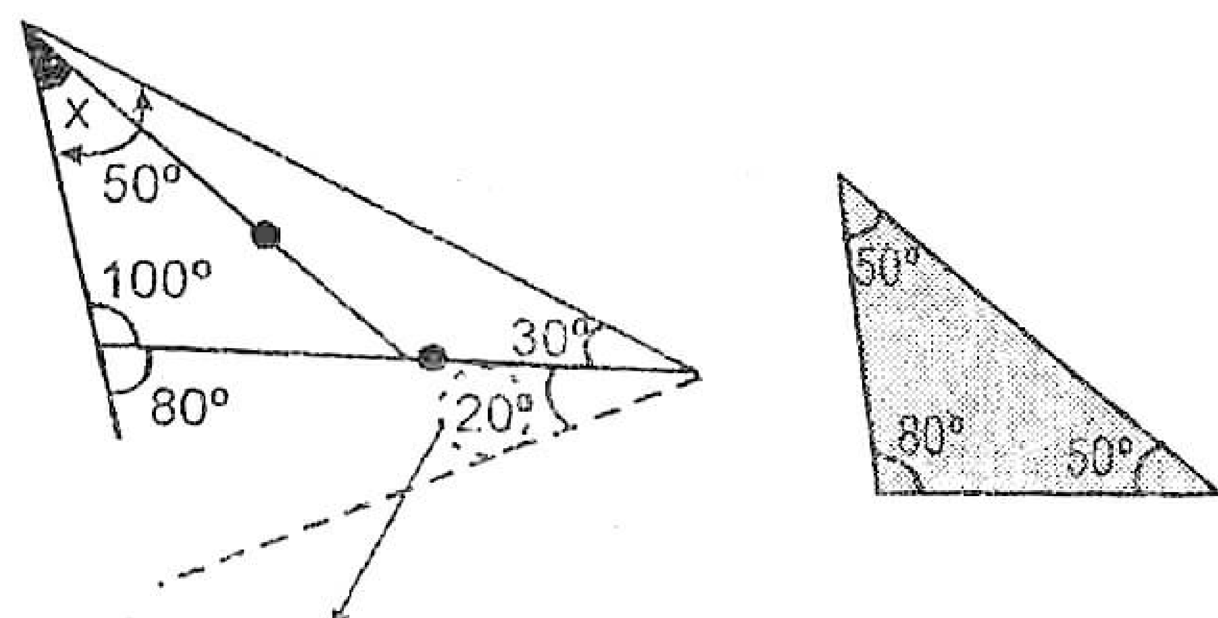
$$\therefore \quad 2x = 60°$$
$$x = 30°$$

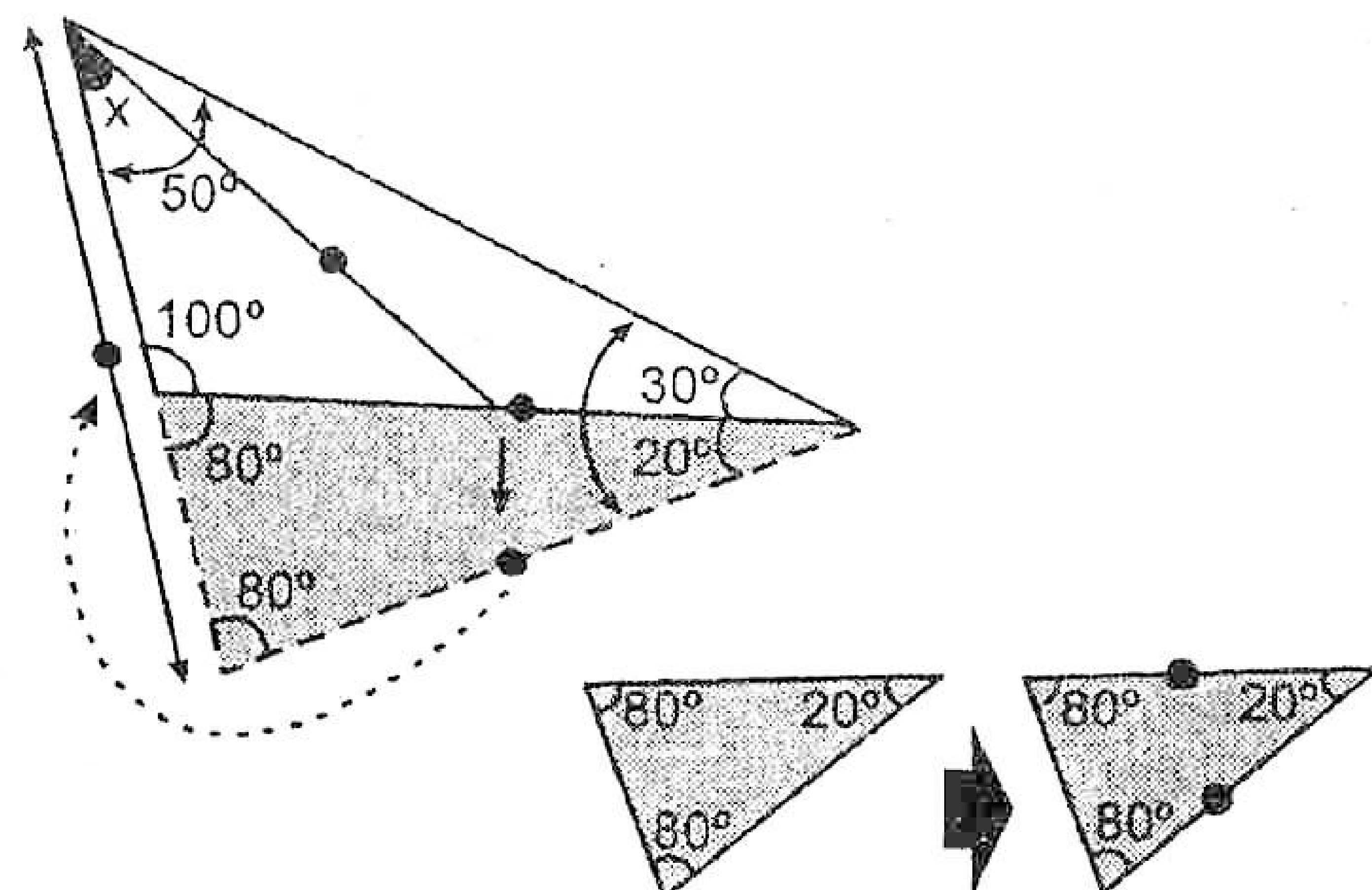
Solución Nº 54

En la figura, observamos:

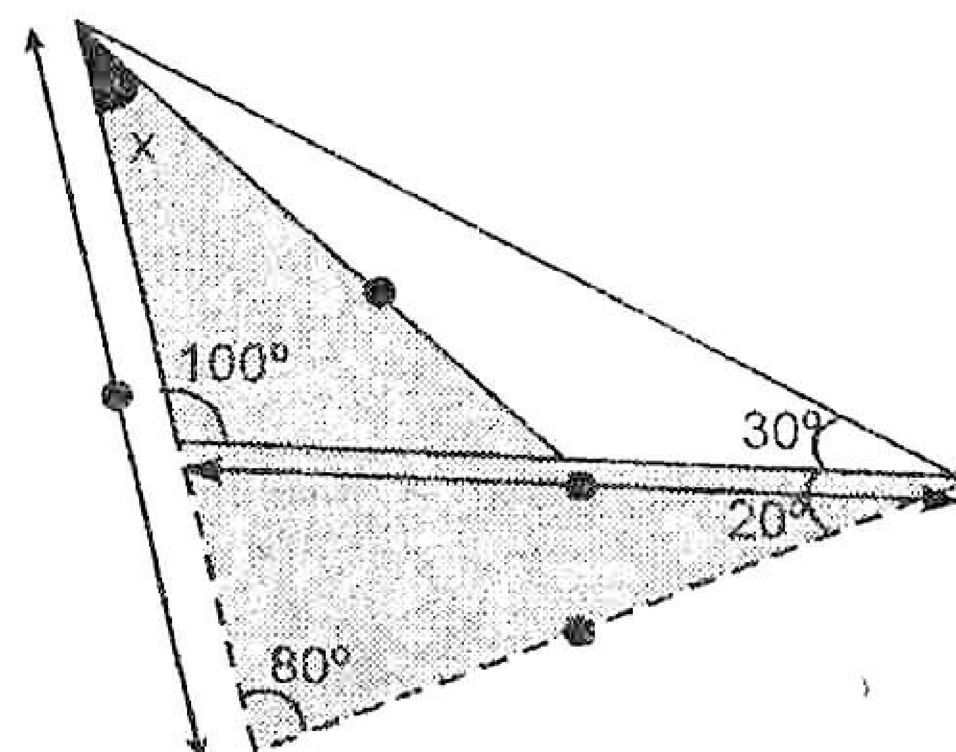


Paso N° 1: Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.

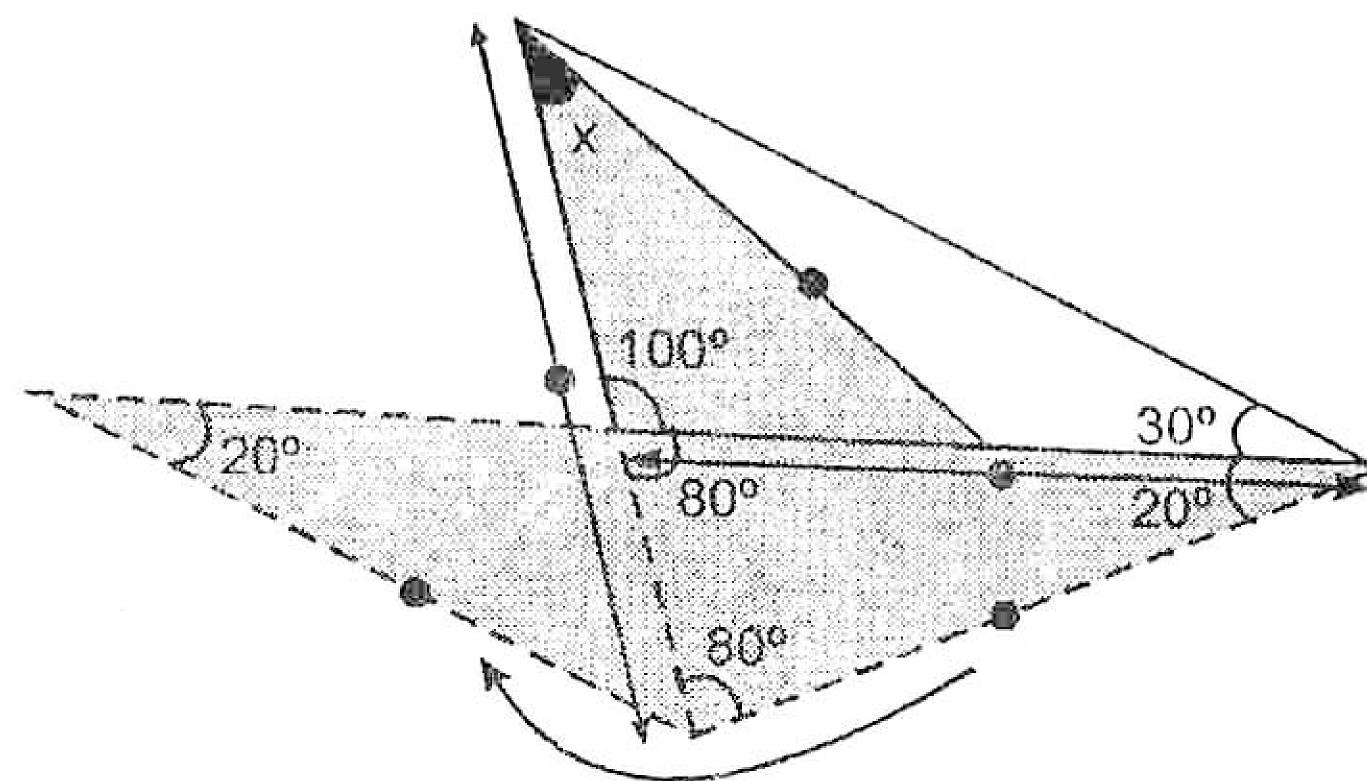




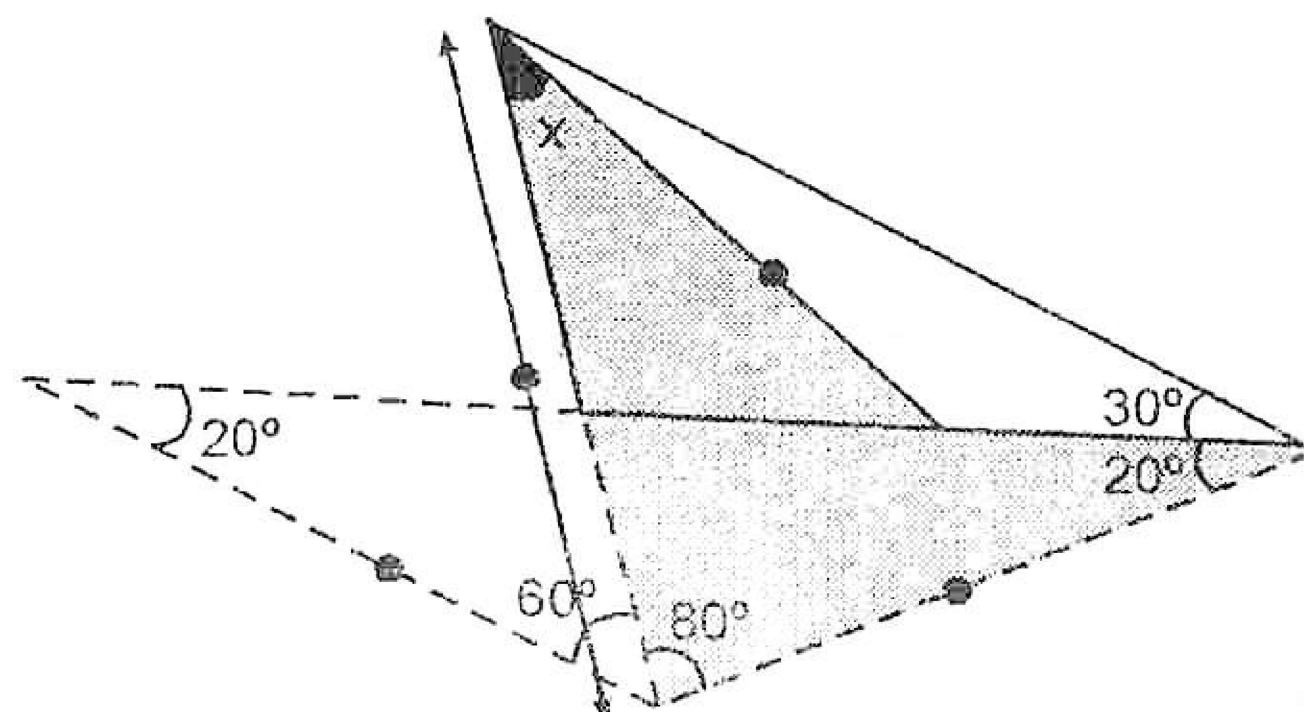
Paso N° 2:
Ahora en la nueva figura, observamos un cuadrilátero concavo, donde posee las siguientes características.



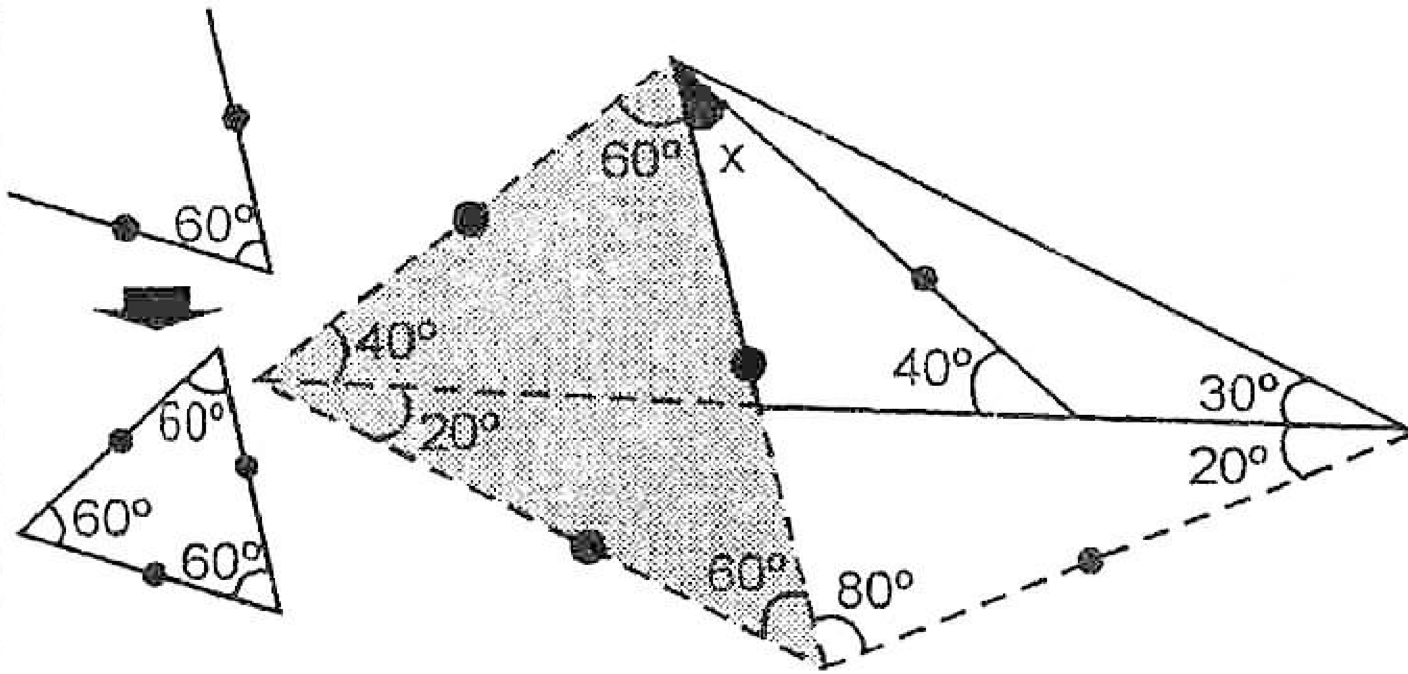
Paso N° 3:
Realizamos el siguiente trazo, utilizando el sexto criterio de construcción (ángulo espejo)



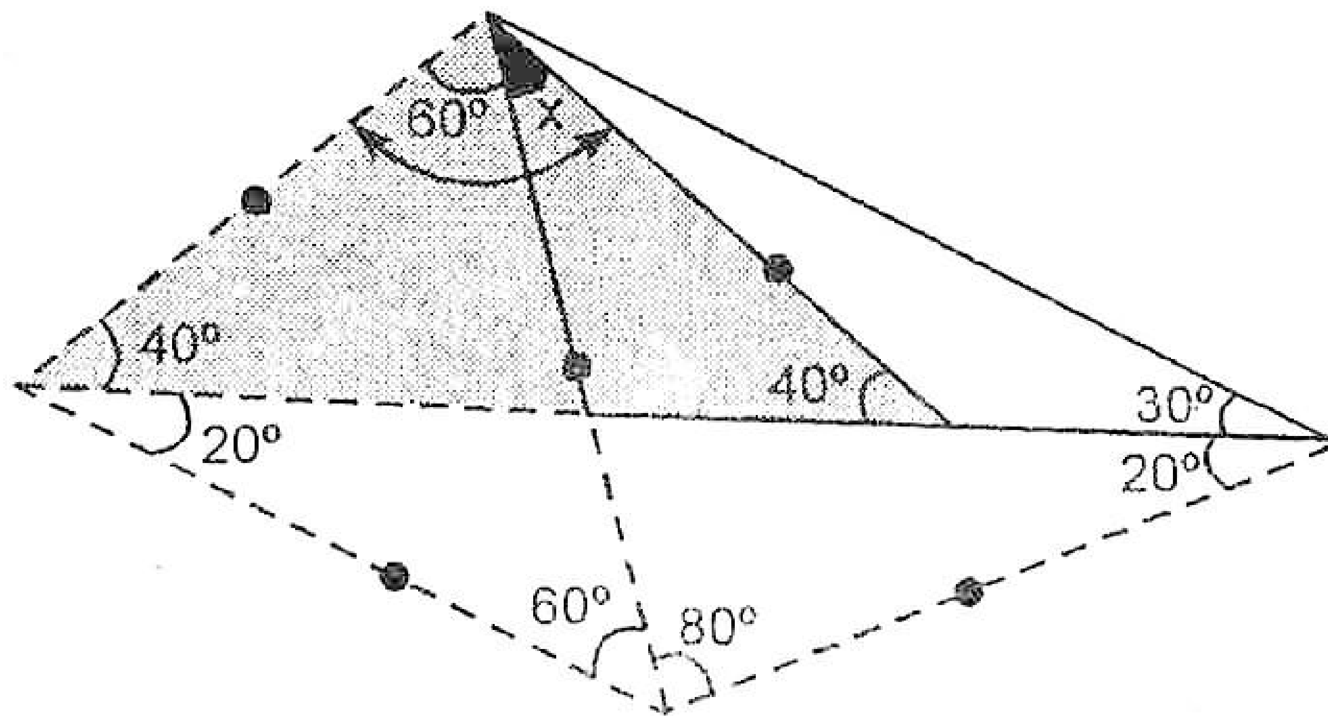
Ahora completamos los ángulo internos en la figura:



Paso Nº 4:
Ahora observamos un triángulo equilátero:



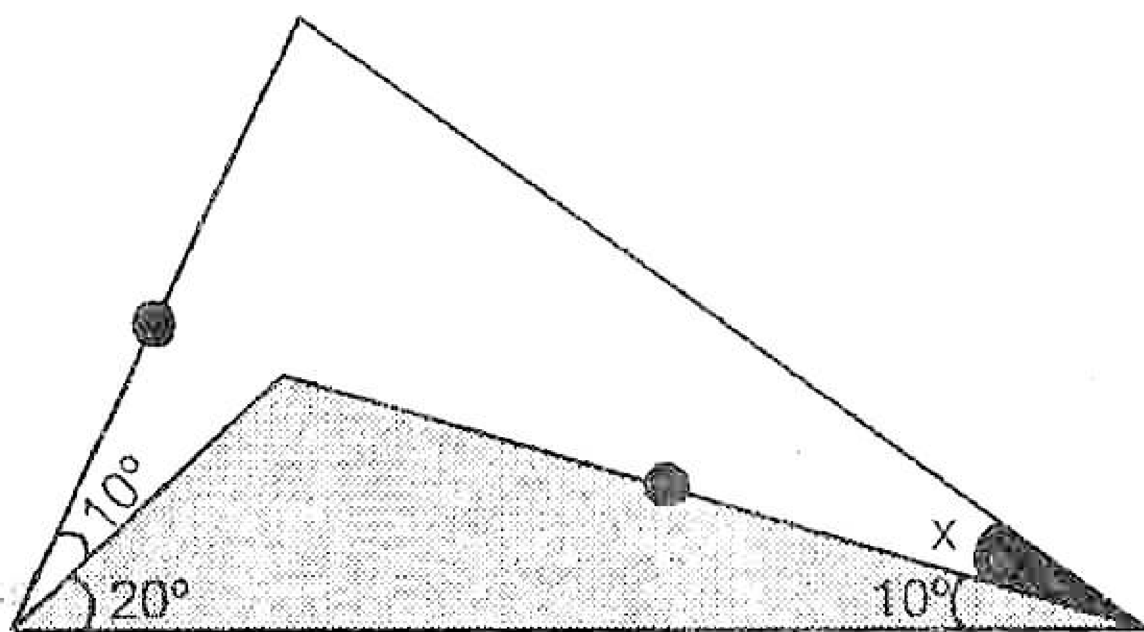
Paso Nº 5: Obtenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



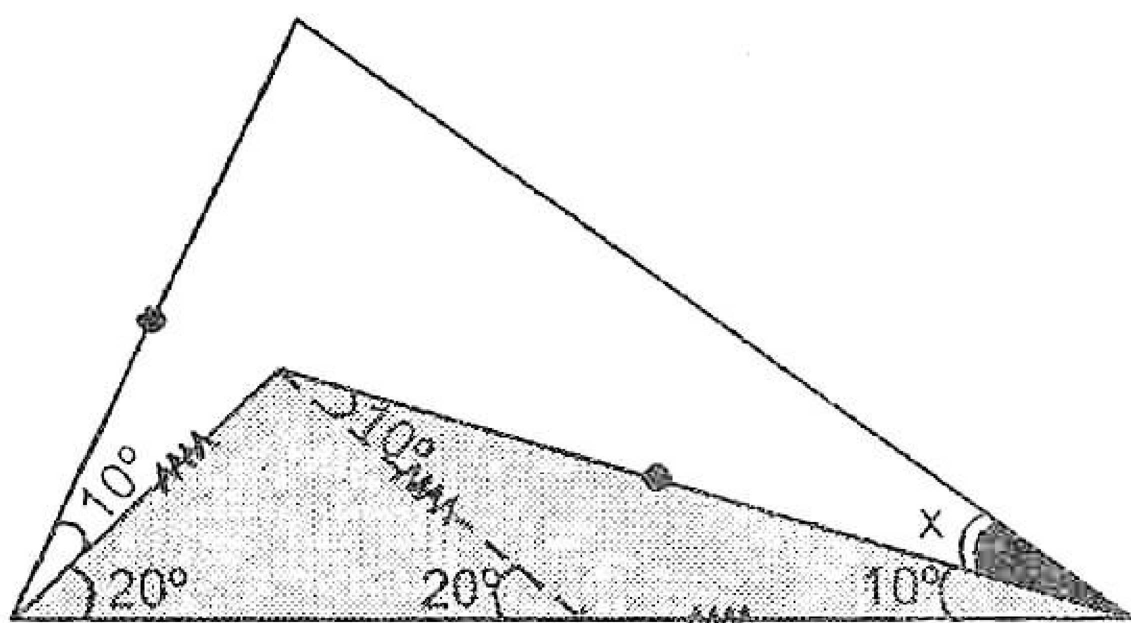
$$\therefore\ 40^\circ + 60^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$$
$$x = 40^\circ$$

Solución Nº 55

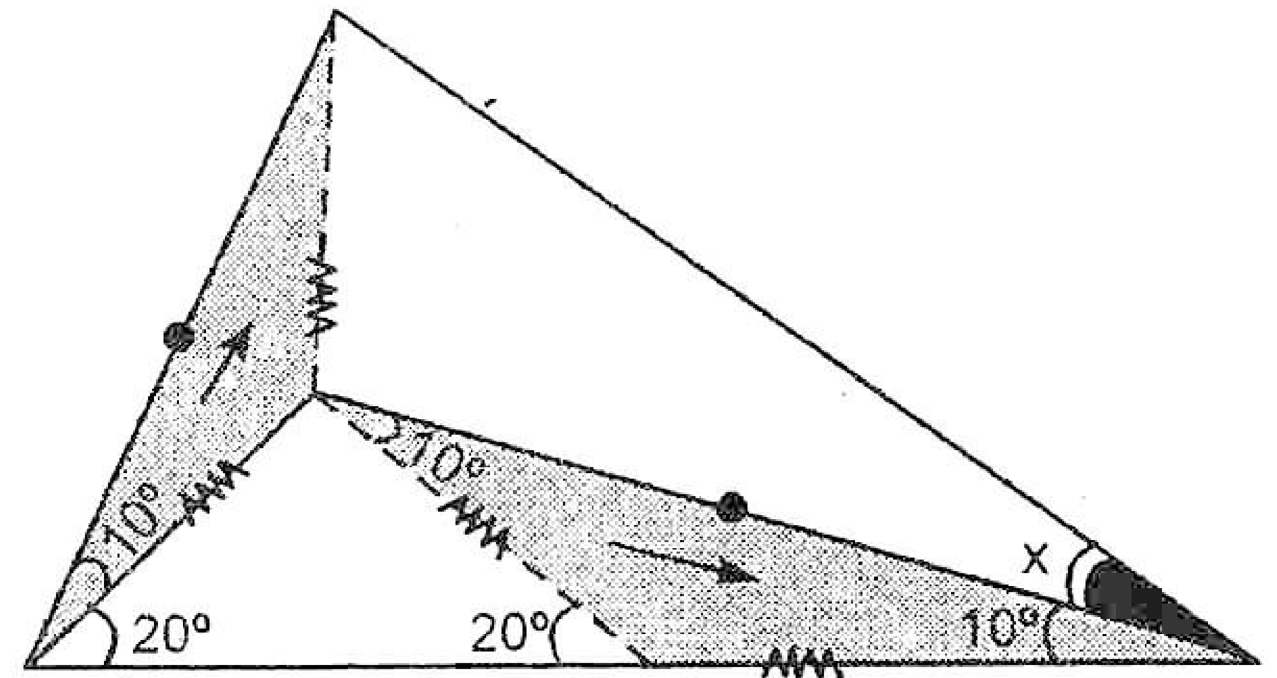
En la figura se observa:



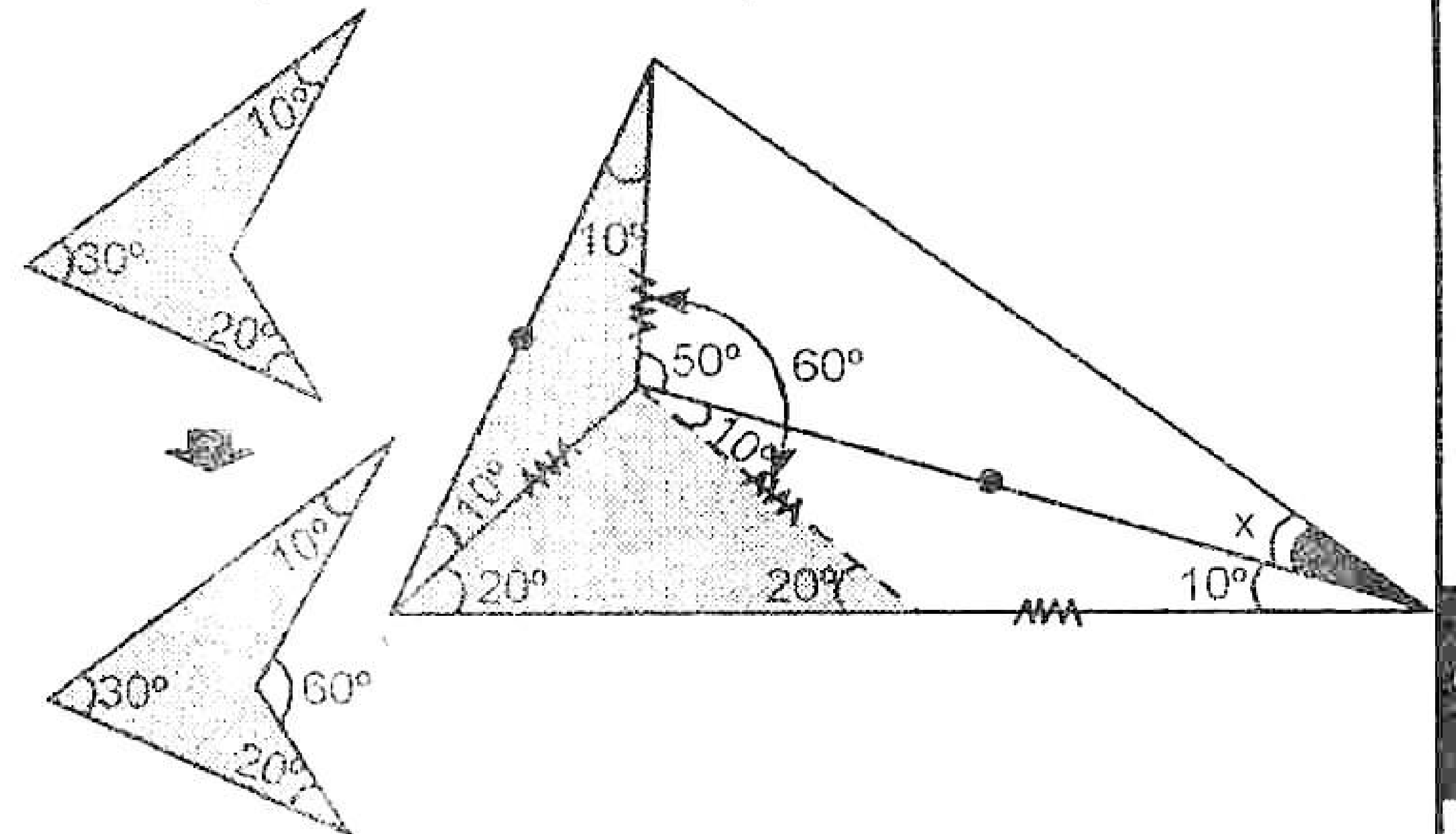
Paso Nº 1:
Observamos en un triángulo ángulos en la relación de uno a dos (Primer criterio de construcción)



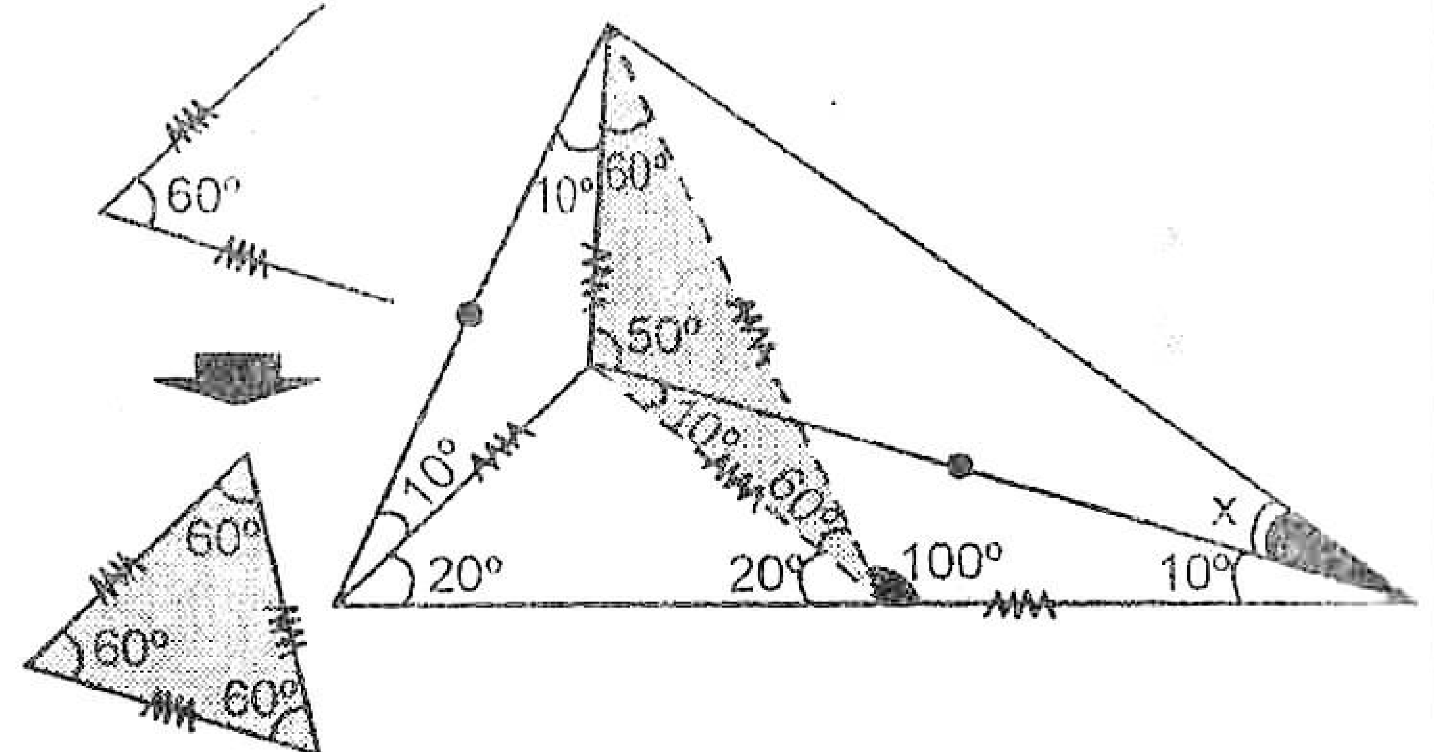
Paso Nº 2:
Con el trazo realizado se ha generado dos triángulos que son congruentes, caso (lado-ángulo-lado)



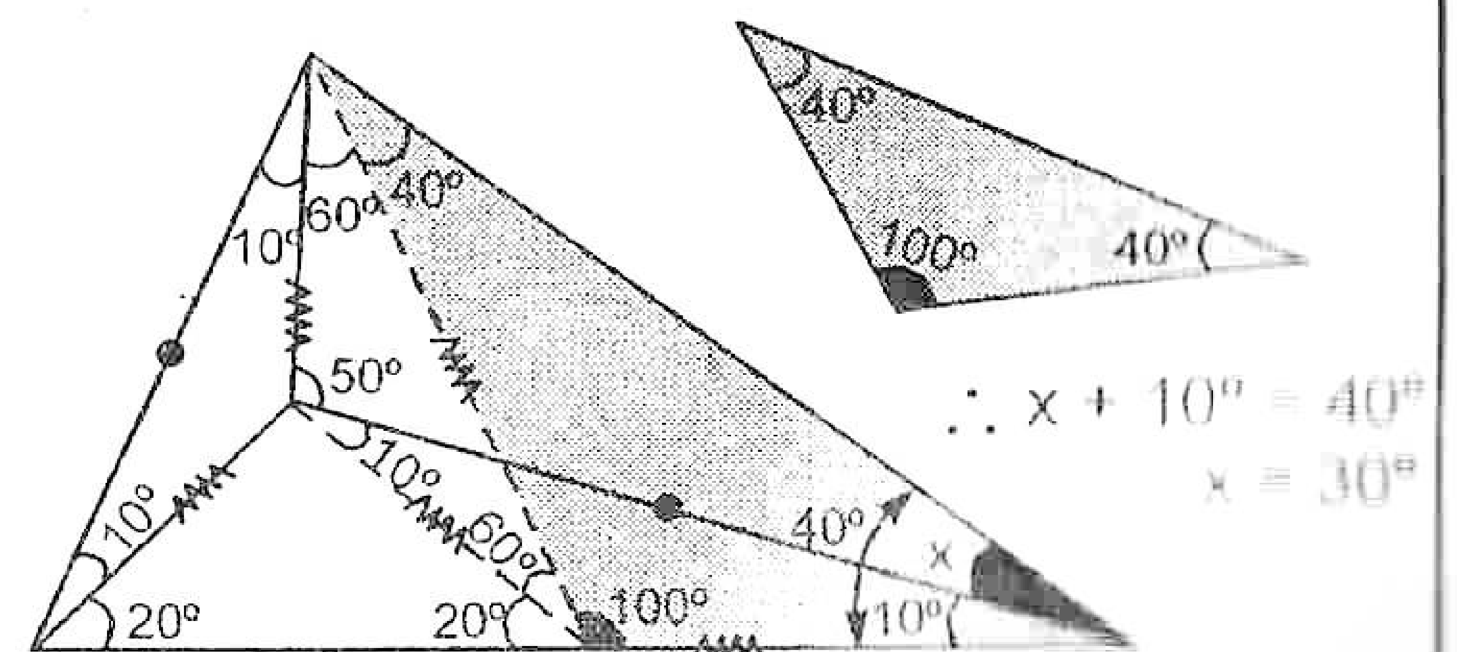
Paso Nº 3:
Se observa que se tiene un cuadrilatero cóncavo, donde se cumple:



Paso Nº 4: En la figura se observa la siguiente propiedad:



Paso Nº 5: Ahora, tenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

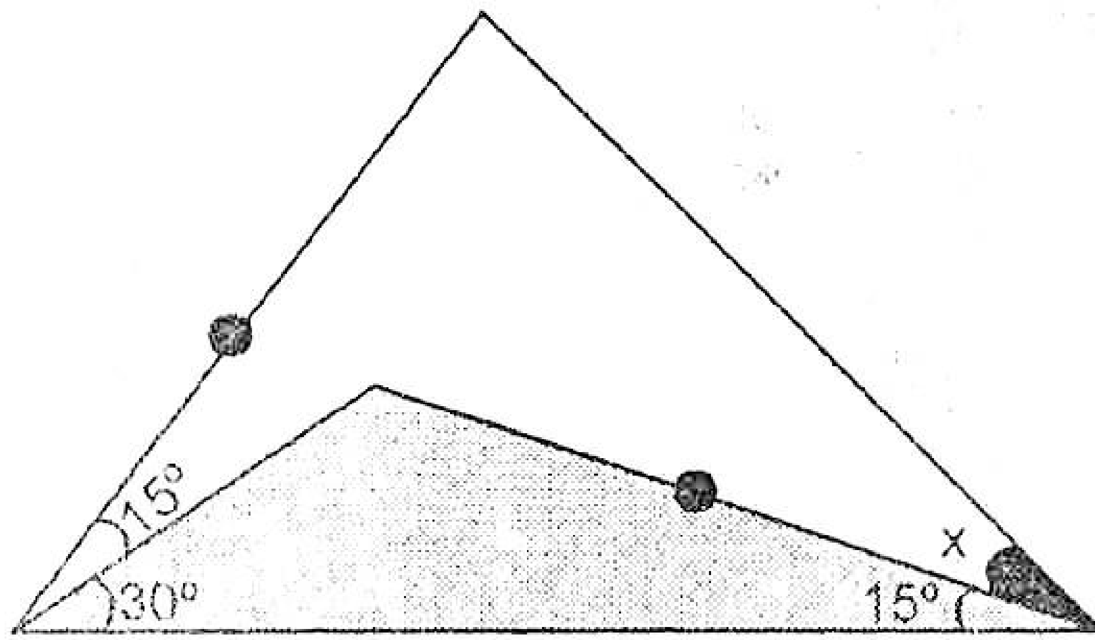


$$\therefore\ x + 10^\circ = 40^\circ$$
$$x = 30^\circ$$

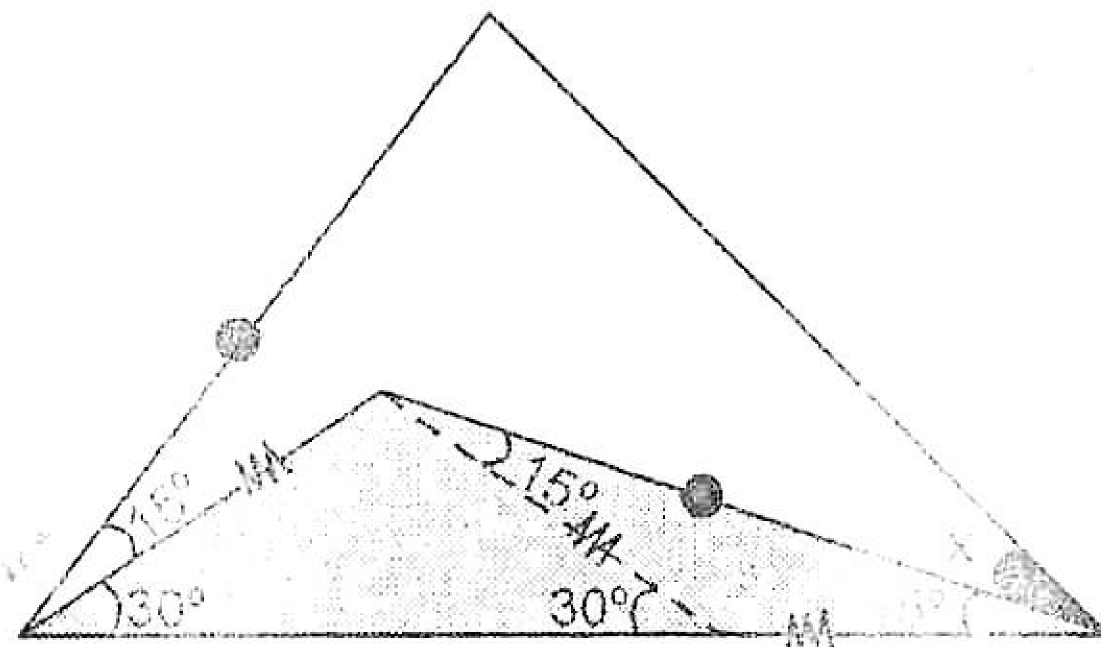
La experiencia no es lo que le sucede a un hombre. Es lo que hace un hombre con lo que le sucede (Aldous Huxley)

Solución Nº 56

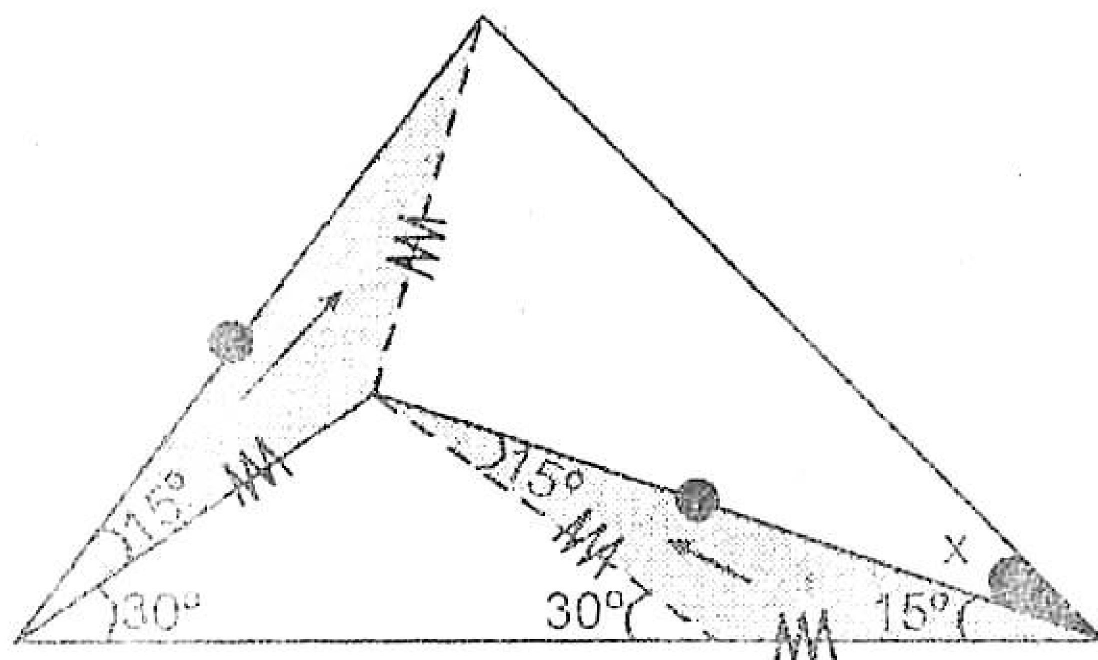
En la figura se observa:



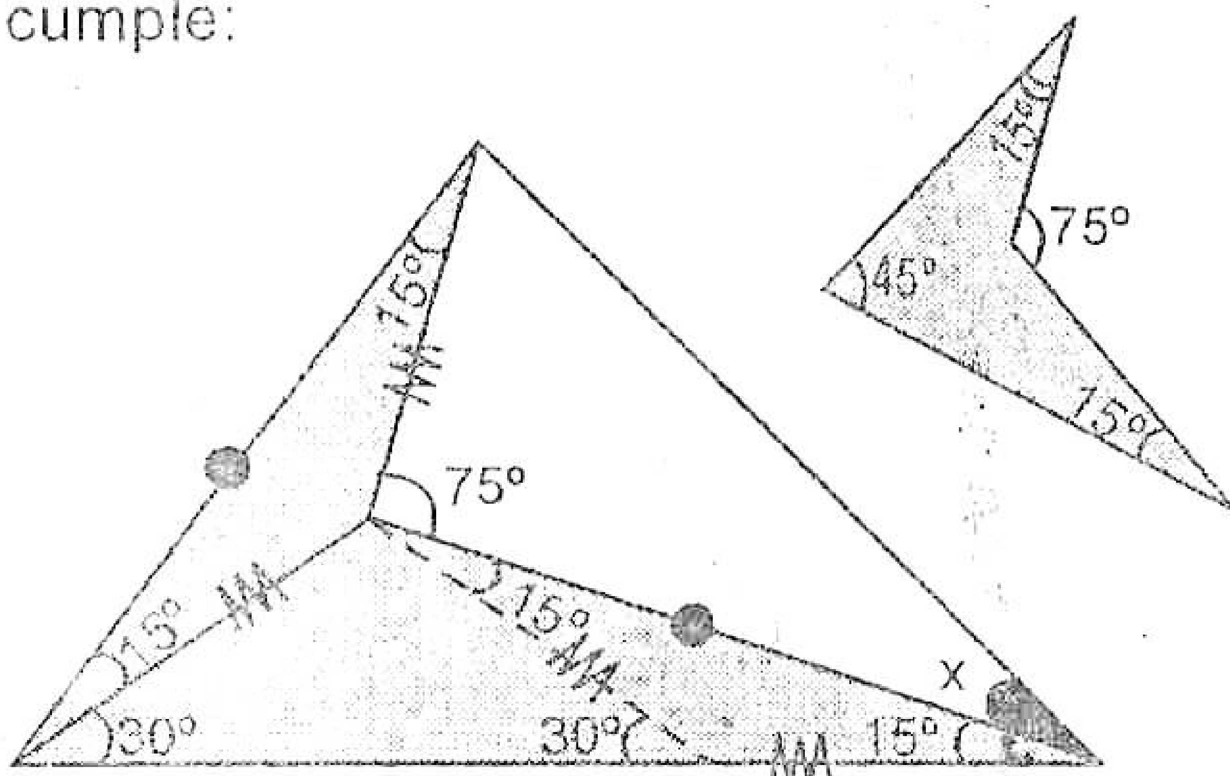
Paso Nº 1:
Observamos en el triángulo sombreado que tiene ángulos en la relación de uno a dos, entonces aplicamos el primer criterio de construcción.



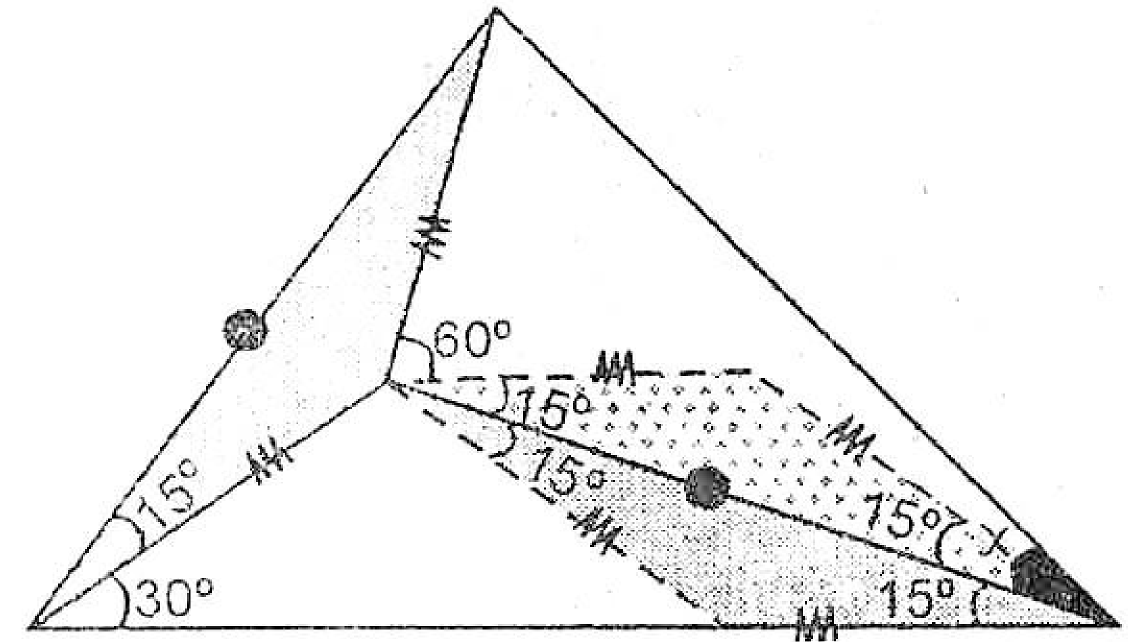
Paso Nº 2:
Con el trazo realizado se obtiene dos triángulos que son congruentes; caso (L.A.L.)



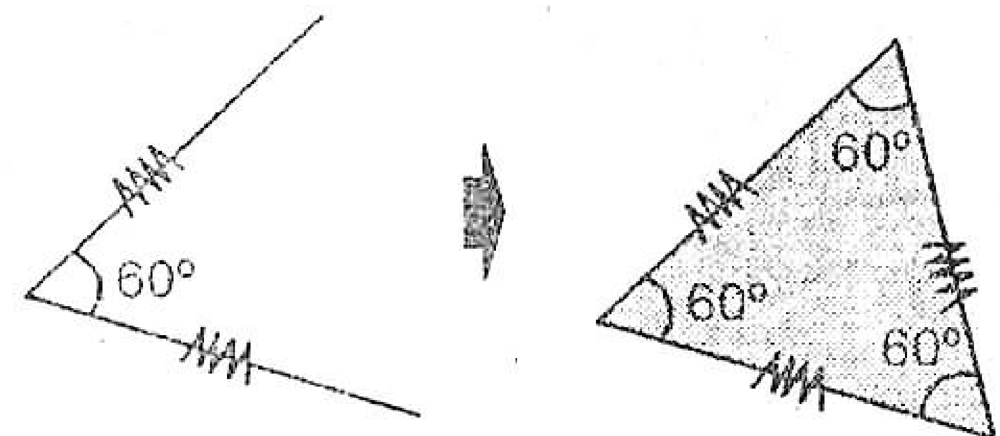
Paso Nº 3:
Ahora tenemos un cuadrilatero cóncavo donde se cumple:

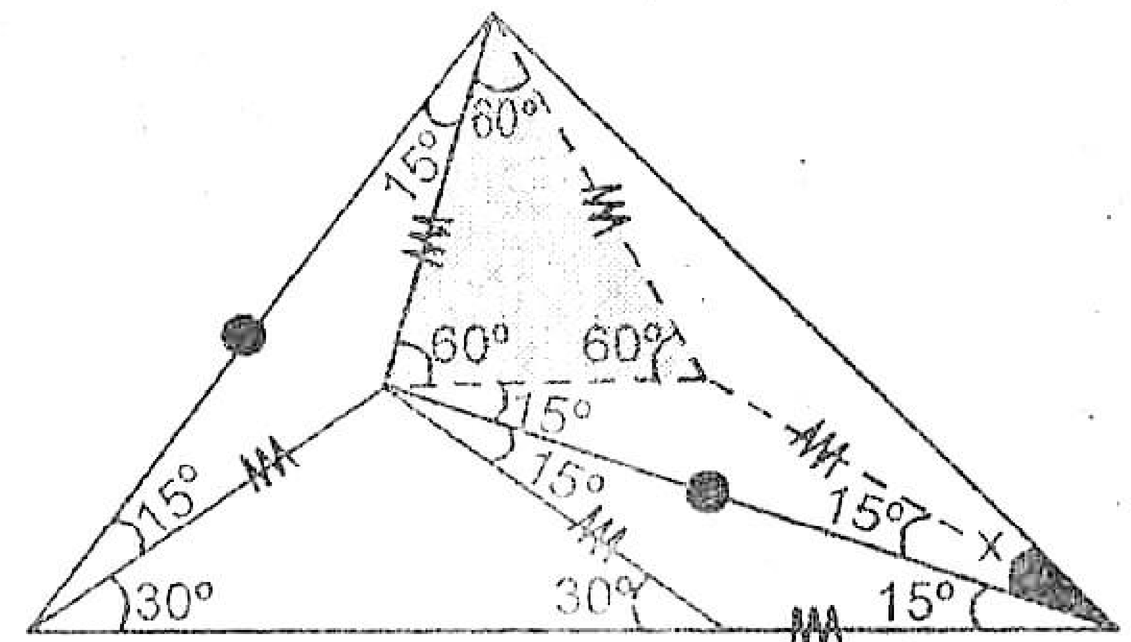


Paso Nº 4:
Luego trazamos otro triángulo congruente de la siguiente manera para así obtener lados iguales.

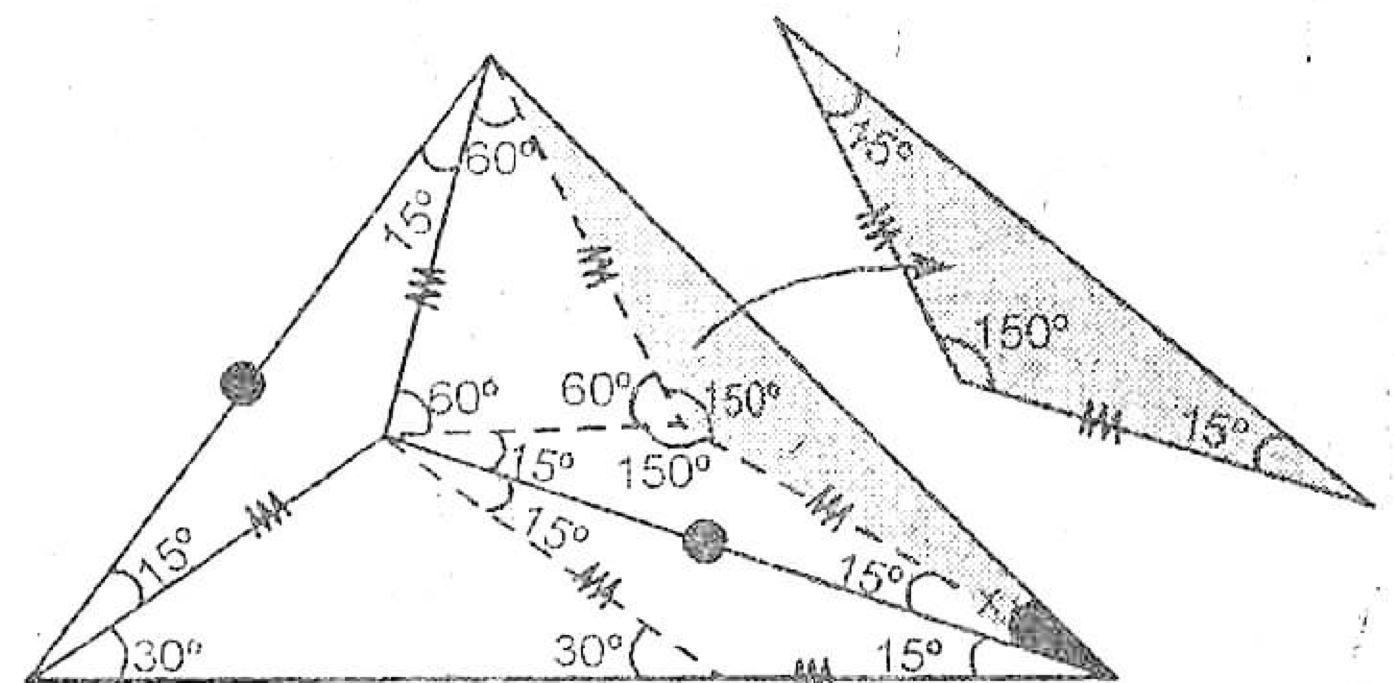


Paso Nº 5: Se observa la siguiente propiedad, donde se obtiene un triángulo equilátero.





Paso Nº 6:
Finalmente se observa que tenemos un nuevo triangulo isósceles donde se cumple:

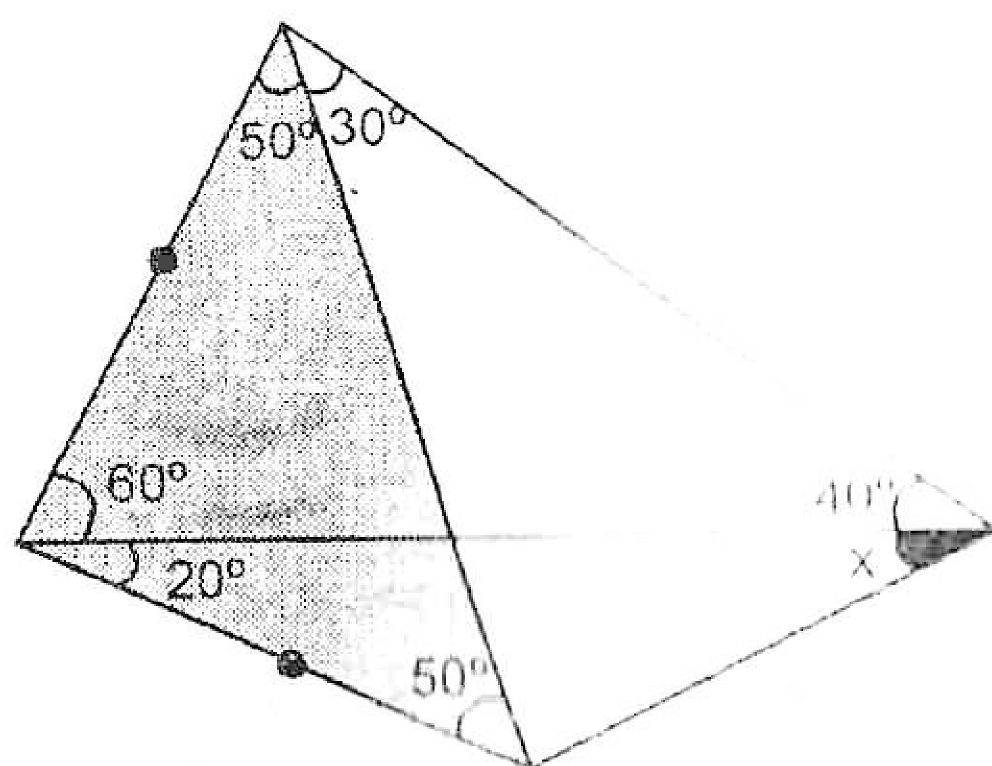


$\therefore \quad x = 15° + 15°$

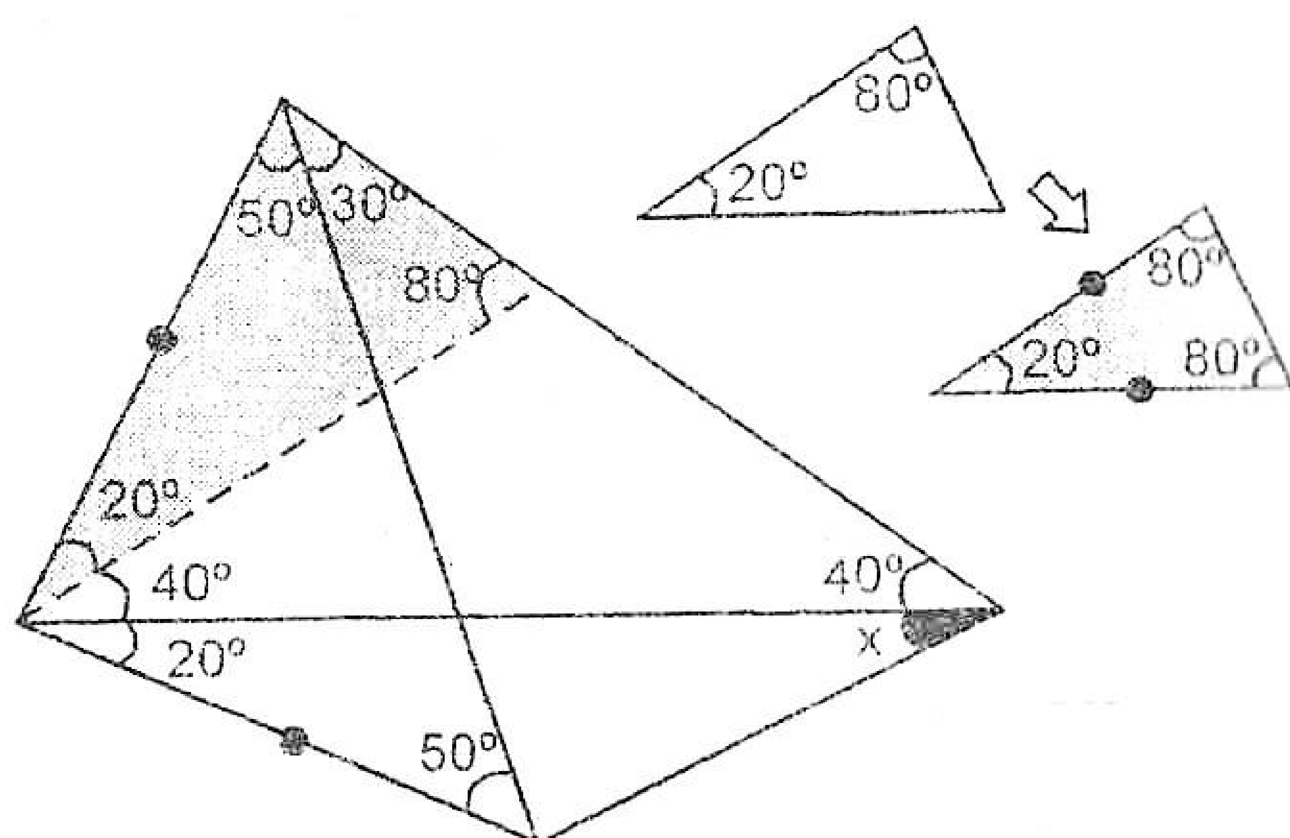
$x = 30°$

Solución Nº 57

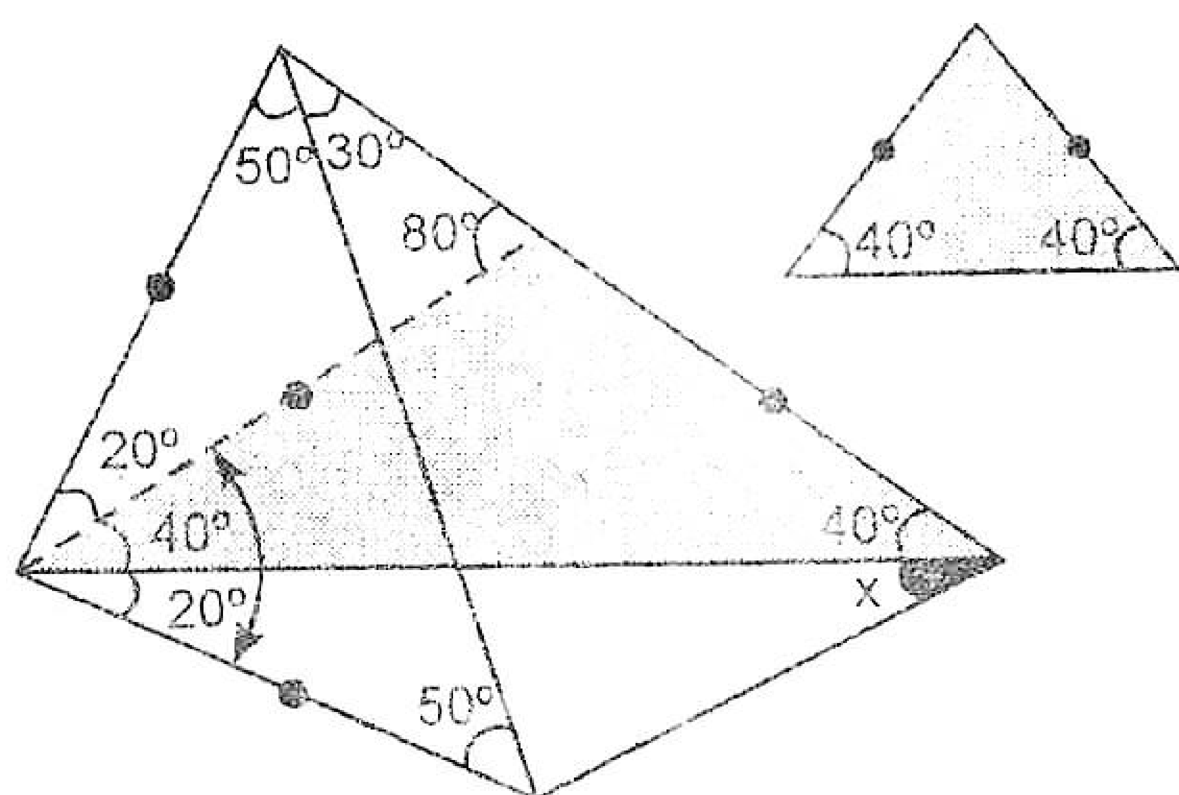
En la figura completamos los ángulos internos



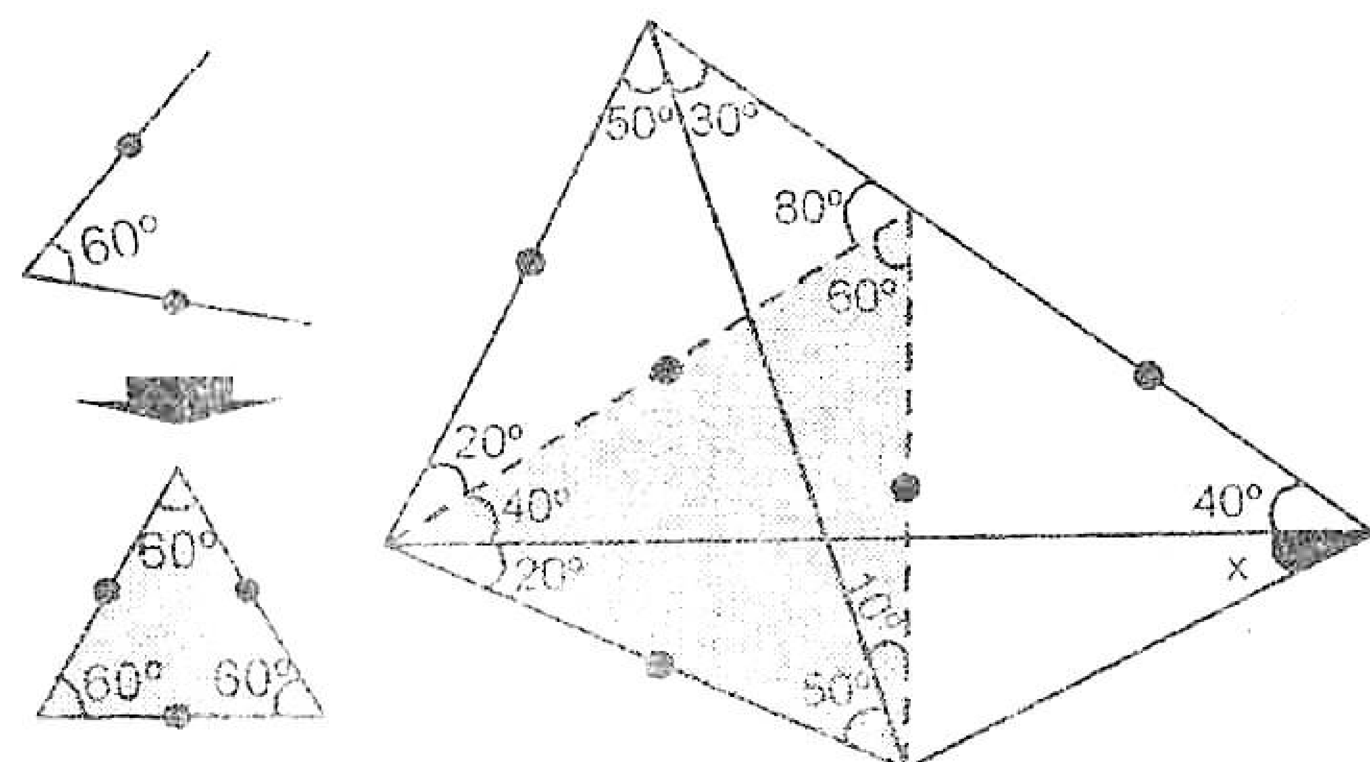
Paso Nº 1: Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.



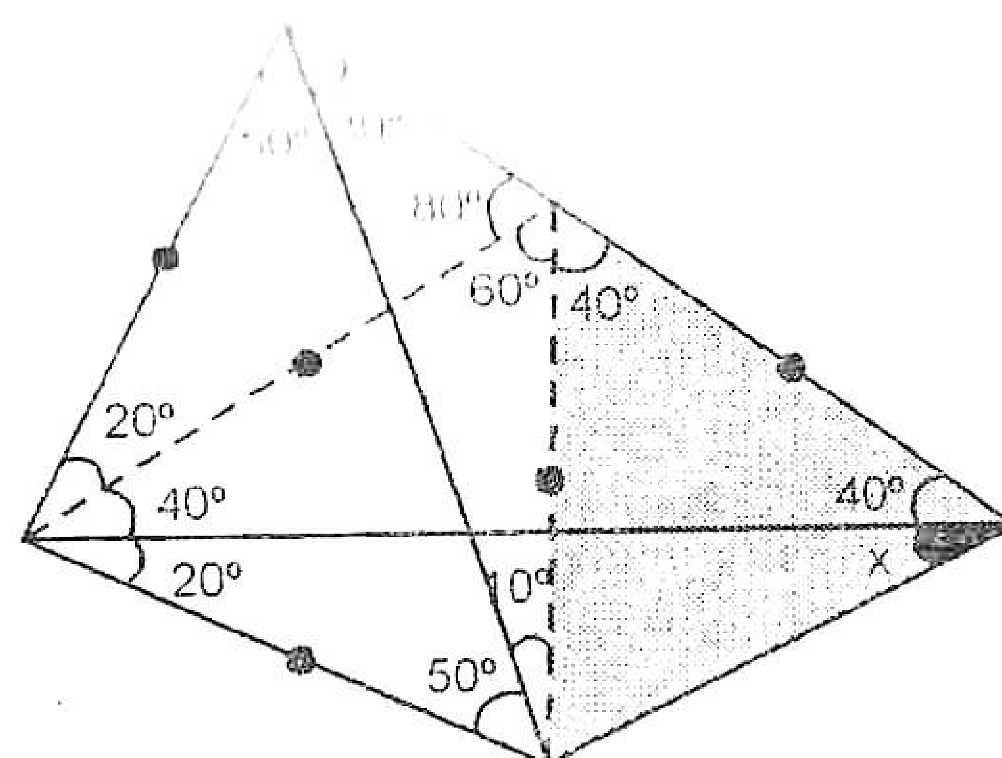
También se observa otro triángulo isósceles:

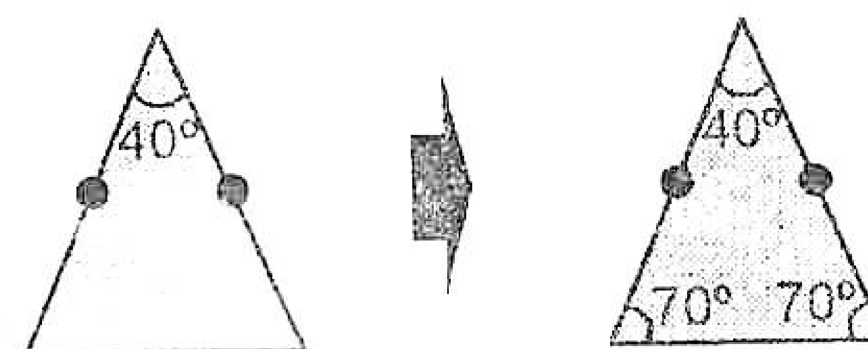


Paso Nº 2: Ahora observamos en la figura que tenemos un triángulo equilátero.



Paso Nº 3:
Luego se observa que tenemos un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:

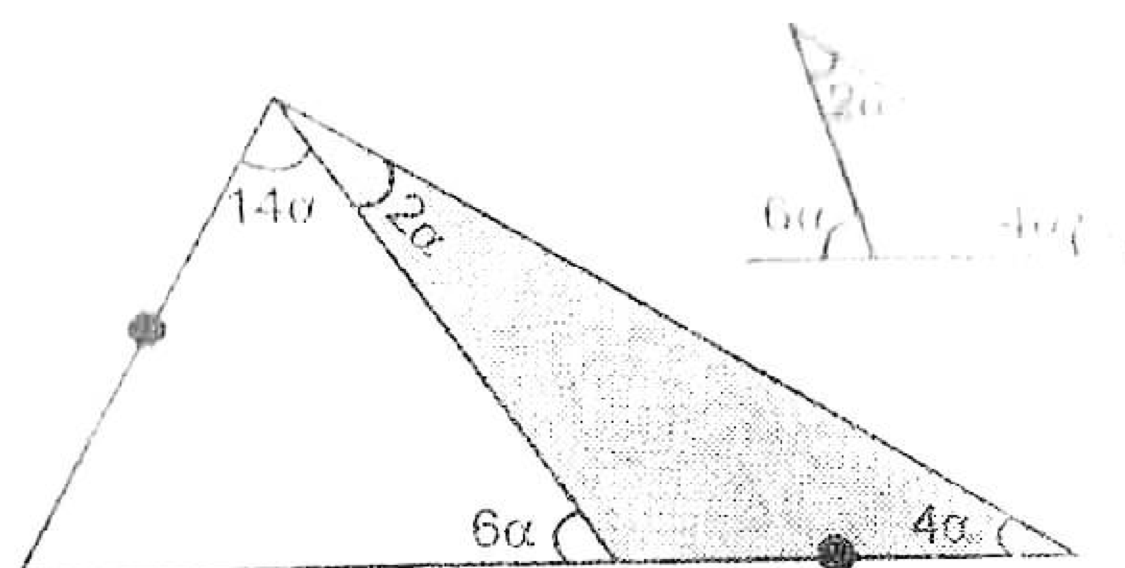




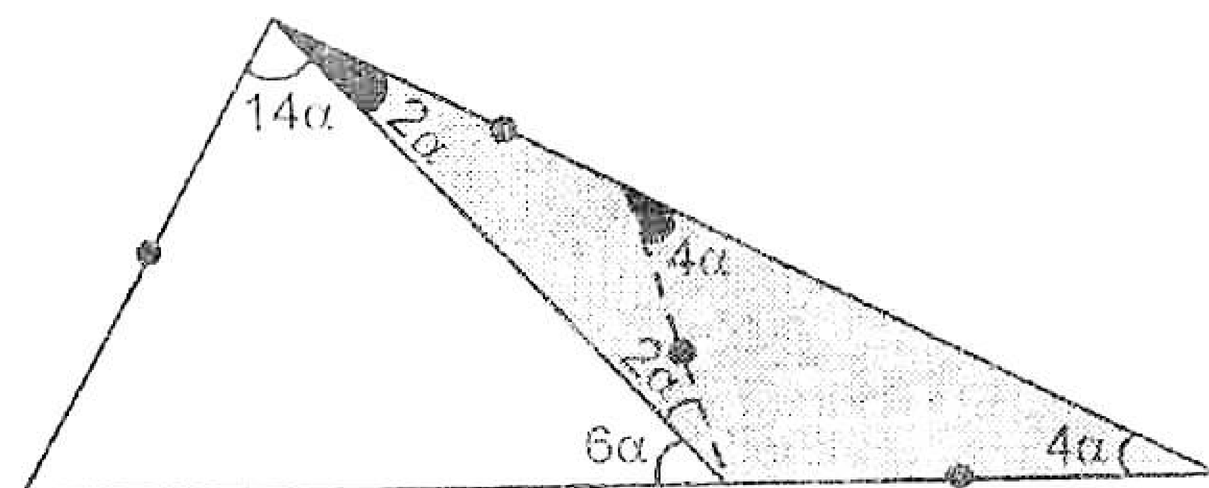
$$x + 40° = 70°$$
$$x = 30°$$

Solución Nº 58

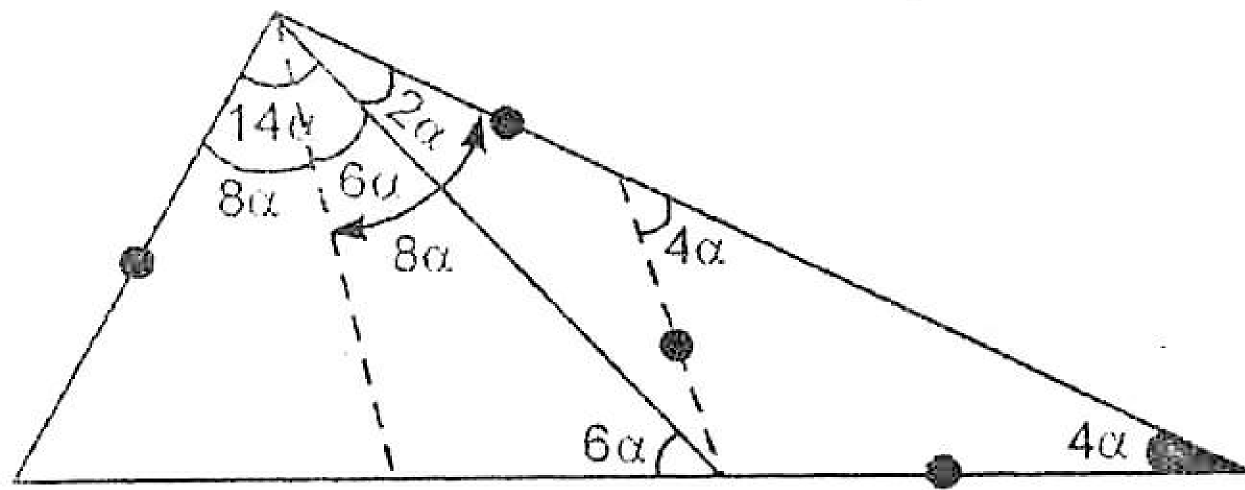
De la figura observamos



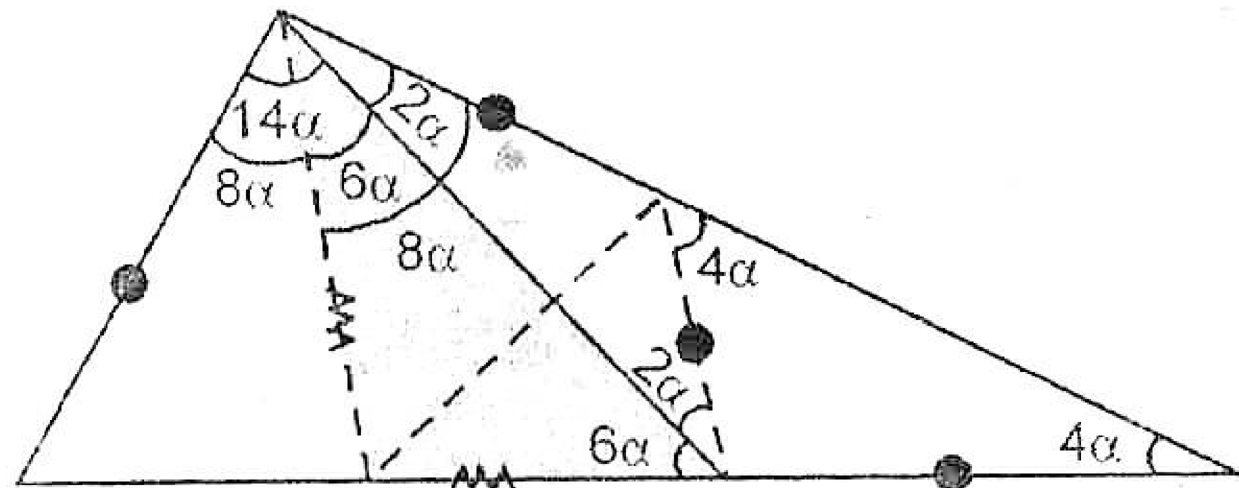
Paso Nº 1:
Tenemos un triángulo donde existe ángulos en la relación de uno a dos, entonces realizaremos el siguiente trazo.



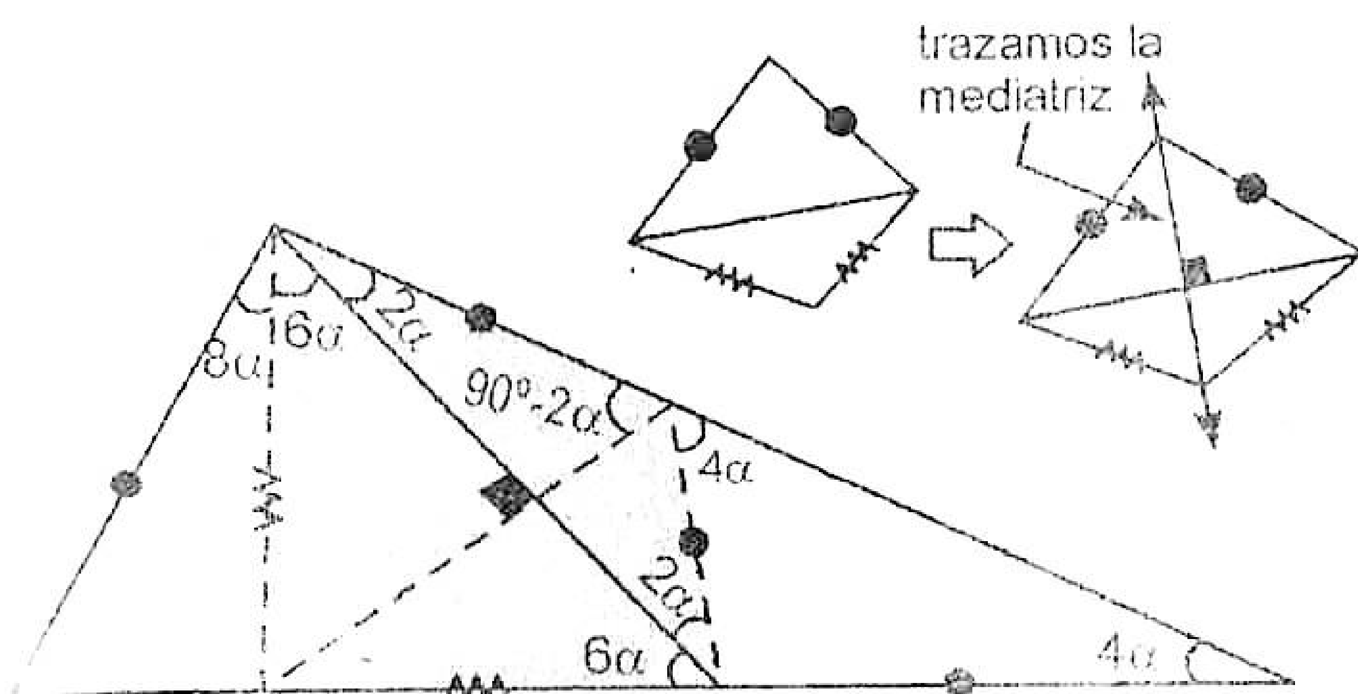
Paso Nº 2:
Se construye triángulos congruentes, para ello hacemos el siguiente trazo.



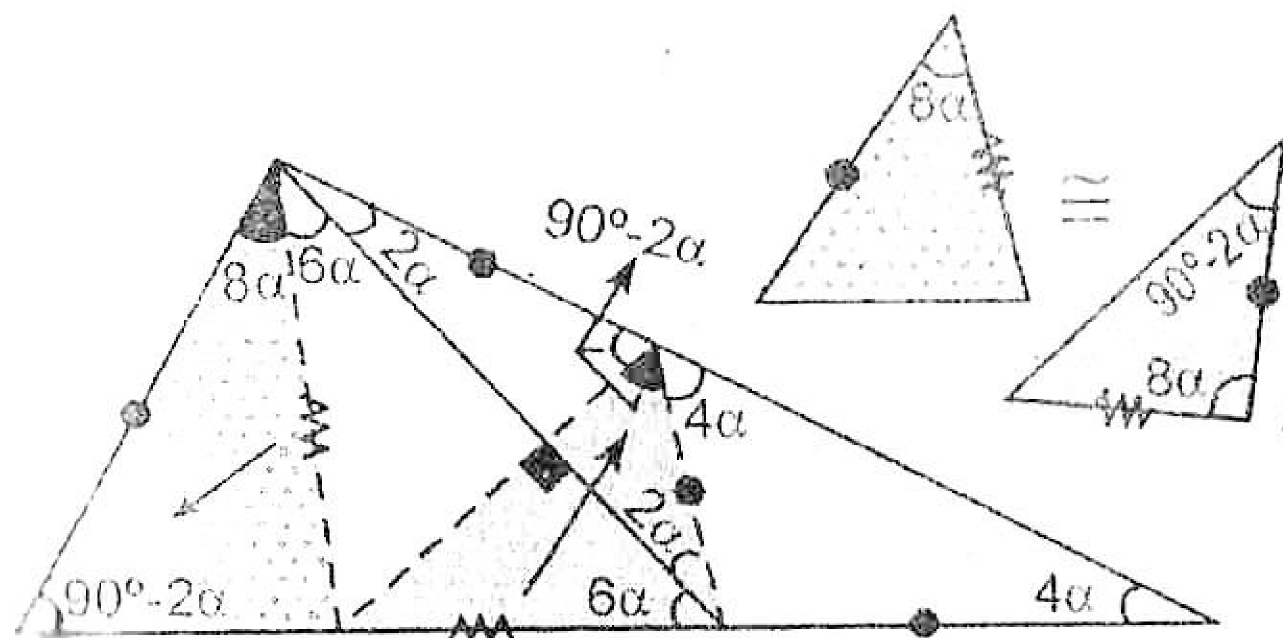
Con ello generamos triángulos isósceles:



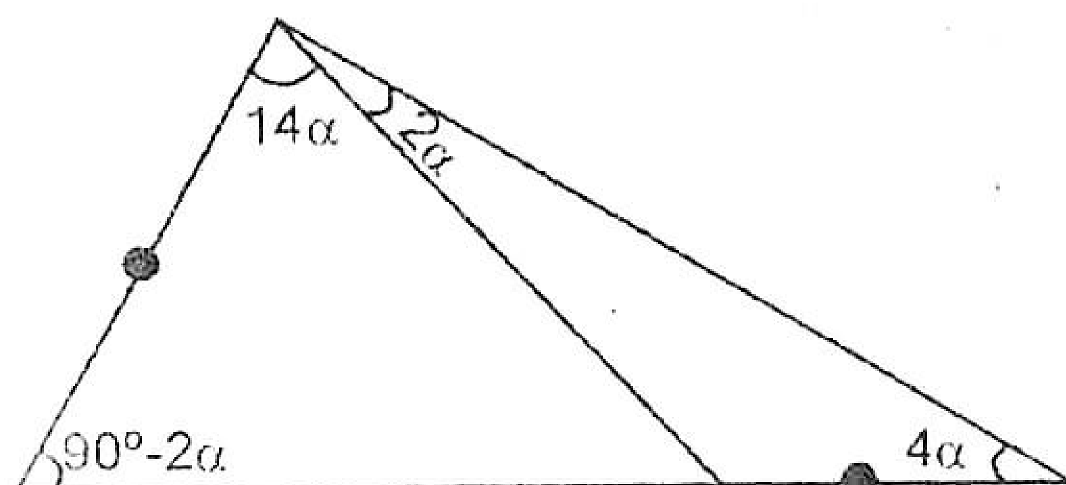
Paso N° 3:
También se cumple la propiedad de la mediatriz.



Paso N° 4: Ahora en la figura se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Luego se observa en la figura total se cumple:



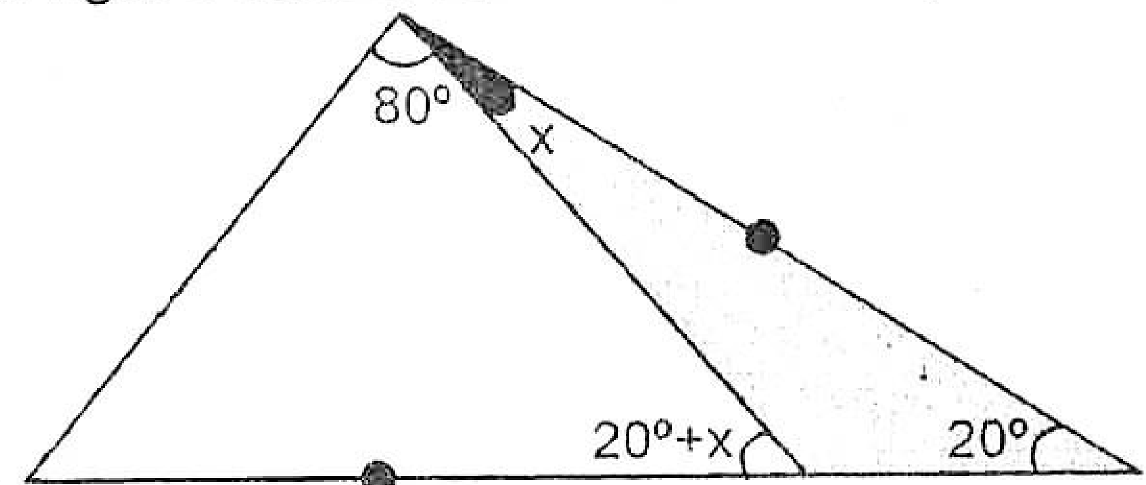
$$90^\circ - 2\alpha + 14\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$18\alpha = 90^\circ$$

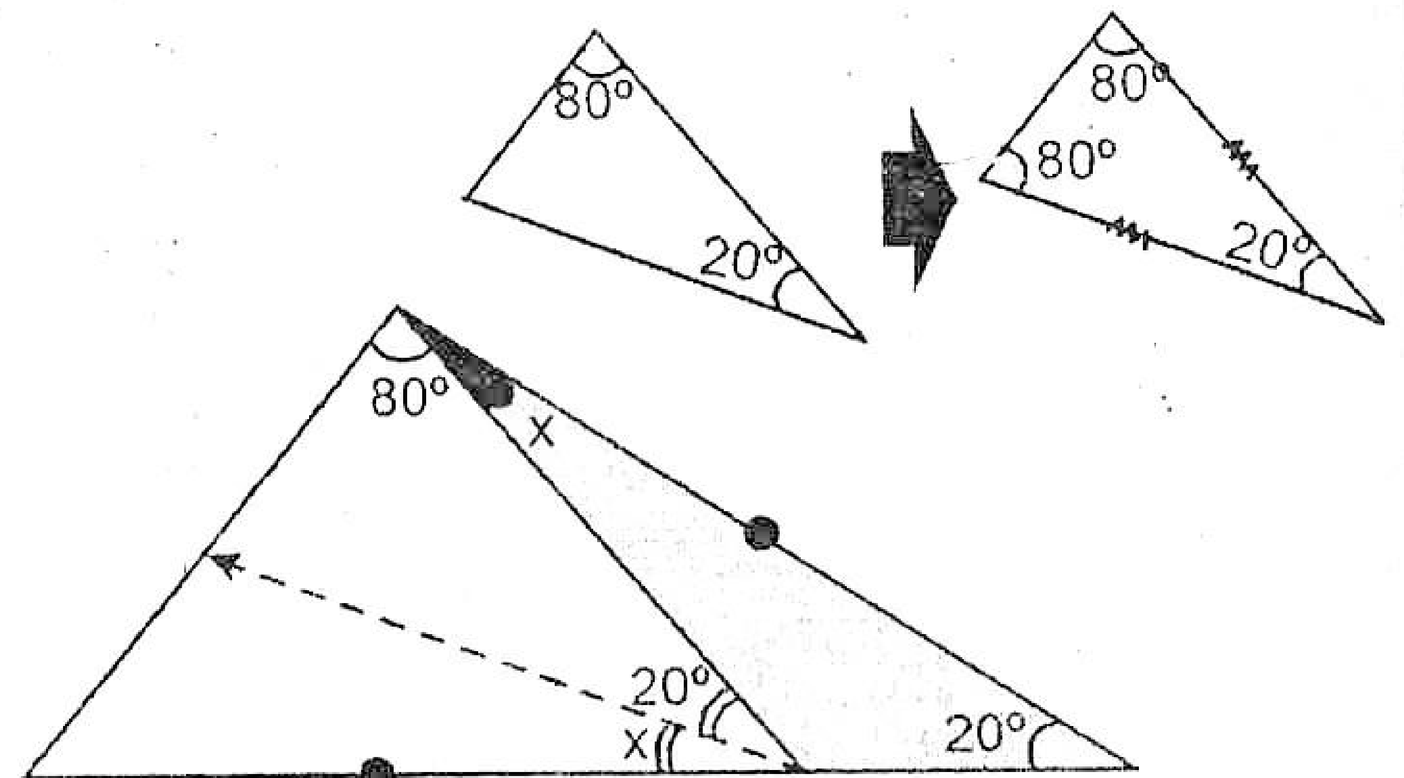
$$\alpha = 5^\circ$$

Solución N° 59

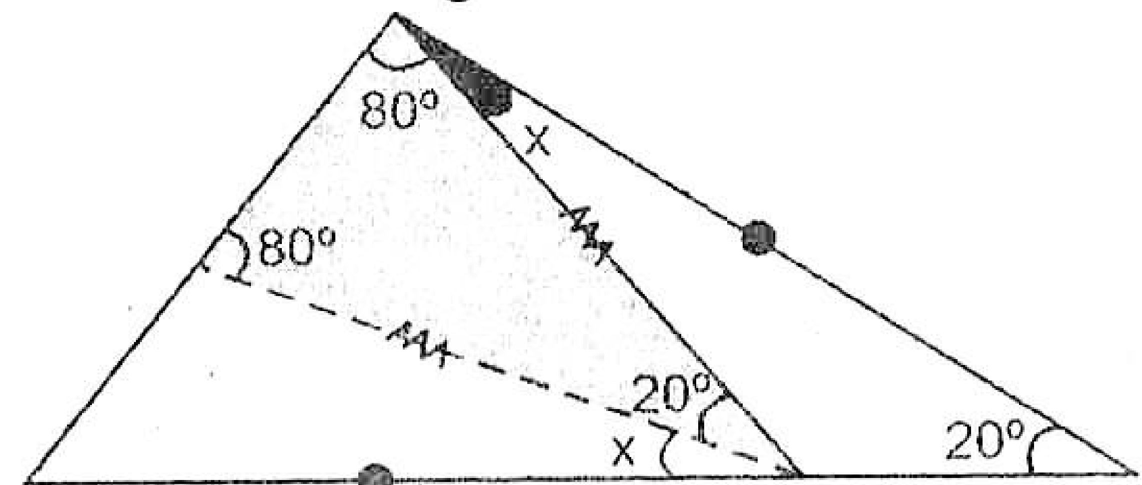
Se la figura tenemos:



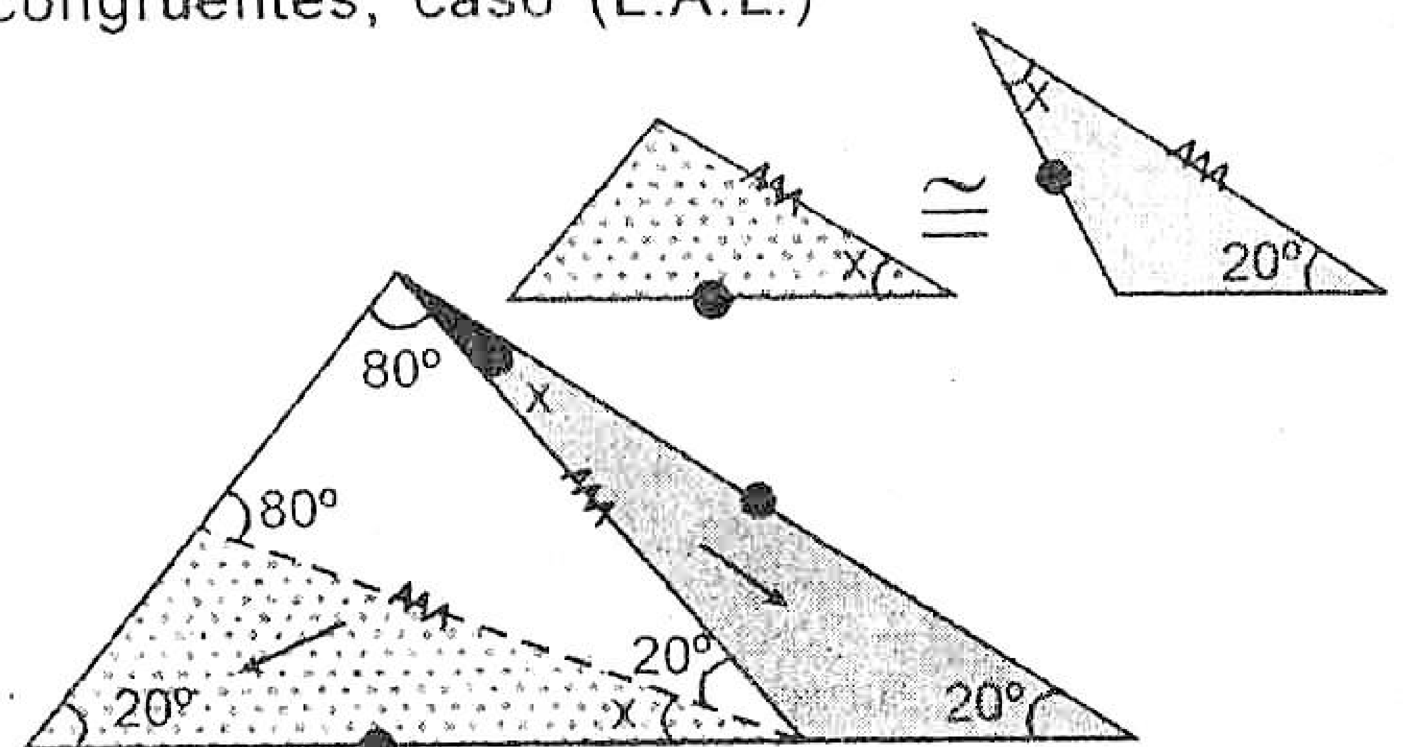
Paso N° 1: Como tenemos lados iguales en forma alternada, buscamos en la figura triángulos congruentes realizando el siguiente trazo.



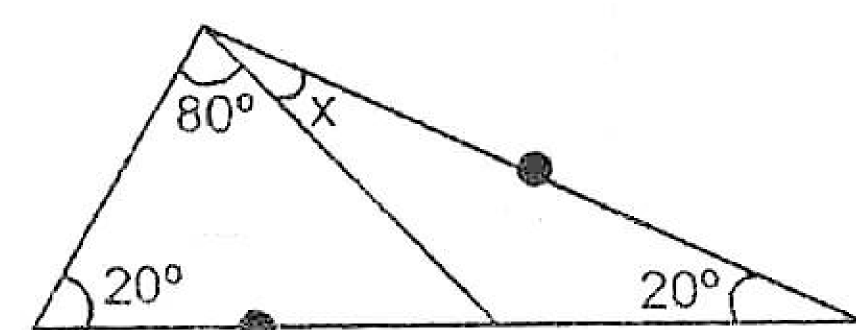
Se obtiene un triángulo isósceles:



Paso N° 2: Luego se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Paso N° 3: En la figura total, se observa:

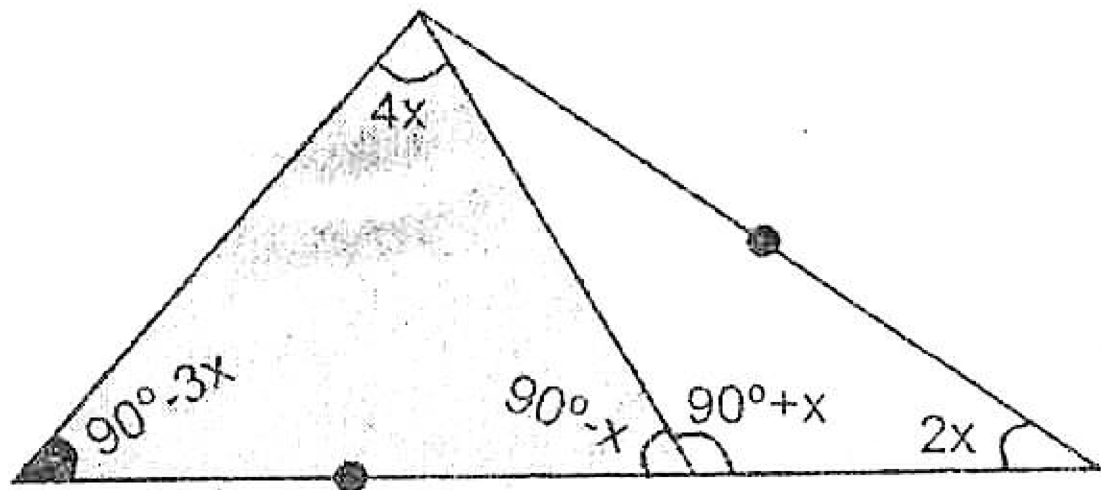


$$20^\circ + 80^\circ + x + 20^\circ = 180^\circ$$

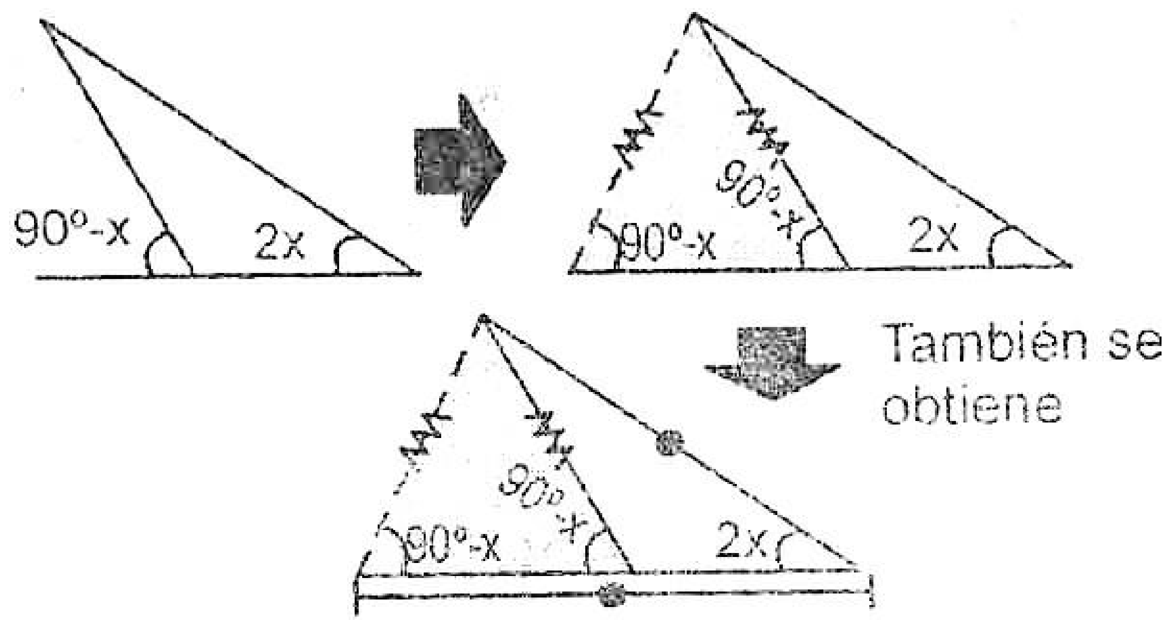
$$x = 60^\circ$$

Solución Nº 60

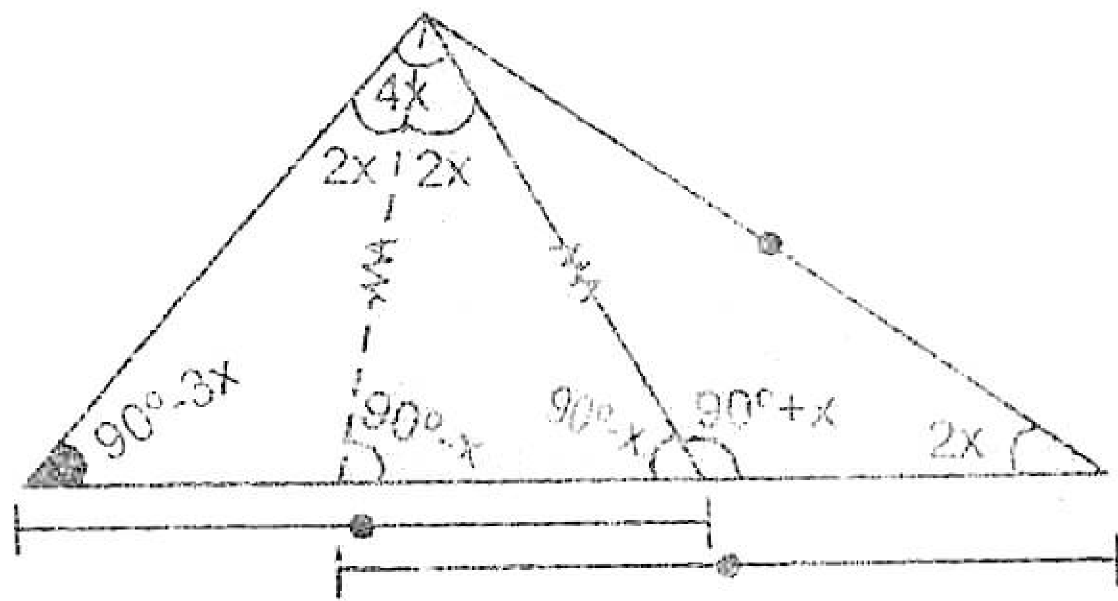
En la figura completamos los ángulos internos.



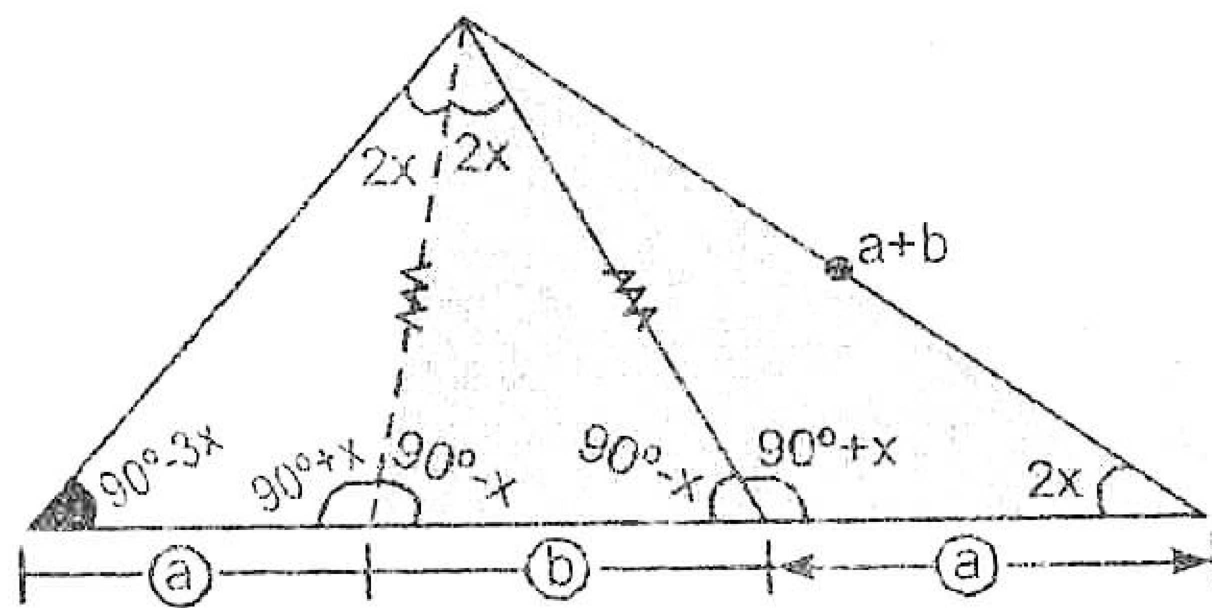
Paso Nº 1:
Como tenemos lados iguales en forma alternada, buscamos triángulos congruentes pero primero se realiza el siguiente trazo:



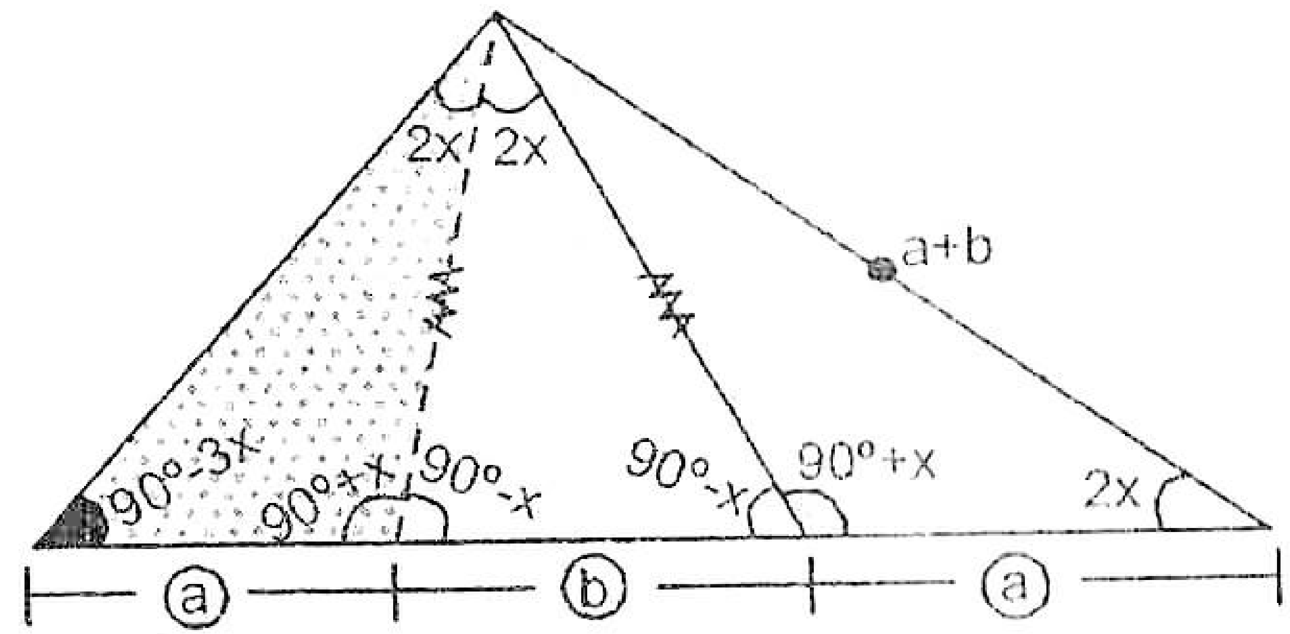
Entonces se obtiene la siguiente figura:

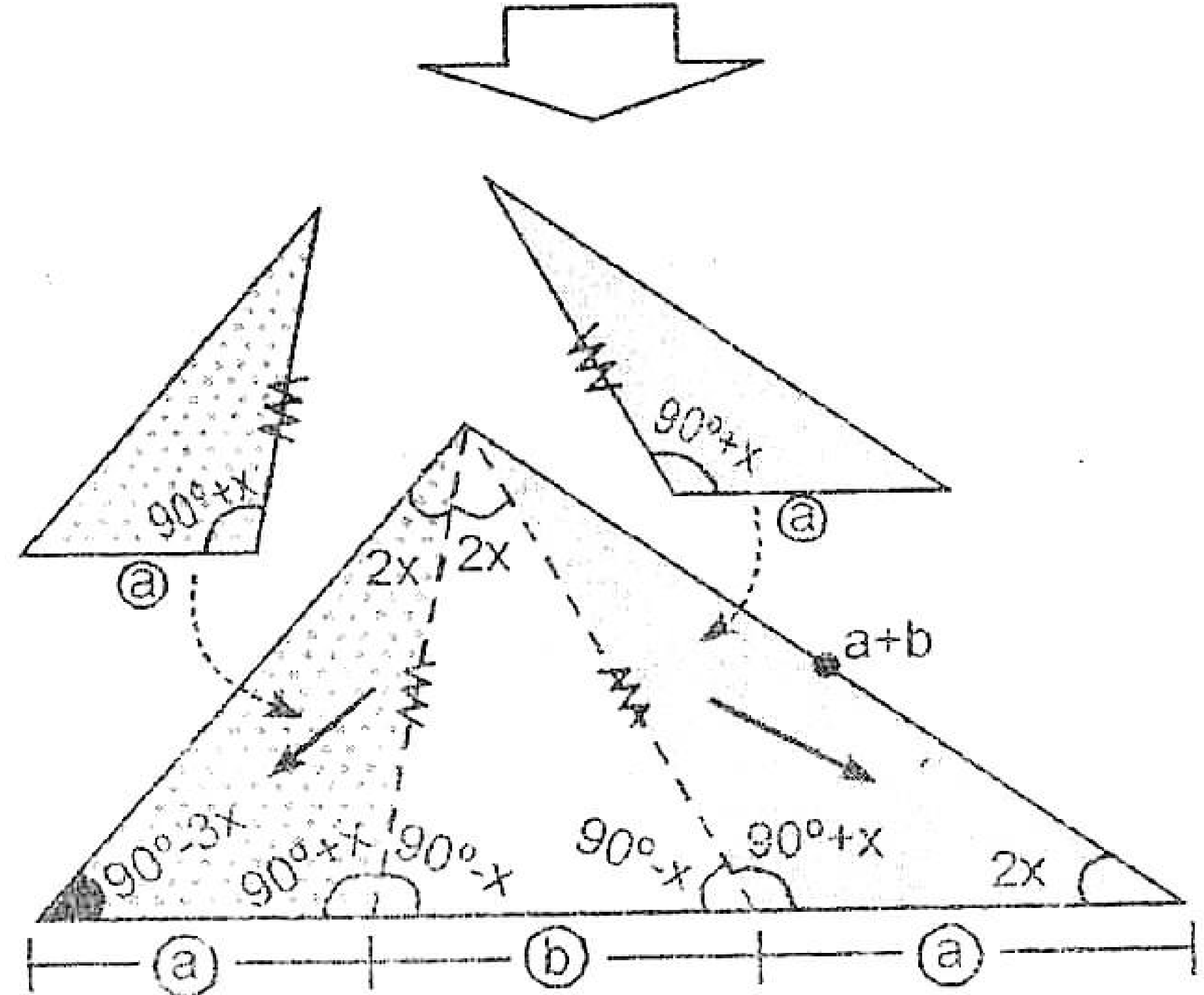


Paso Nº 2:
Identificamos los lados iguales de la figura:



Paso Nº 3:
Se obtiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L)



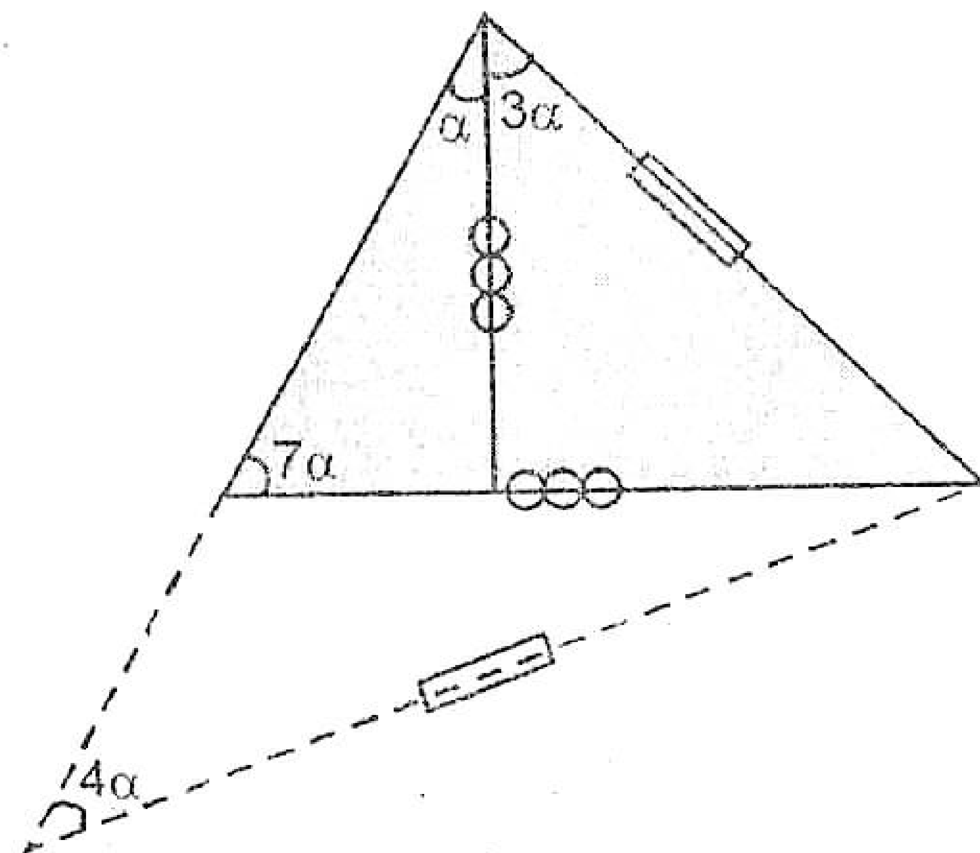


Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales"

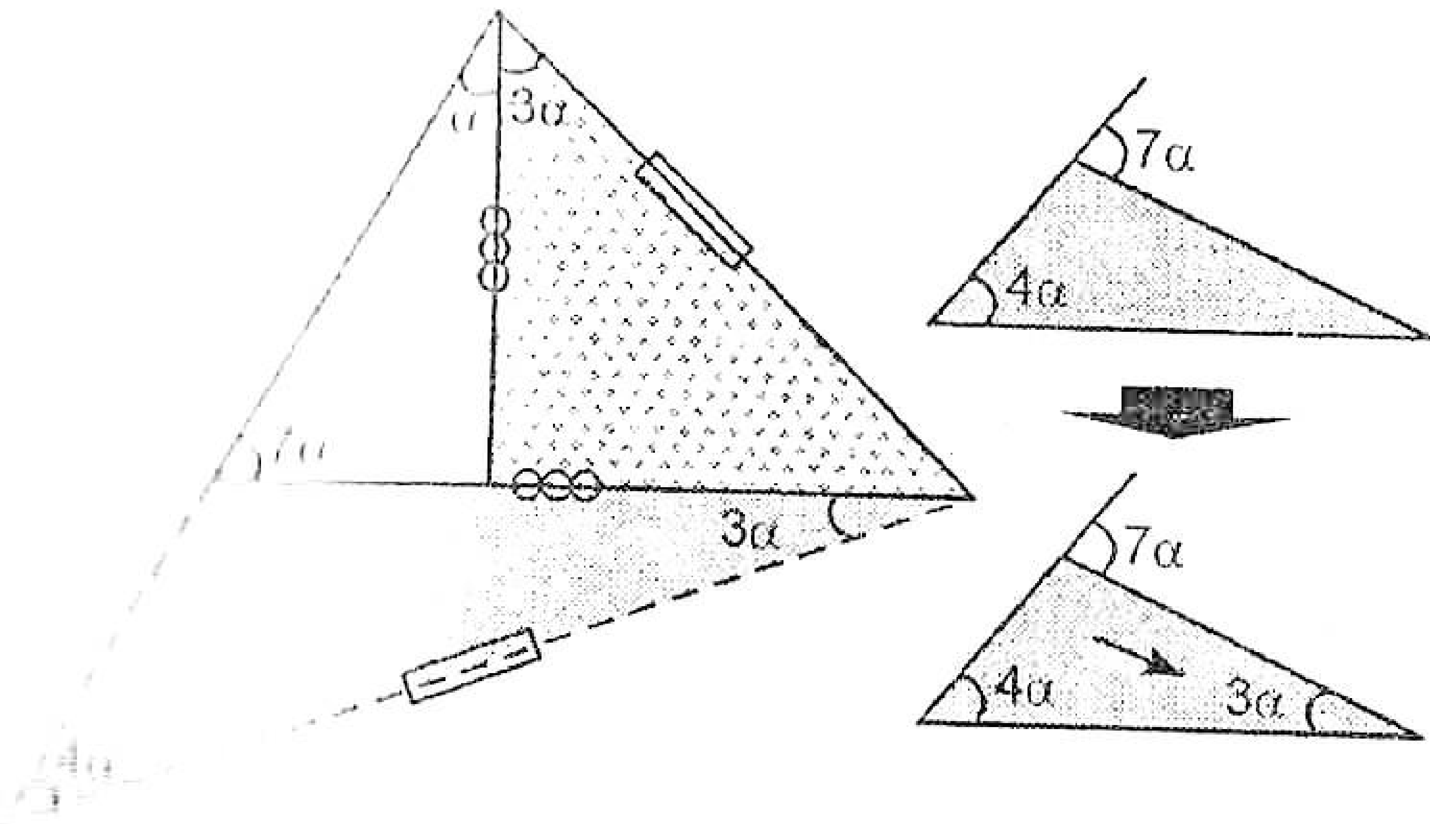
$$90° - 3x = 2x$$
$$90° = 5x$$
$$18° = x$$

Solución Nº 61

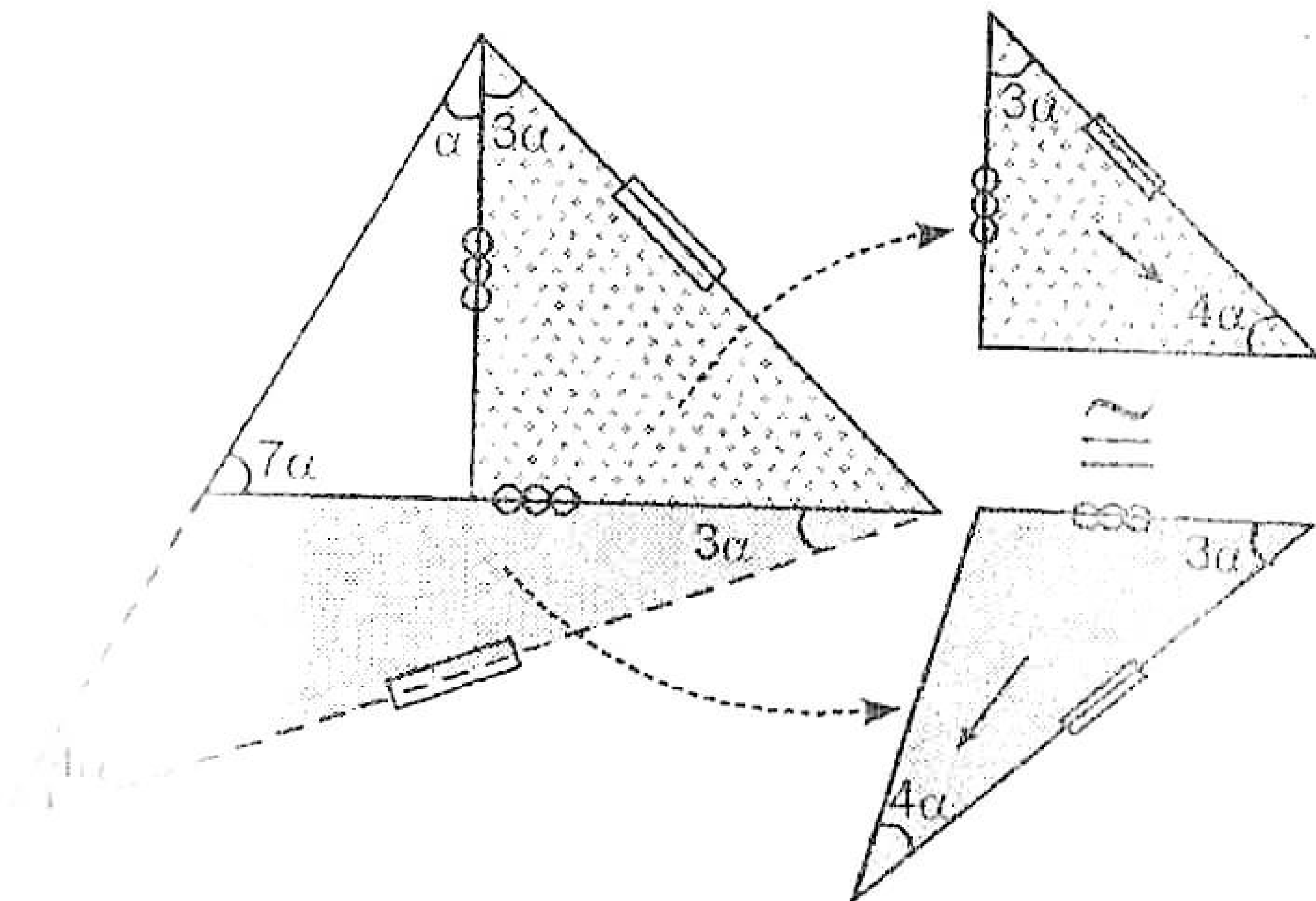
Paso Nº 1: Aquí realizamos el siguiente trazo; Formamos un triángulo isósceles para obtener lados iguales de las siguiente manera: Aplicando el quinto criterio de construcción:



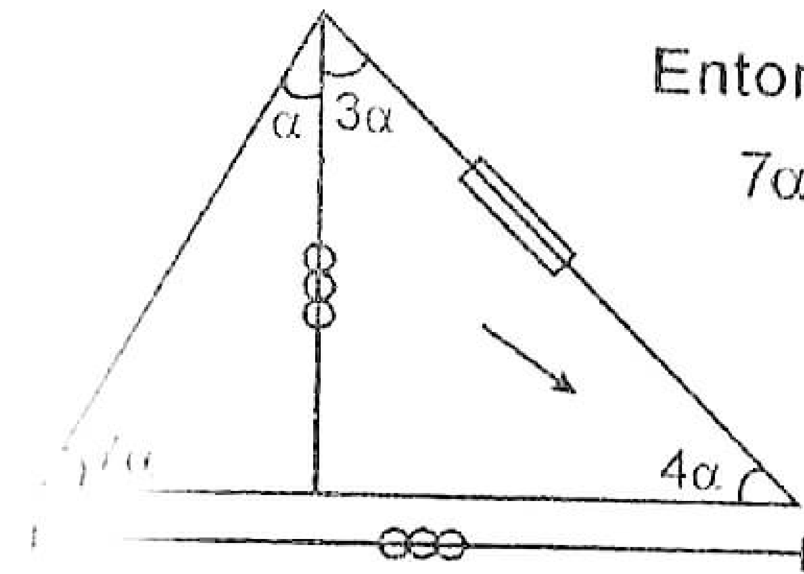
También se observa:



Paso N° 2: Ahora se observa que se ha obtenido dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Paso N° 3:
Por principio de congruencia "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



Entonces se cumple:

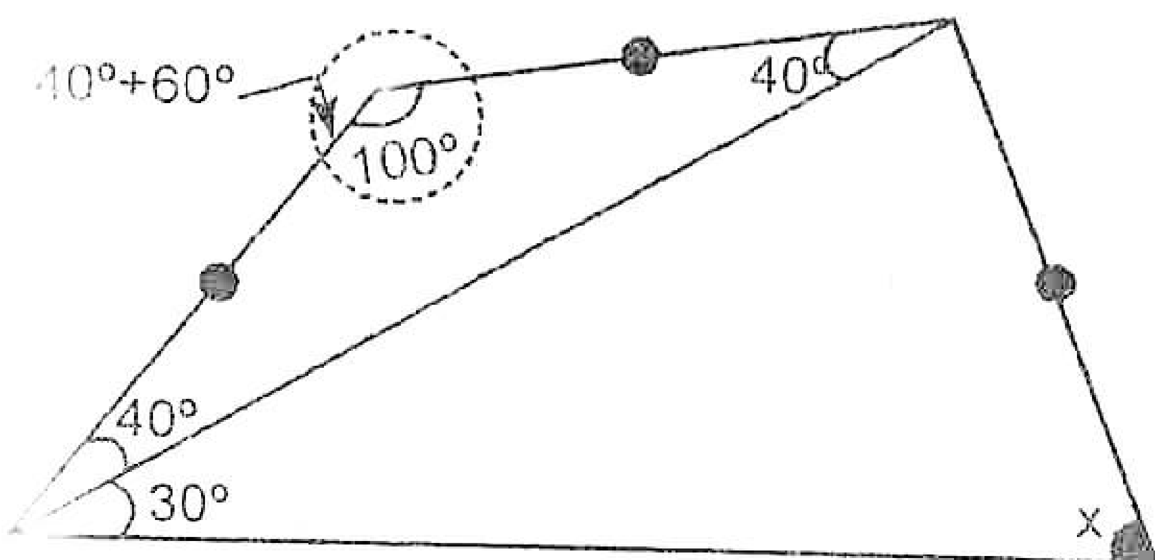
$$7\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$$

$$15\alpha = 180°$$

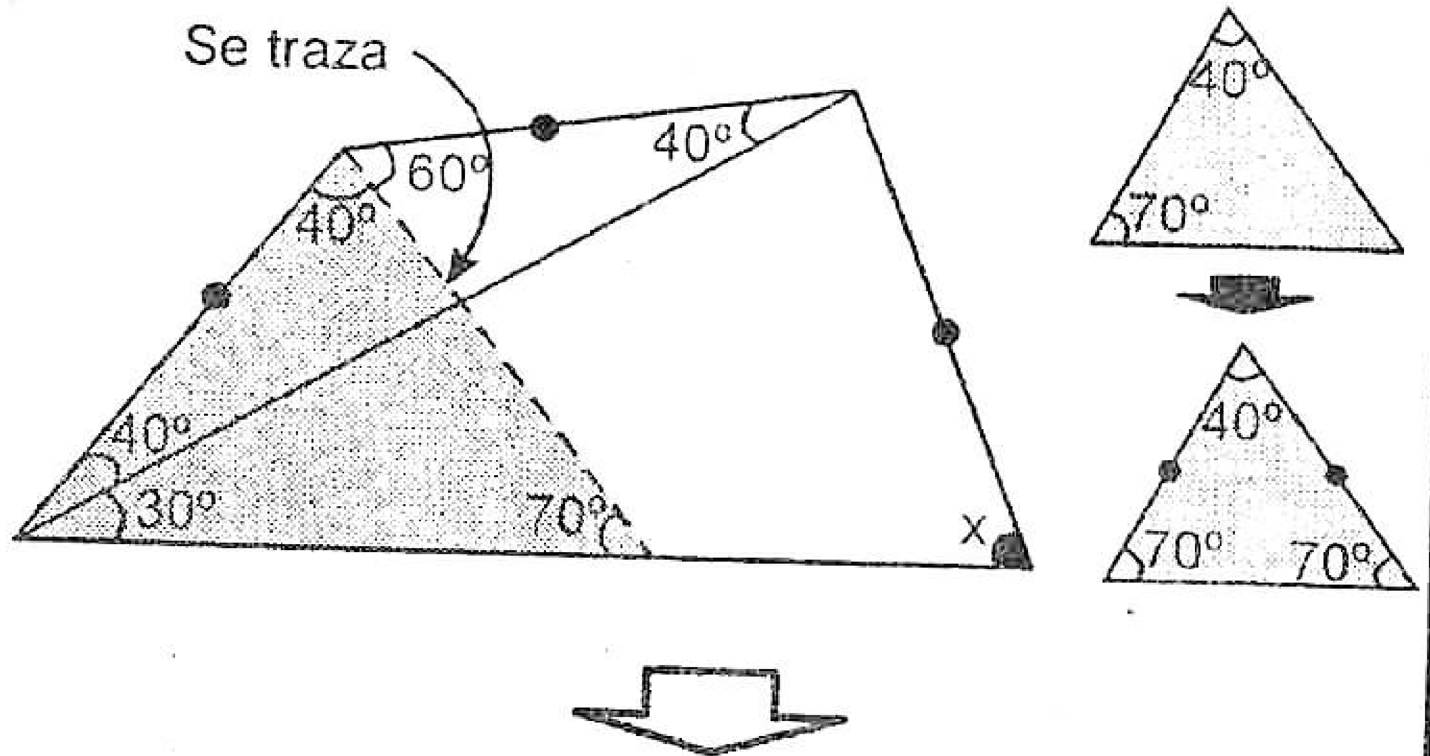
$$\alpha = 12°$$

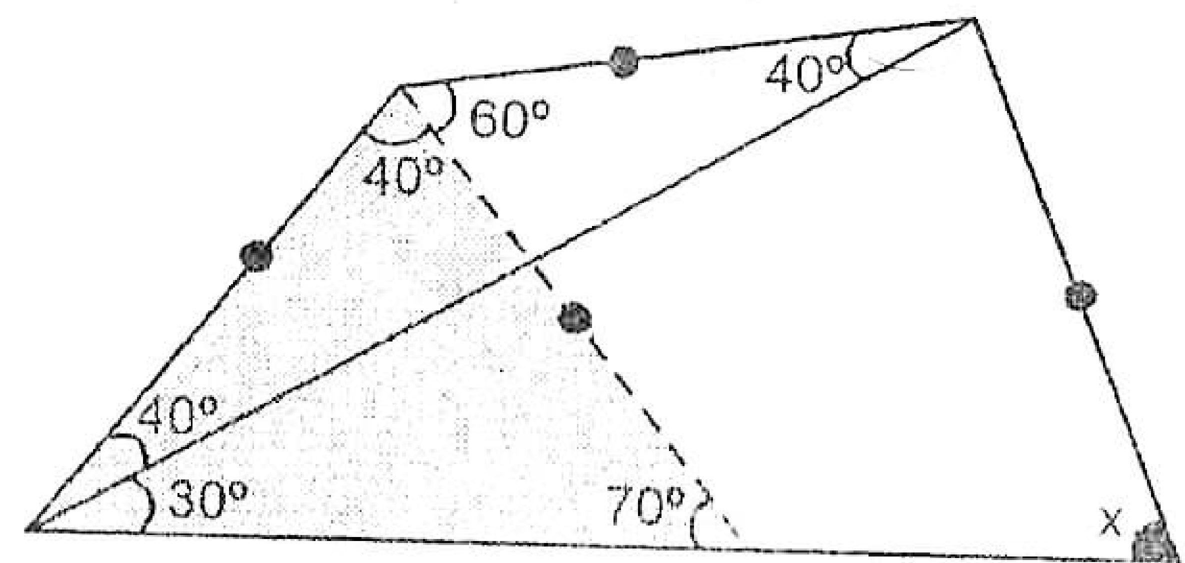
Solución Nº 62

De la figura, tenemos:

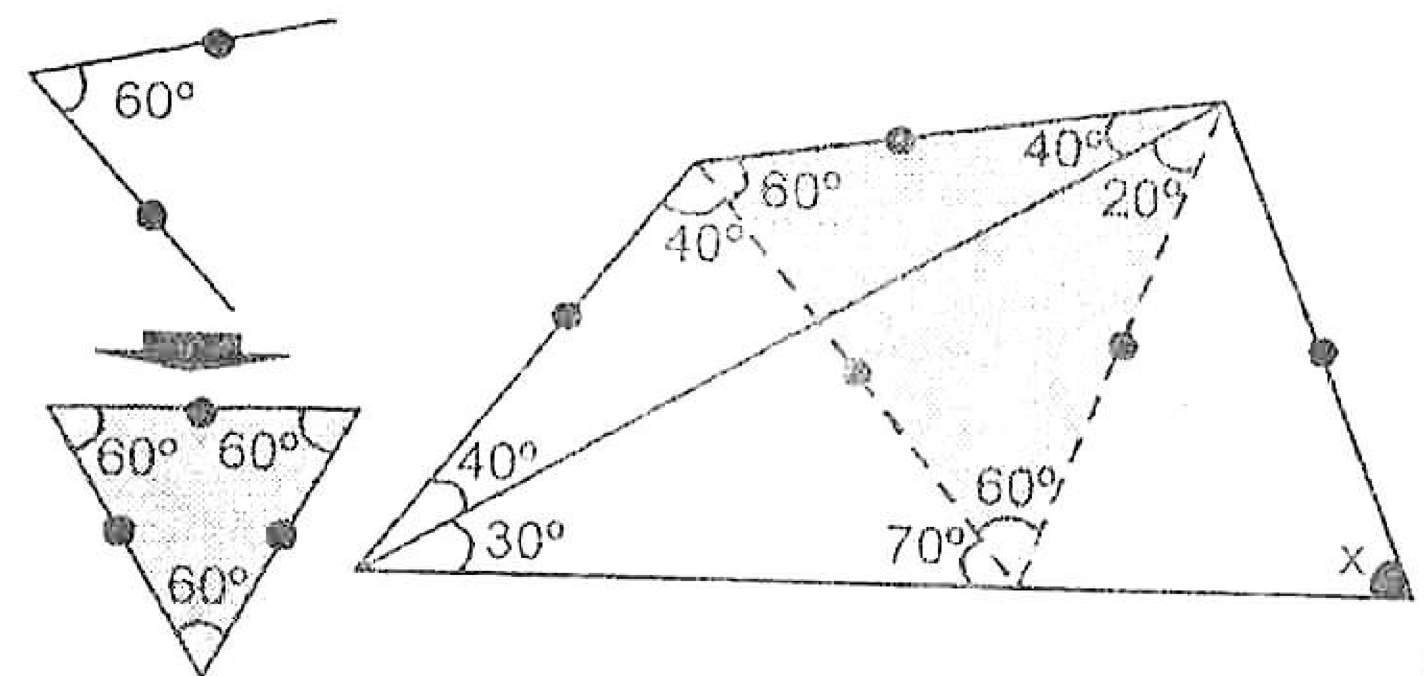


Paso Nº 1:
Realizamos el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles.

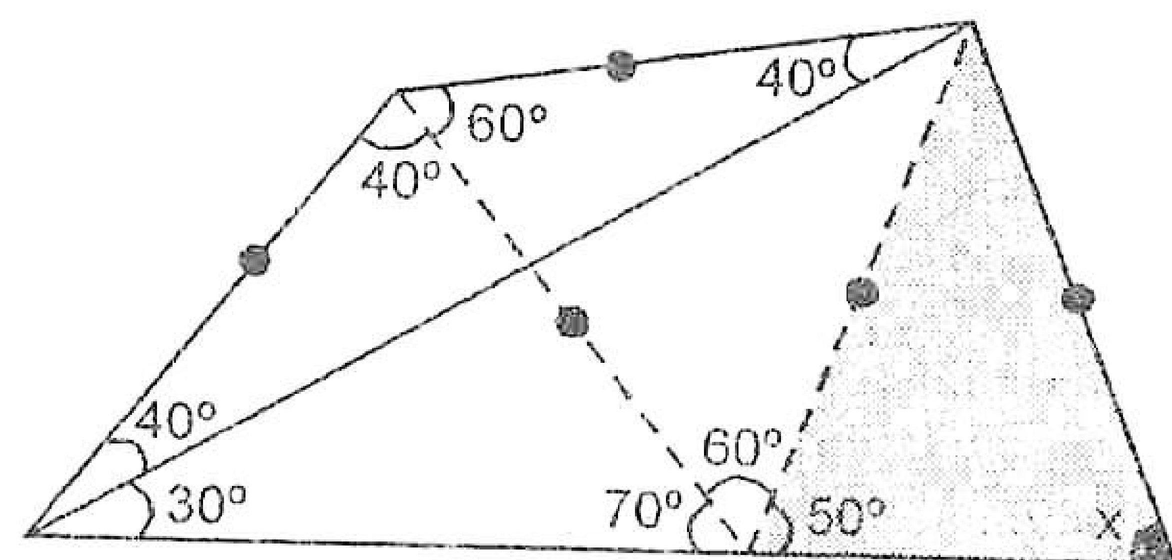




Paso Nº 2:
En la figura mostrada se observa un triángulo equilátero.



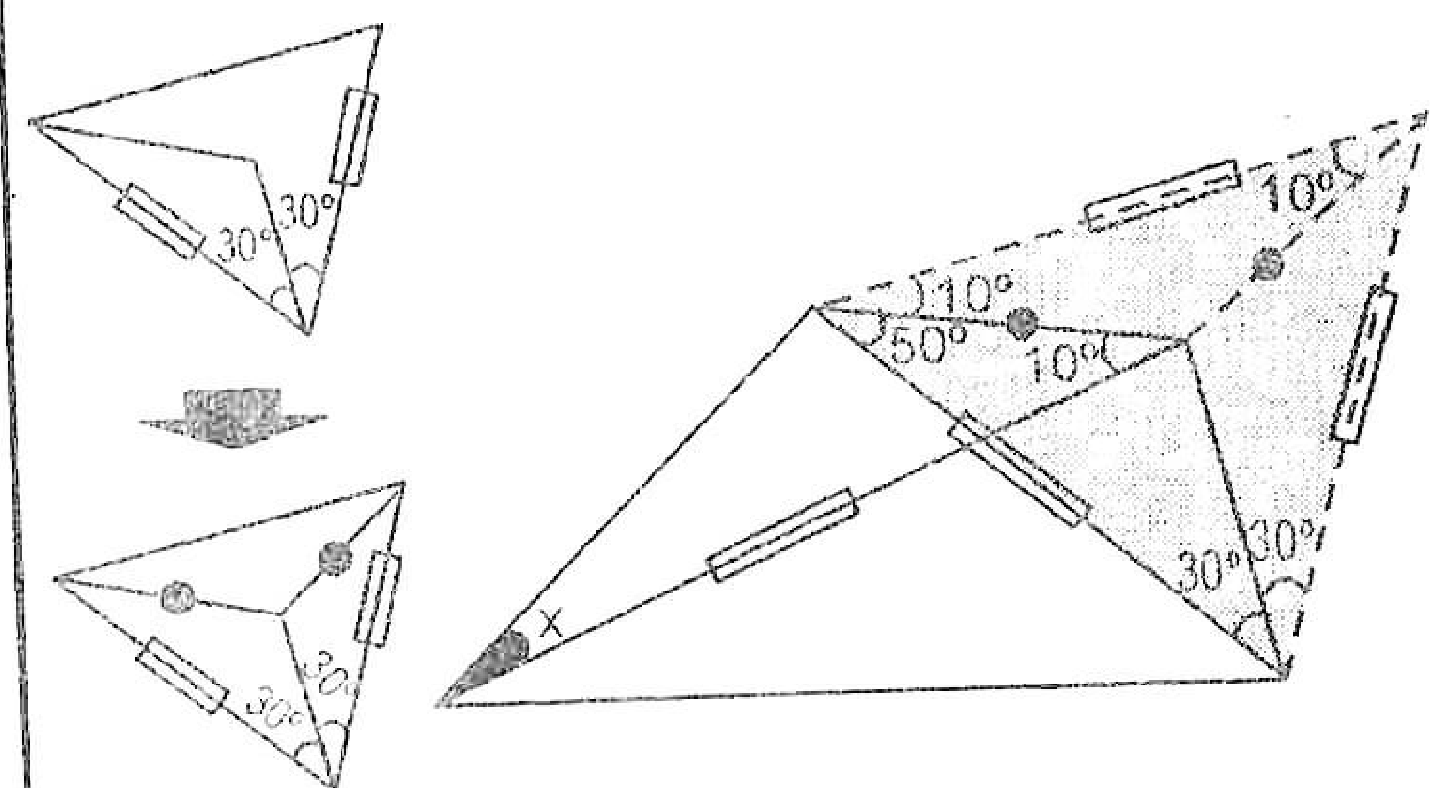
Paso Nº 3:
Finalmente se obtiene un nuevo triángulo isósceles donde se cumple:



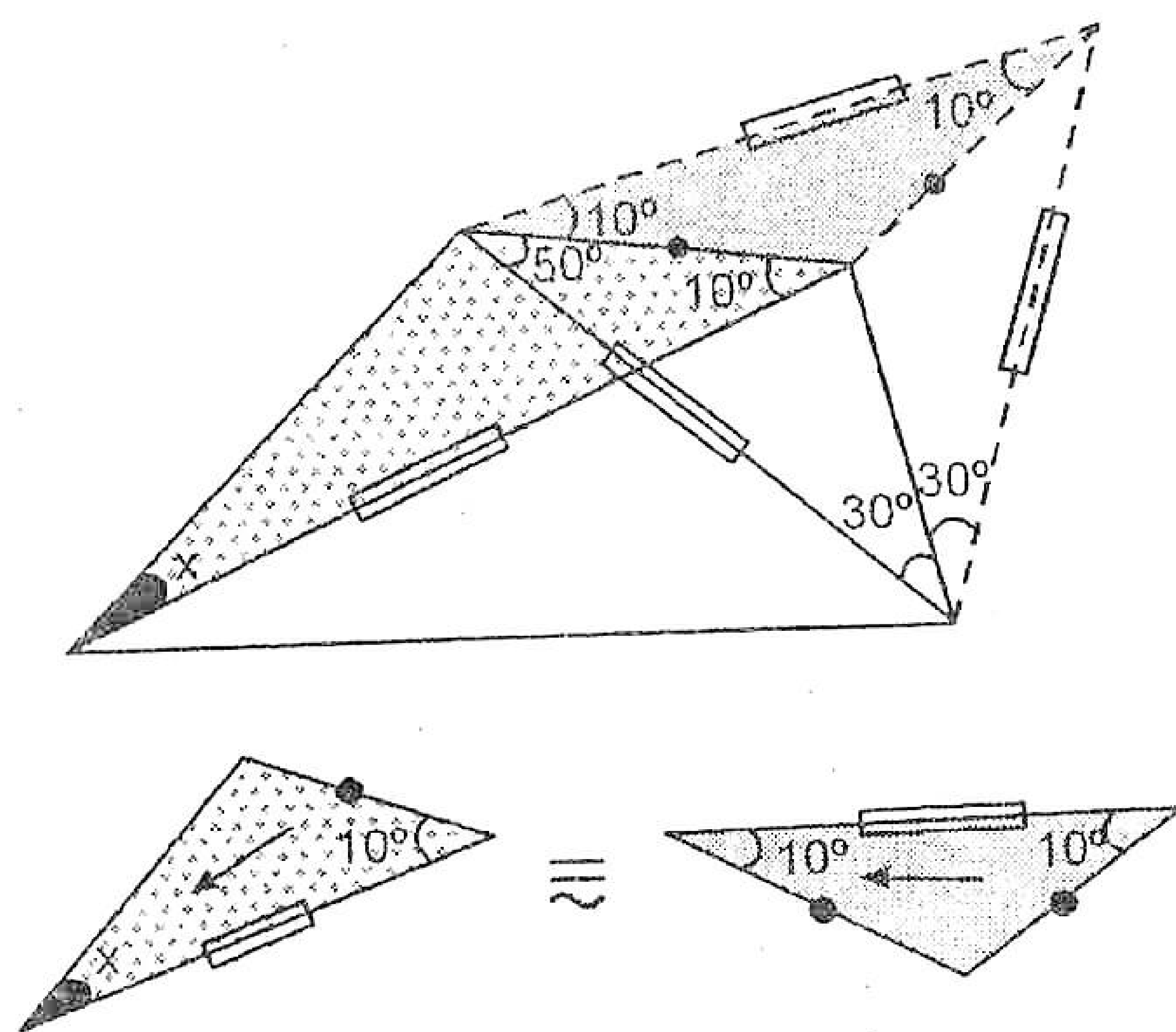
$\therefore\ x = 50°$

Solución Nº 63

Paso Nº 1:
Realizamos el siguiente trazo, construimos un triángulo equilátero; con ello tenemos lados y ángulos iguales.



Paso Nº 2:
De la figura se observa que se cumple la propiedad de la mediatriz.

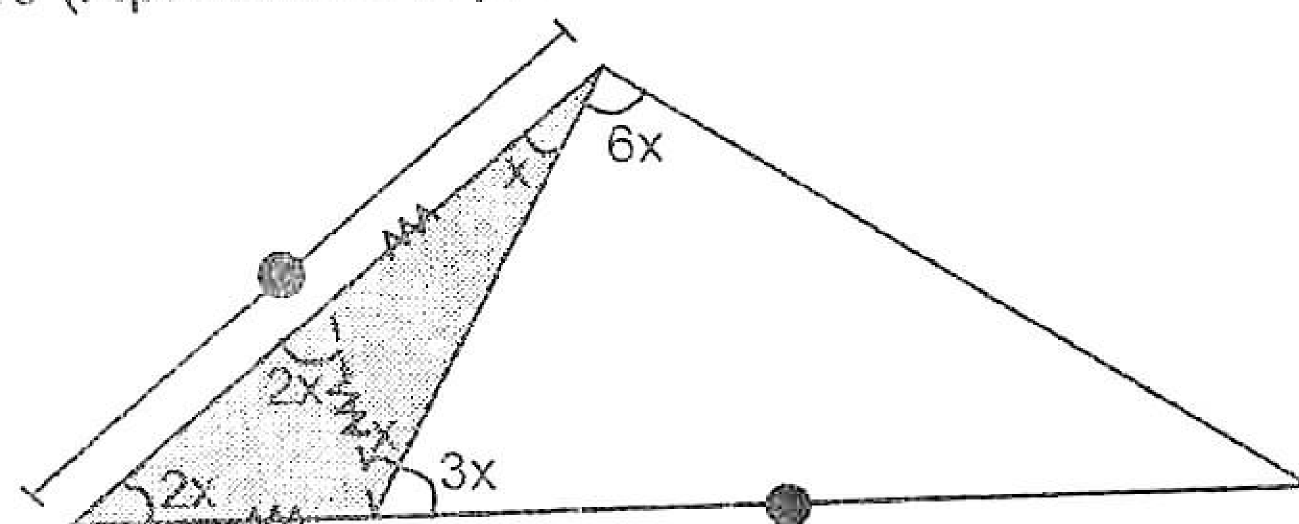


Paso Nº 3:
Se obtiene dos triángulos que son congruentes, caso (L.A.L.).

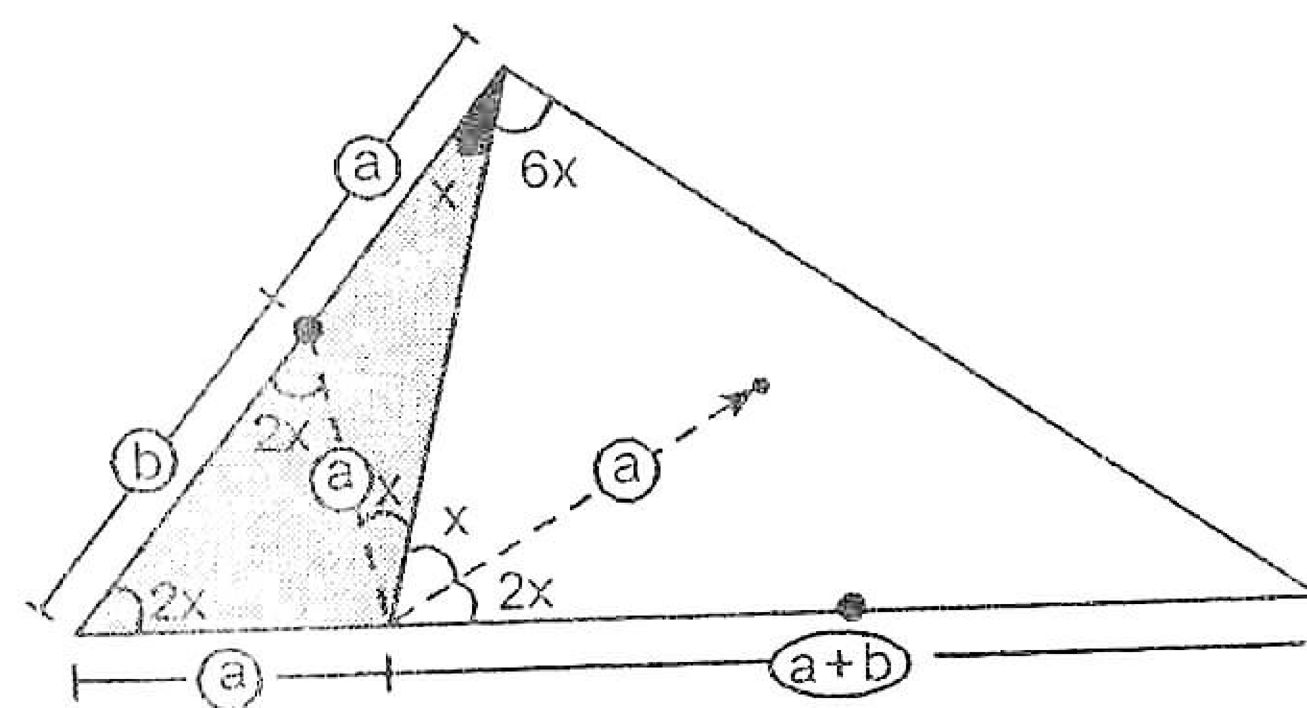
$\therefore\ x = 10°$

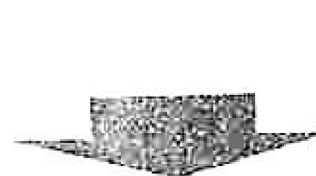
Solución Nº 64

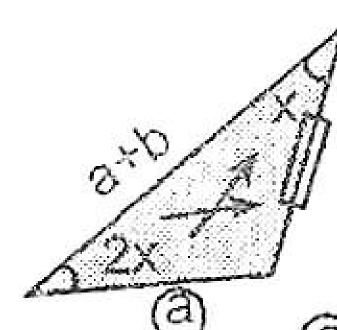
Paso Nº 1: En la figura, se observa triángulo sombreado; con ángulos en la relación de dos a uno (Aplicamos el primer criterio de construcción)

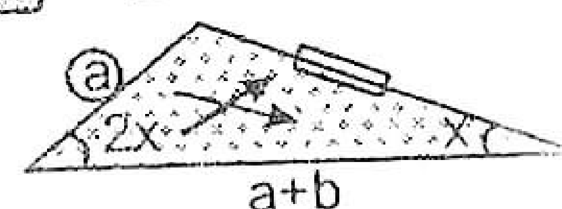


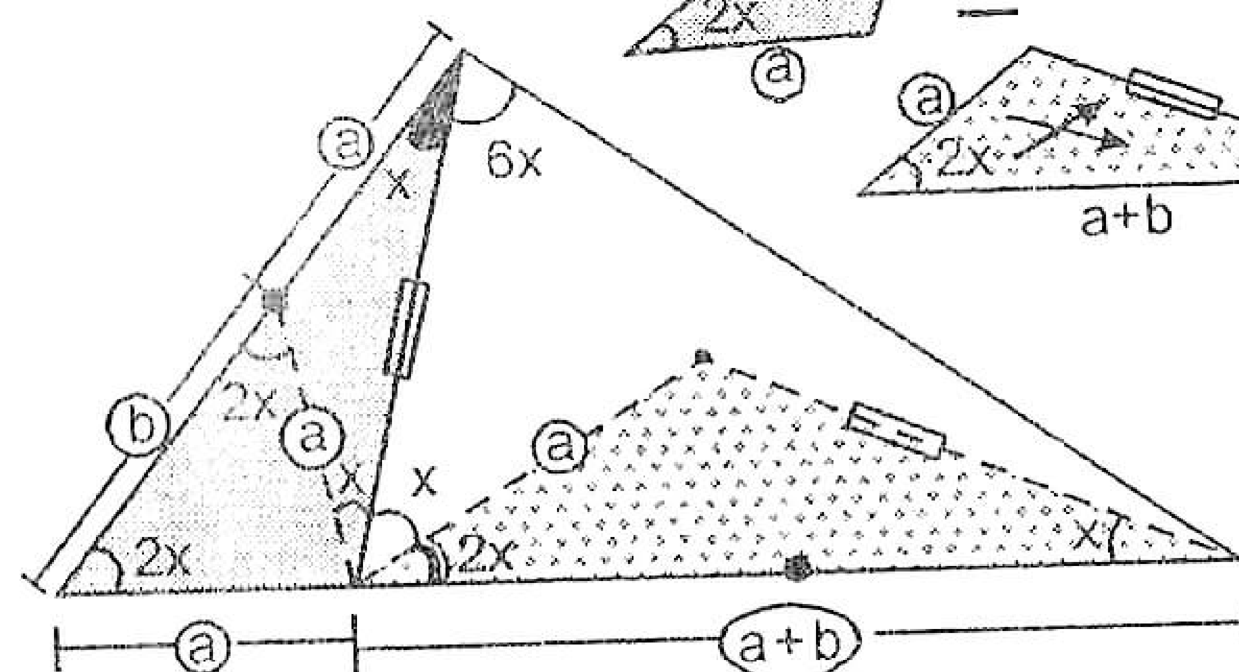
Paso Nº 2: Observamos lados iguales en forma alternada, entonces buscamos triángulos congruentes aplicando el quinto criterio de construcción.



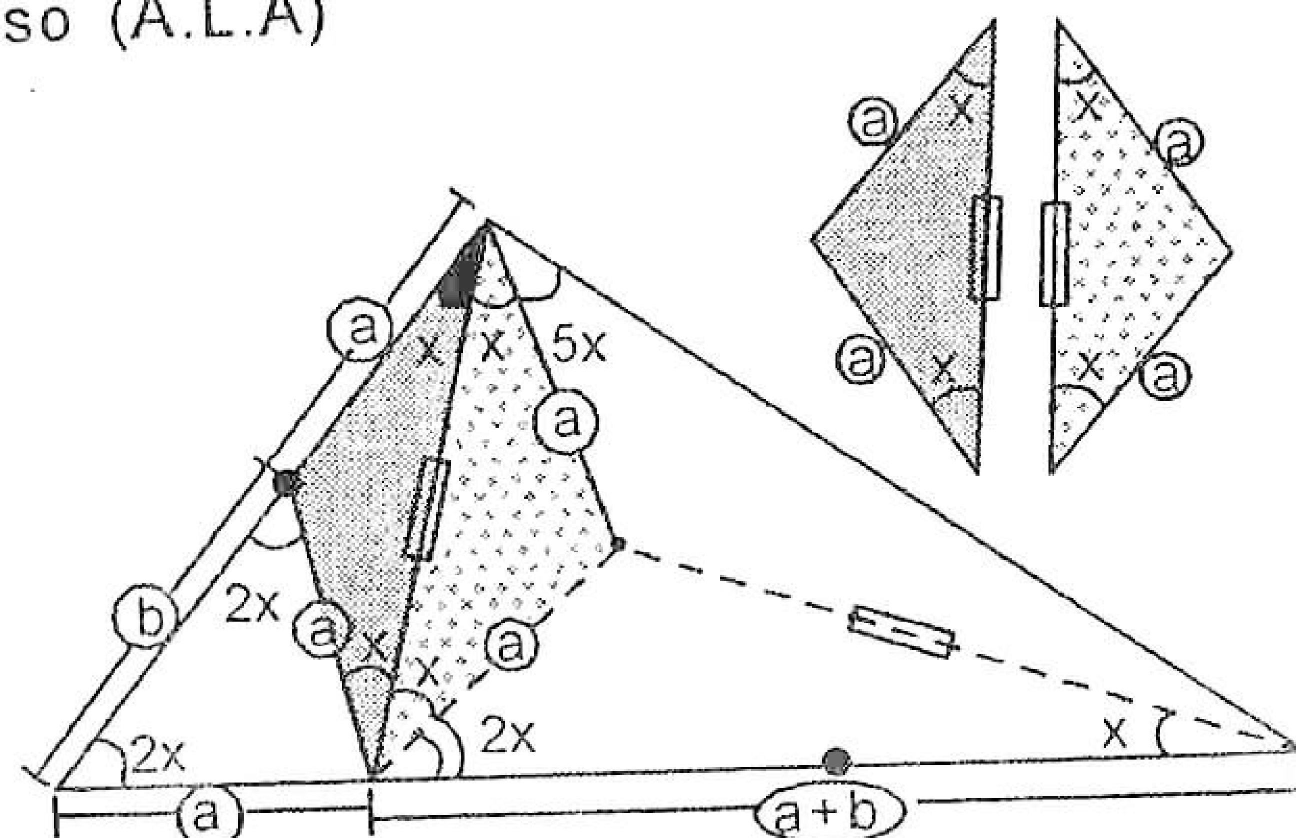




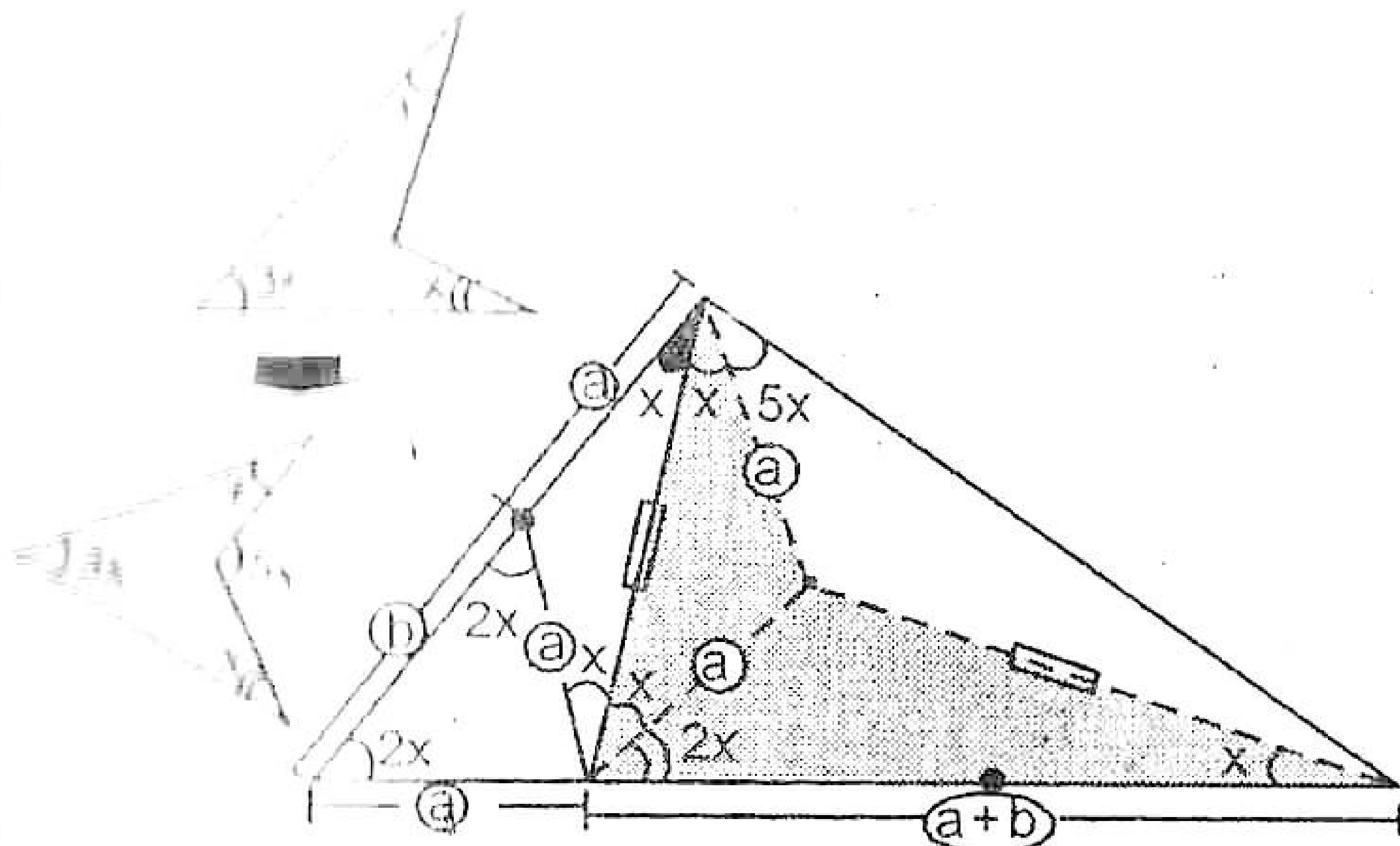




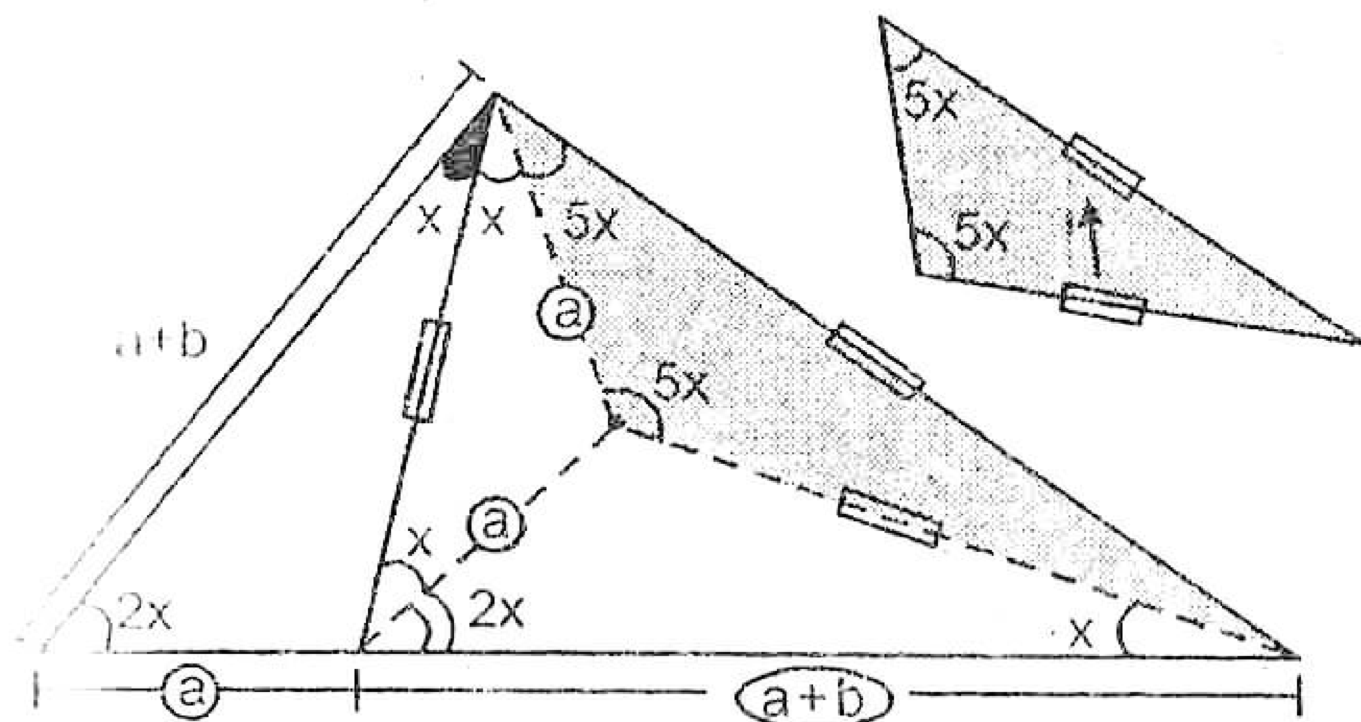
Paso Nº 3: Luego realizamos otro trazo para obtener dos nuevos triángulos congruentes, caso (A.L.A)



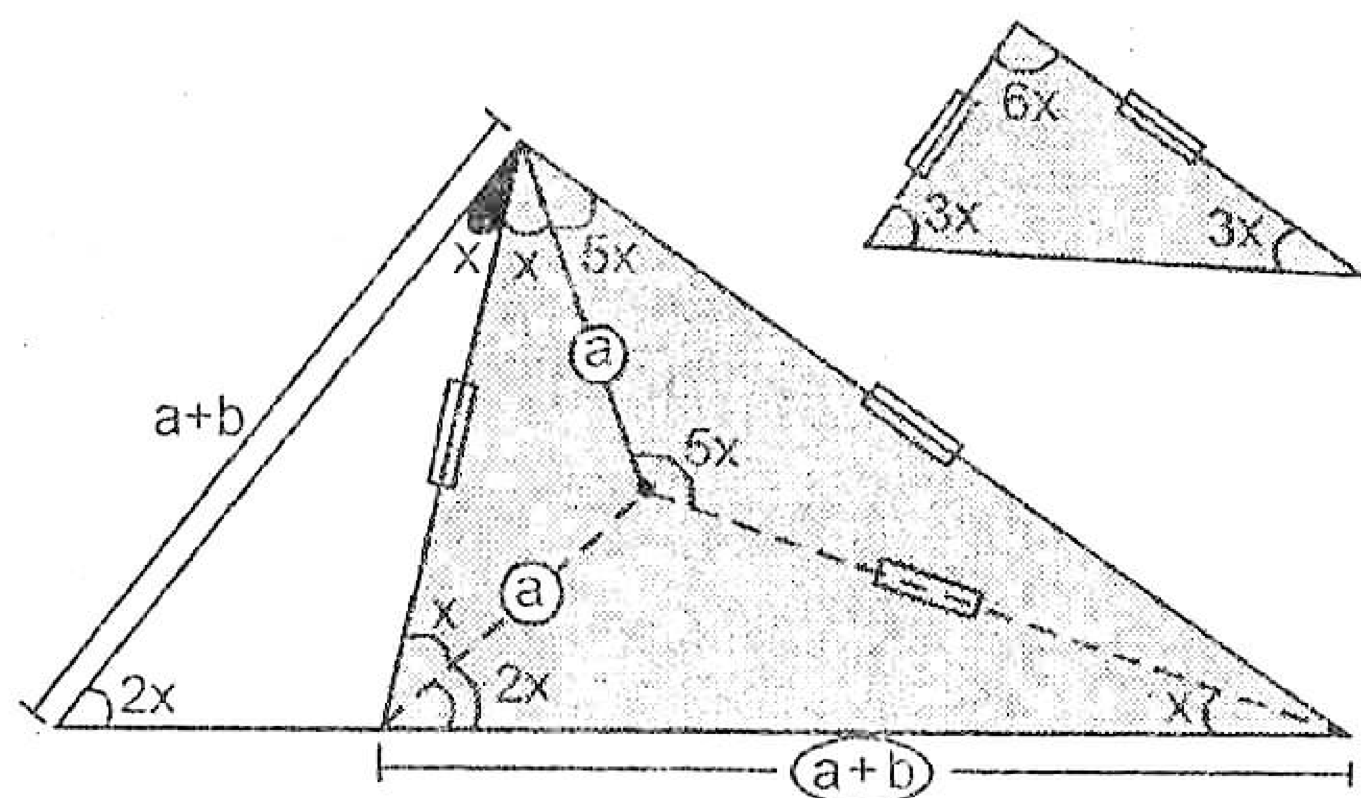
Paso N° 4: Realizado el paso anterior se obtiene un cuadrilátero cóncavo donde se cumple:



Paso N° 5:
Se obtiene un nuevo triángulo isósceles de la siguiente manera:



Paso N° 6:
Finalmente tenemos el siguiente triángulo sombreado donde se cumple:



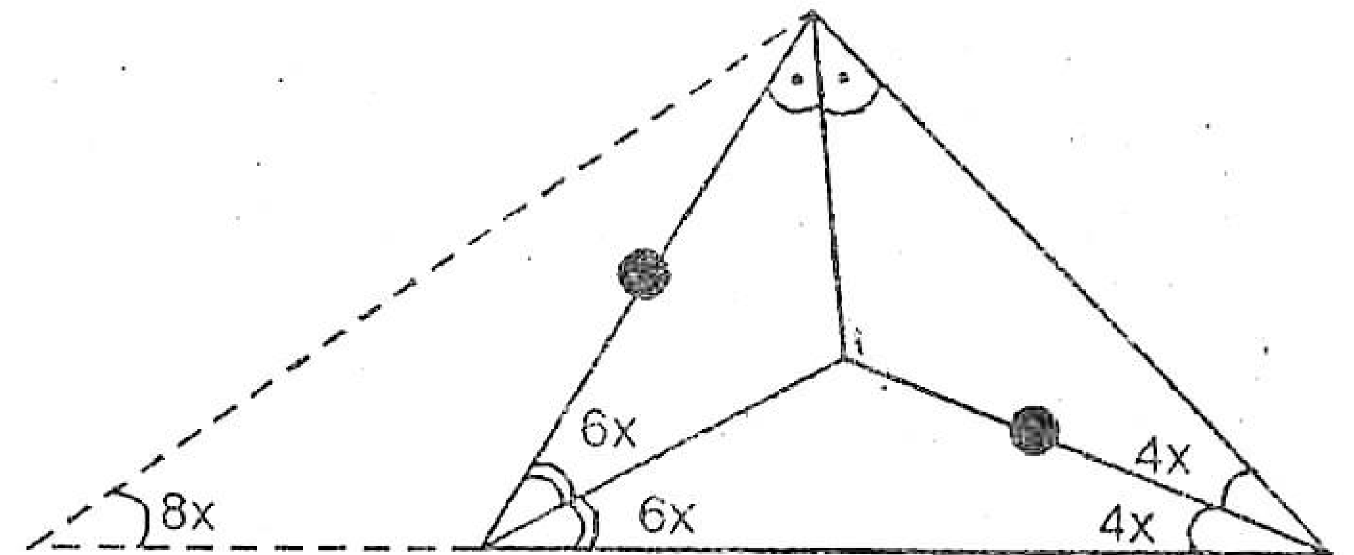
$\therefore \quad 3x + 6x + 3x = 180°$

$12x = 180°$

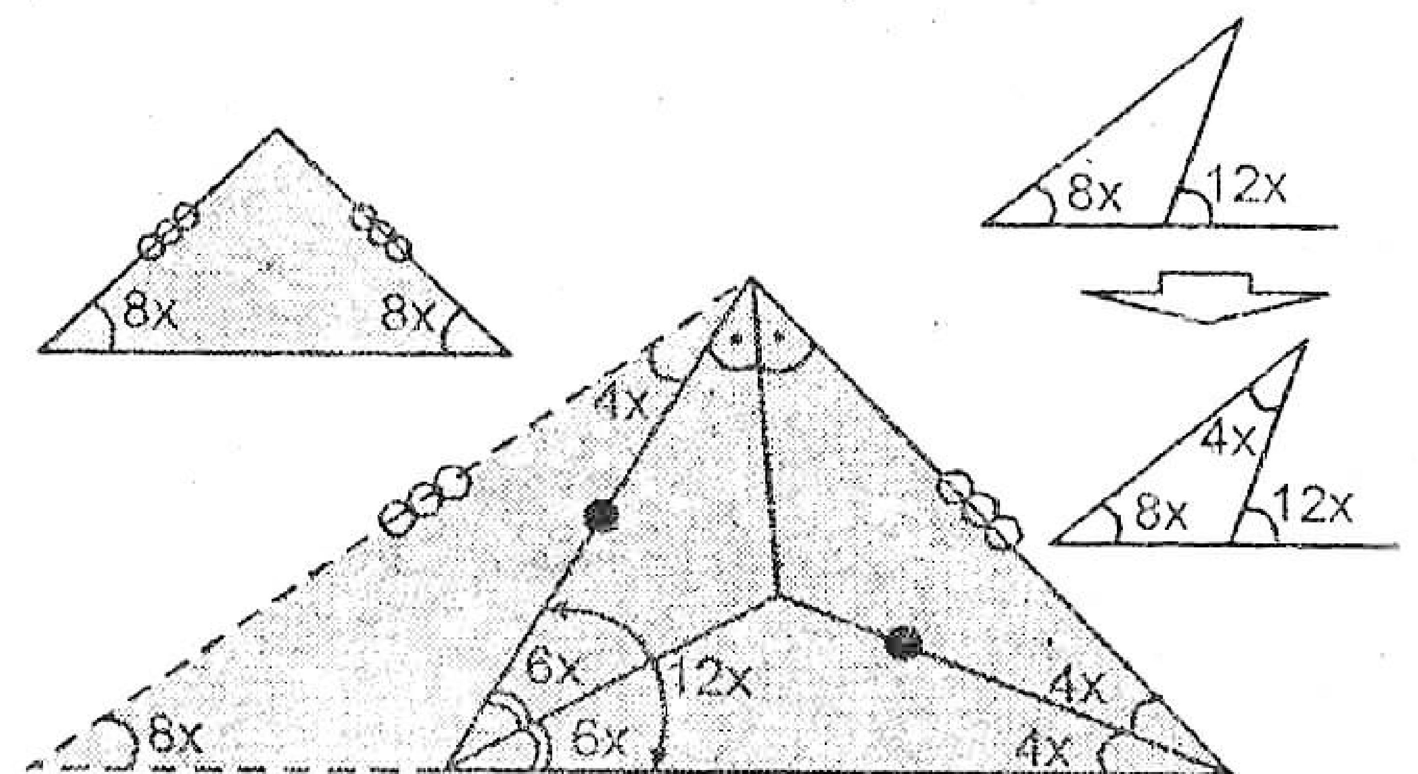
$x = 15°$

Solución N° 65

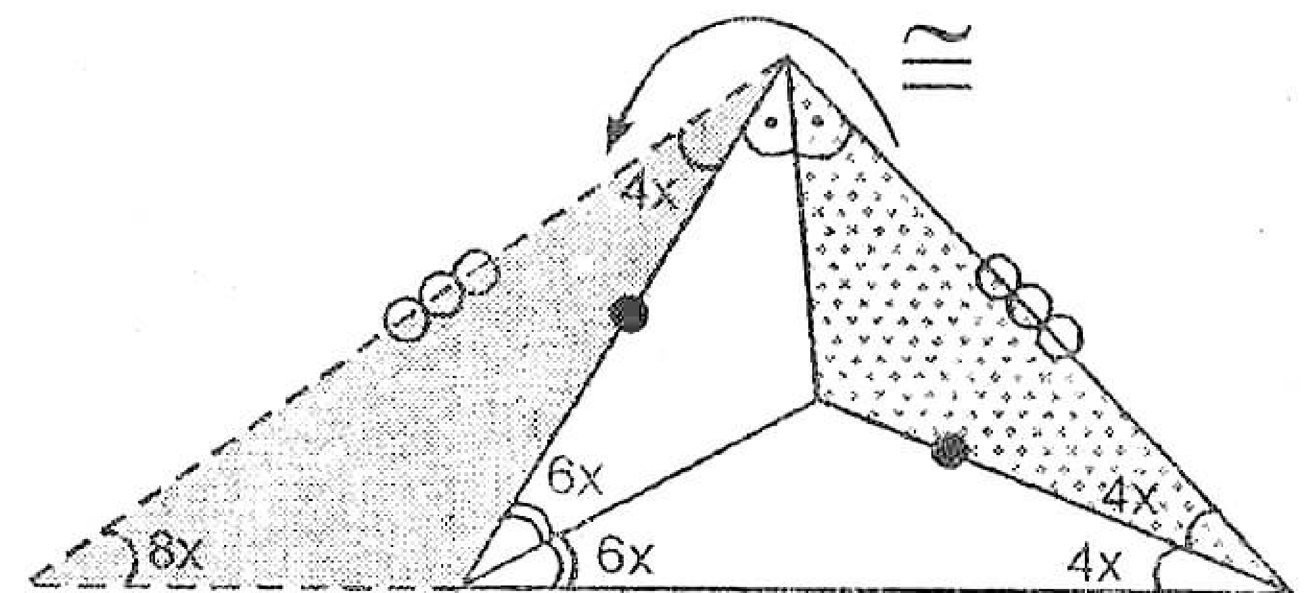
Paso N° 1:
Como observamos lados iguales en forma alternada, buscamos obtener triángulos congruentes realizando el siguiente trazo.



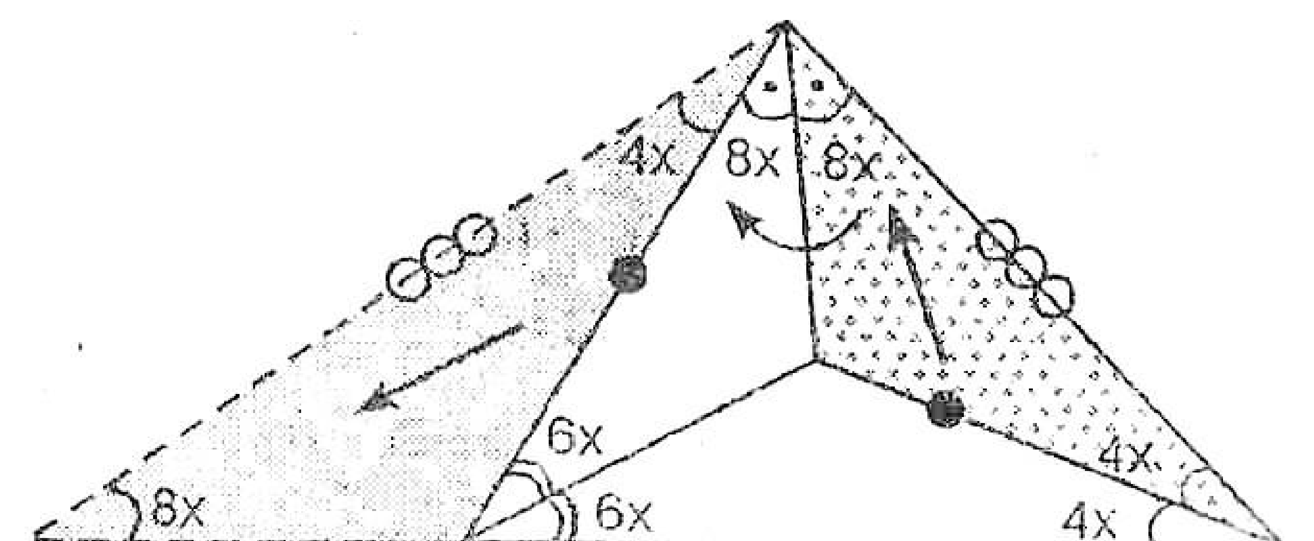
Paso N° 2:
El trazo realizado es para obtener un triángulo isósceles en donde se cumple:



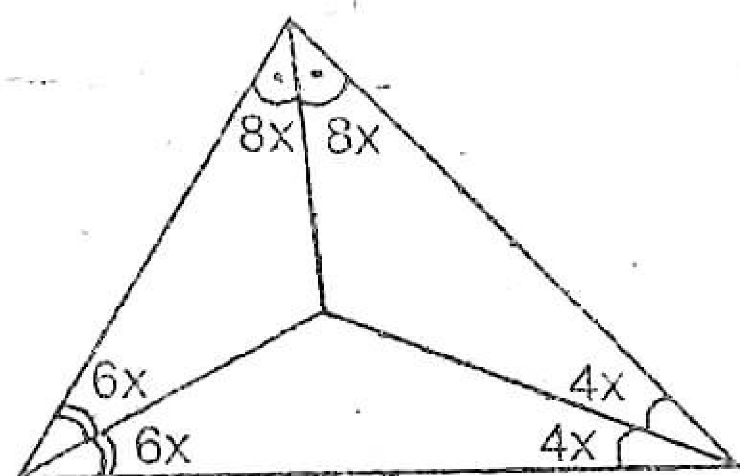
Paso N° 3:
Ahora se observa que tiene dos triángulos congruentes, caso (L.A.L.)



Se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales".



Paso Nº 4: Finalmente se obtiene:

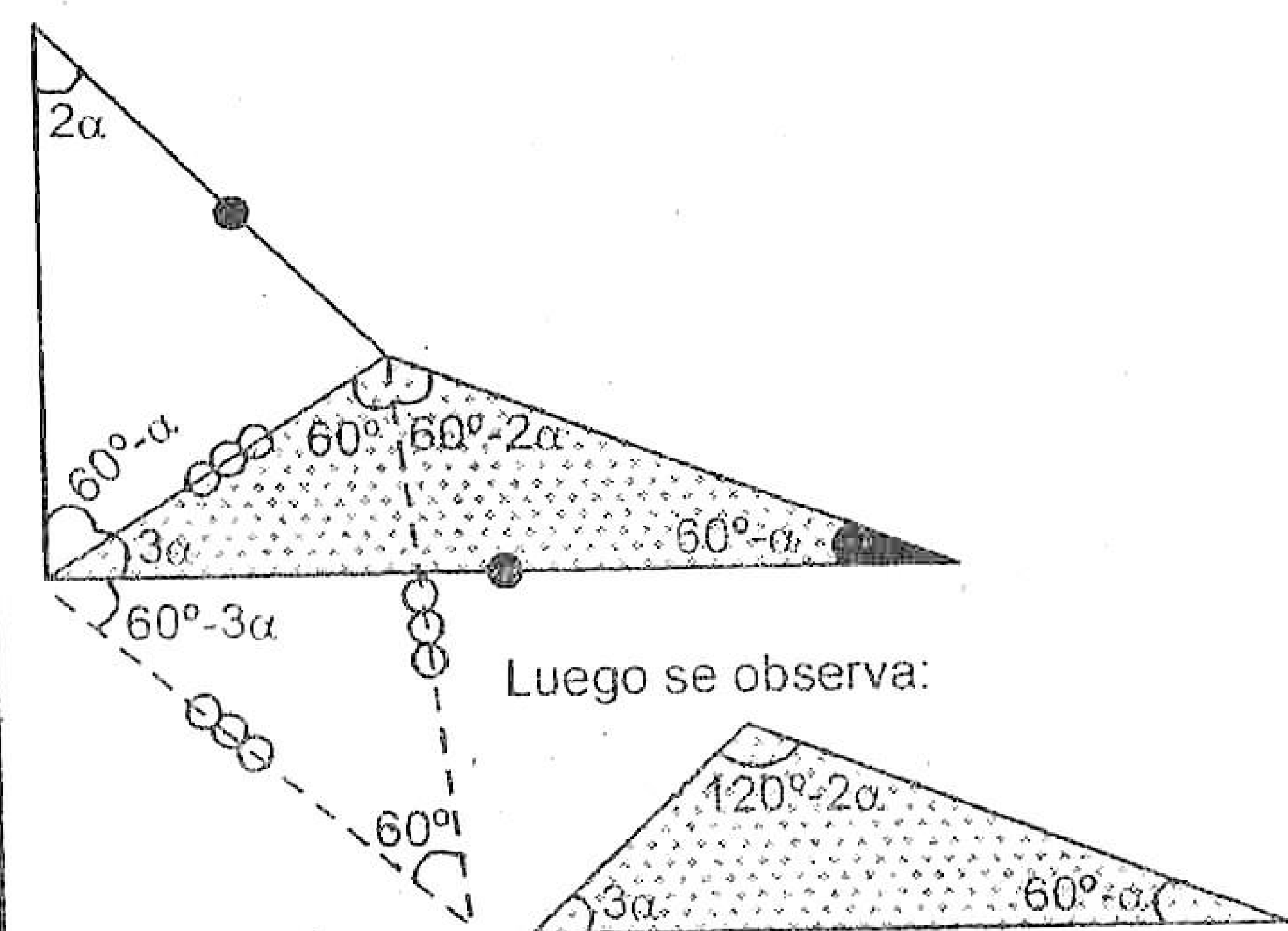


$$12x + 16x + 8x = 180^\circ$$
$$36x = 180^\circ$$
$$x = 5^\circ$$

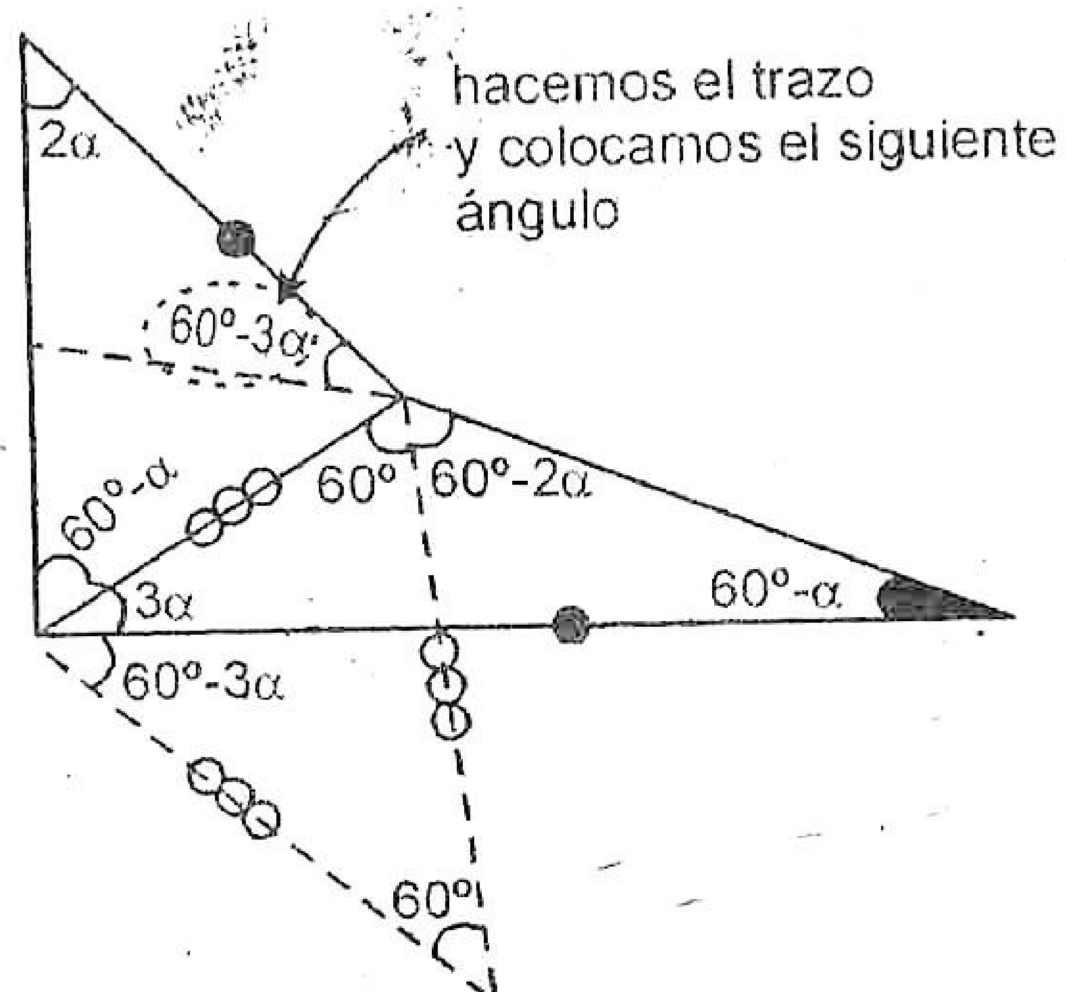
Solución Nº 66

Como observamos lados iguales en forma alternada, entonces buscaremos en la figura triángulos que sean congruentes realizando los siguientes trazos.

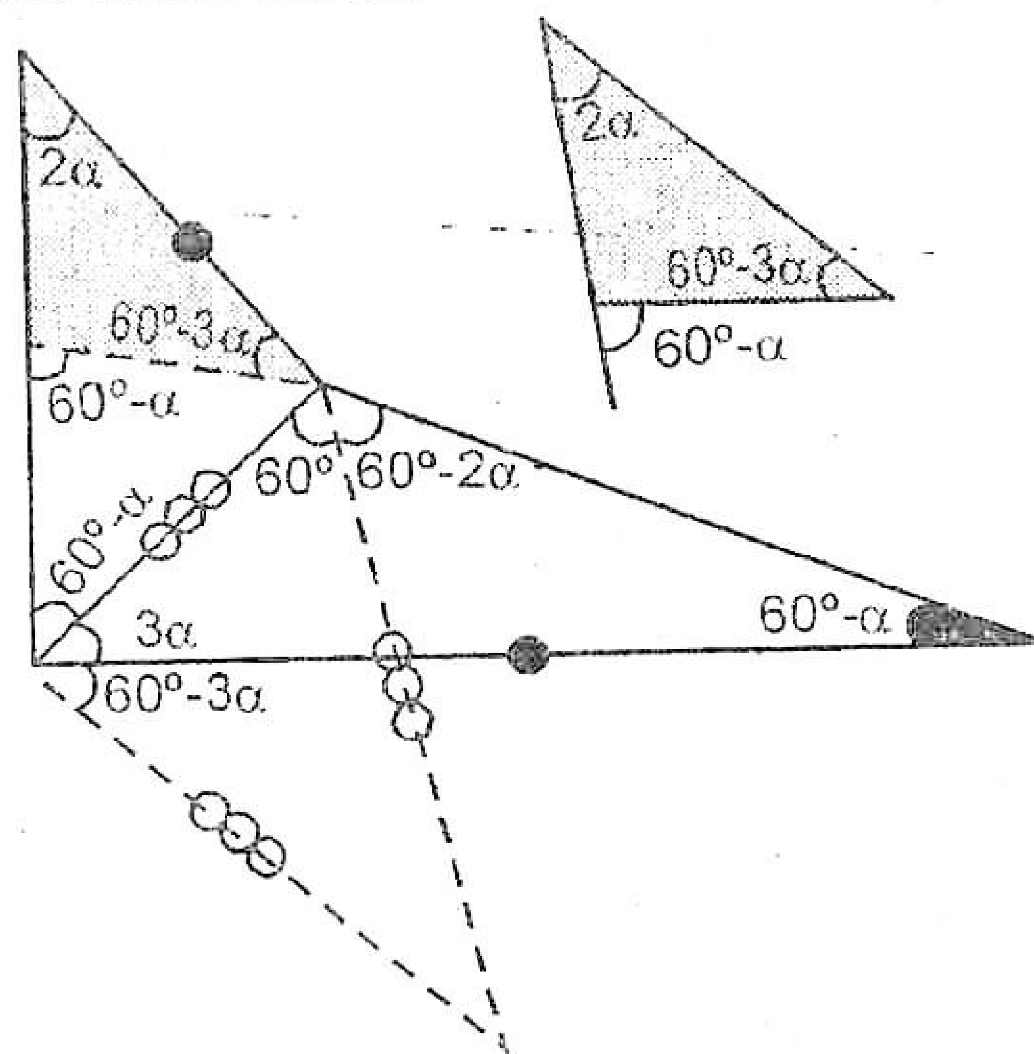
Paso Nº 1:
Trazamos un triángulo equilátero de la siguiente manera para conseguir lados y ángulos iguales.



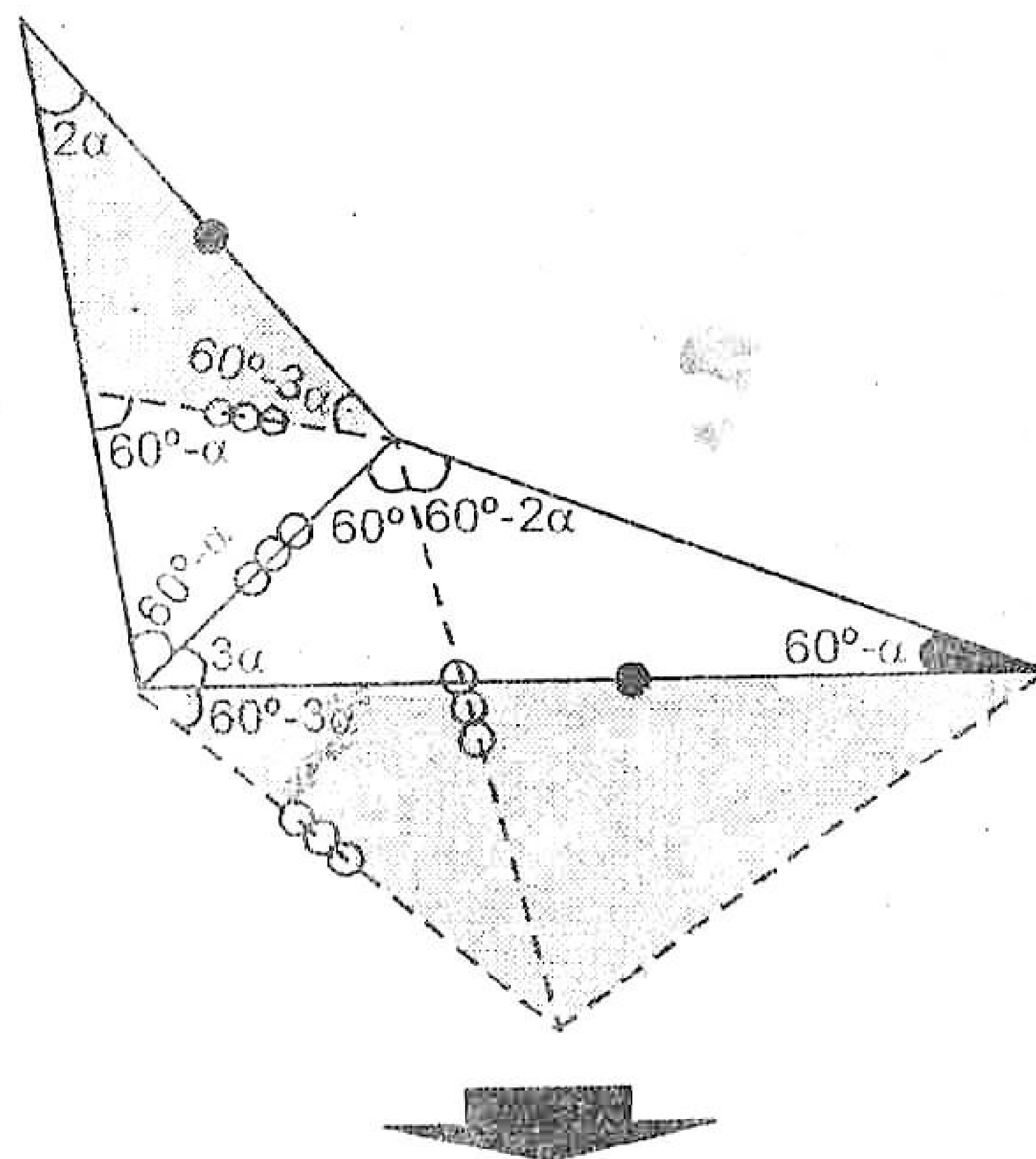
Paso Nº 2: Ahora realizamos el siguiente trazo y conseguimos la siguiente figura.

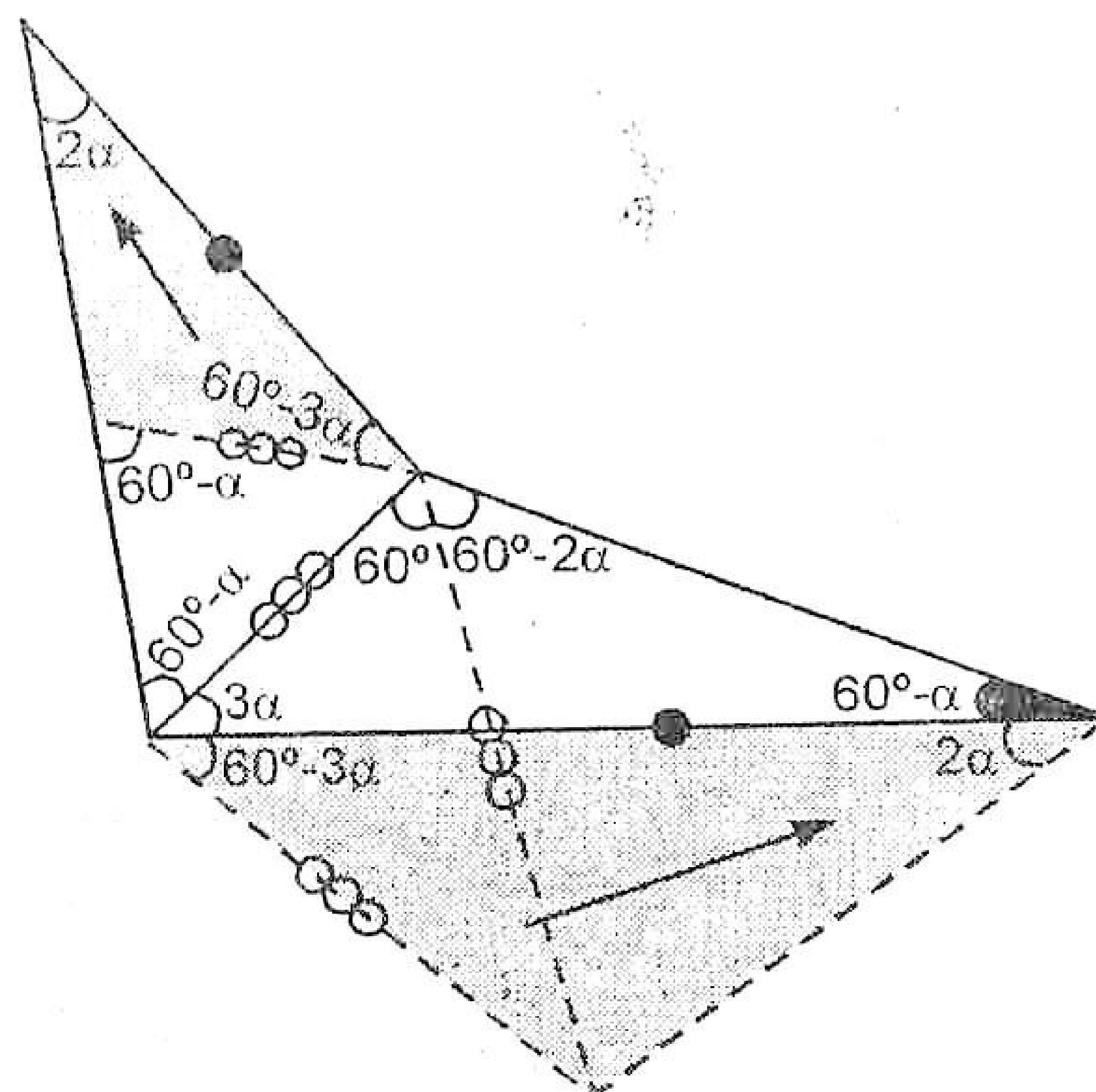


Con ella obtenemos:

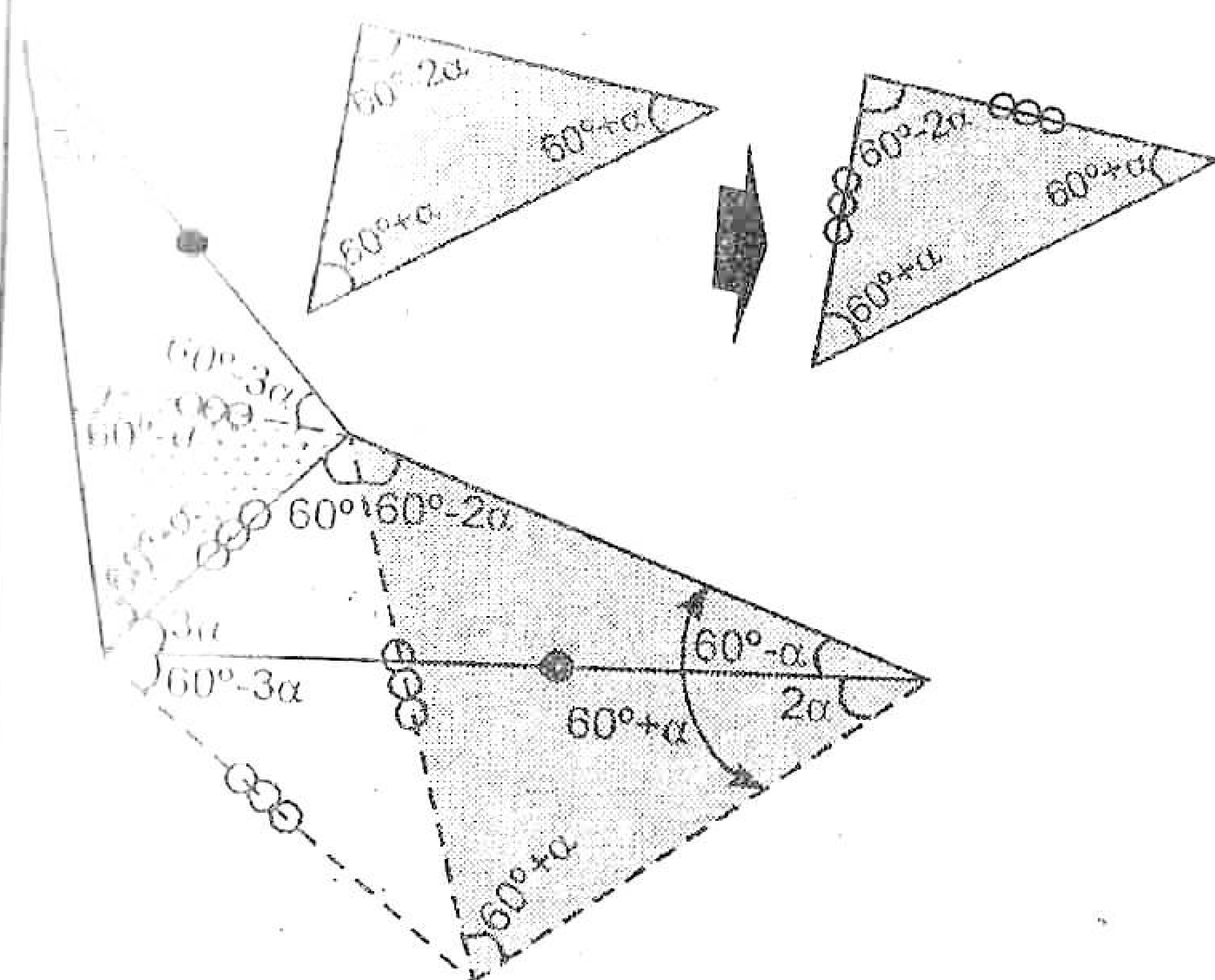


Paso Nº 3:
Observamos en la figura dos triángulos congruentes, caso (L.A.L)

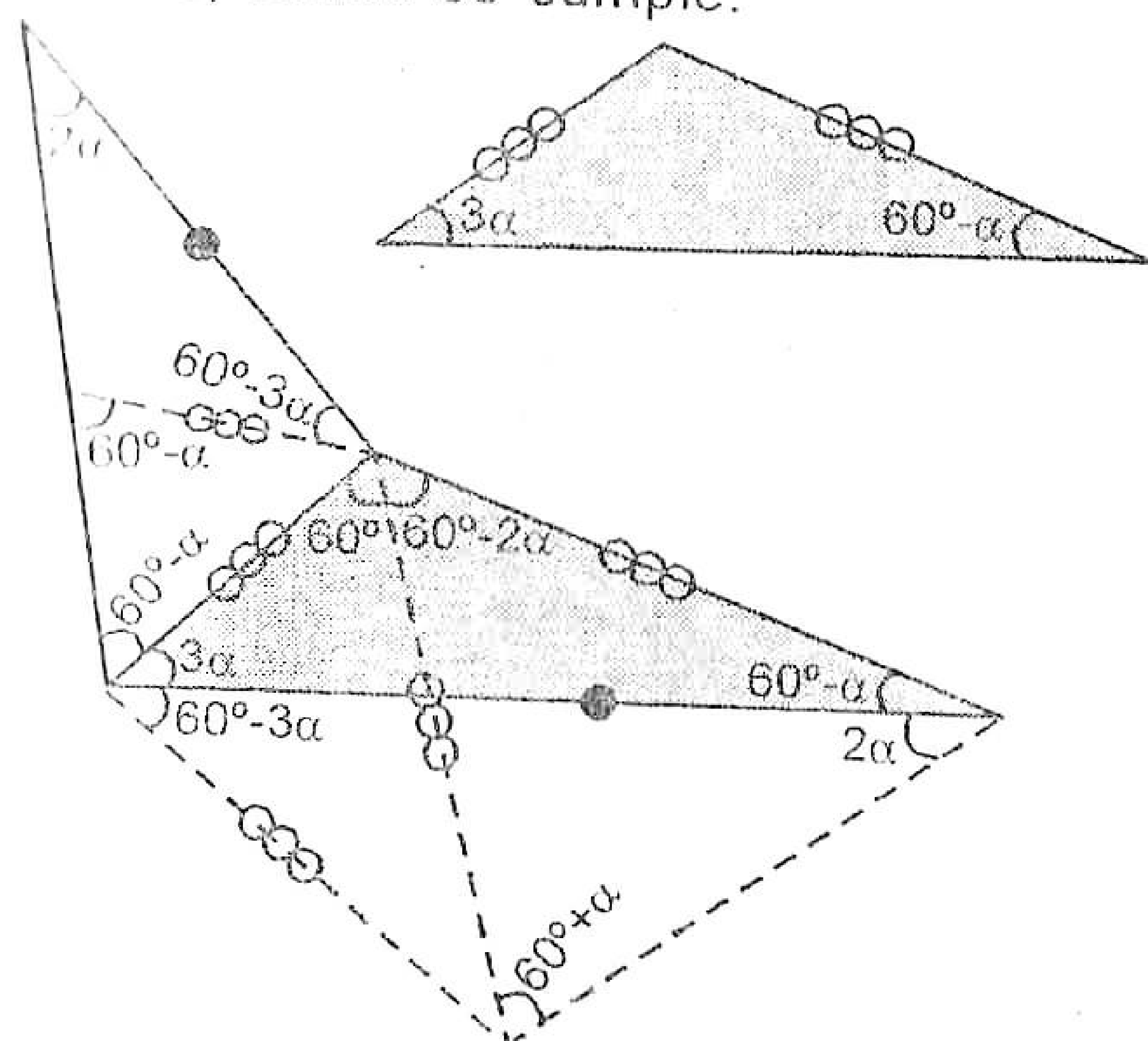




Paso N° 4:
Ahora se observa en la figura que tenemos un triángulo isósceles.



Paso N° 5:
Finalmente tenemos un nuevo triángulo isósceles, donde se cumple:



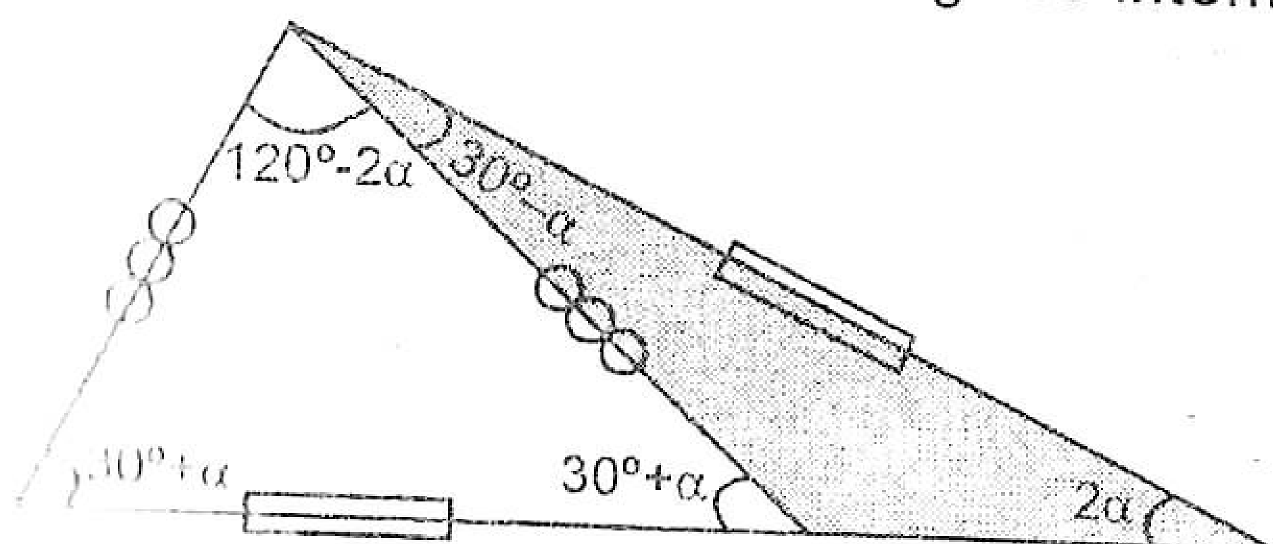
$$\Rightarrow \quad 3\alpha = 60° - \alpha$$

$$4\alpha = 60°$$

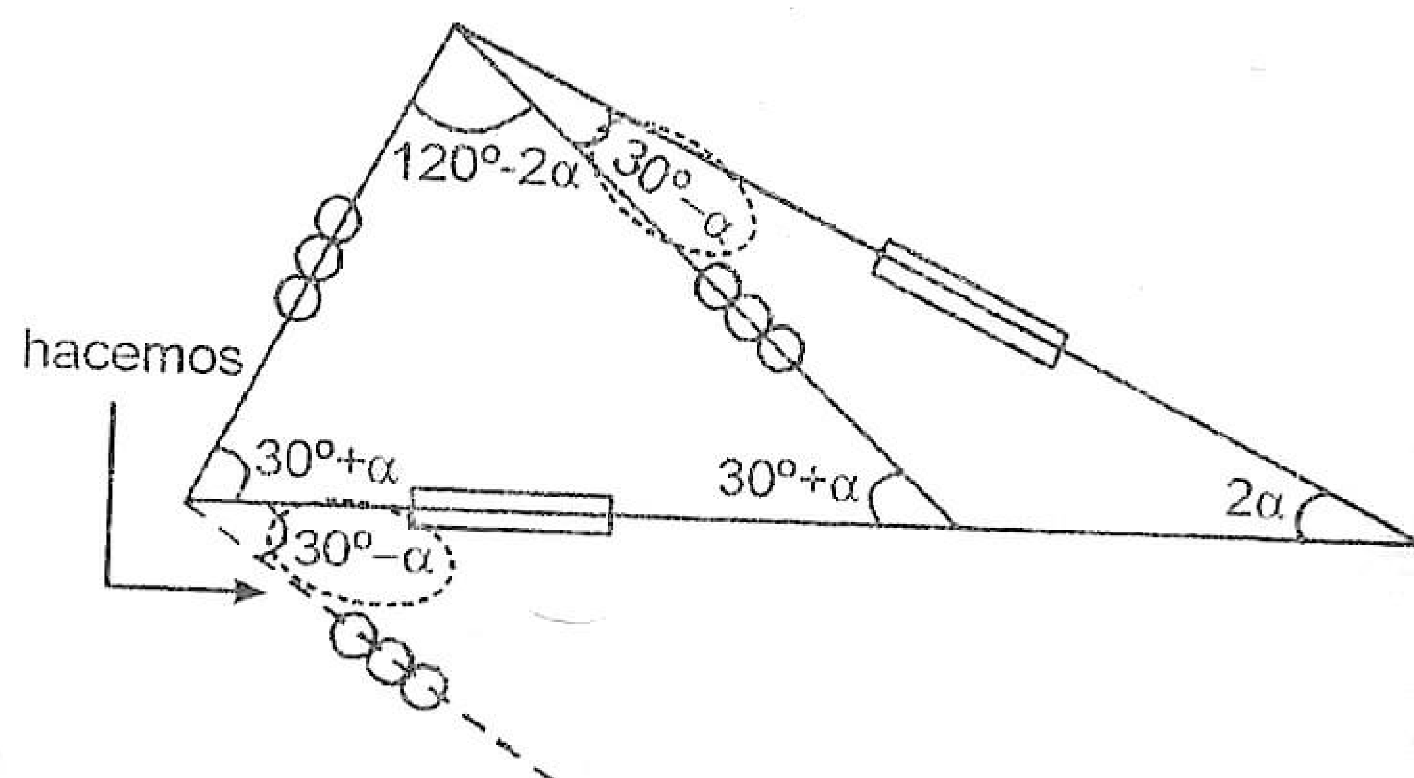
$$\alpha = 15°$$

Solución Nº 67:

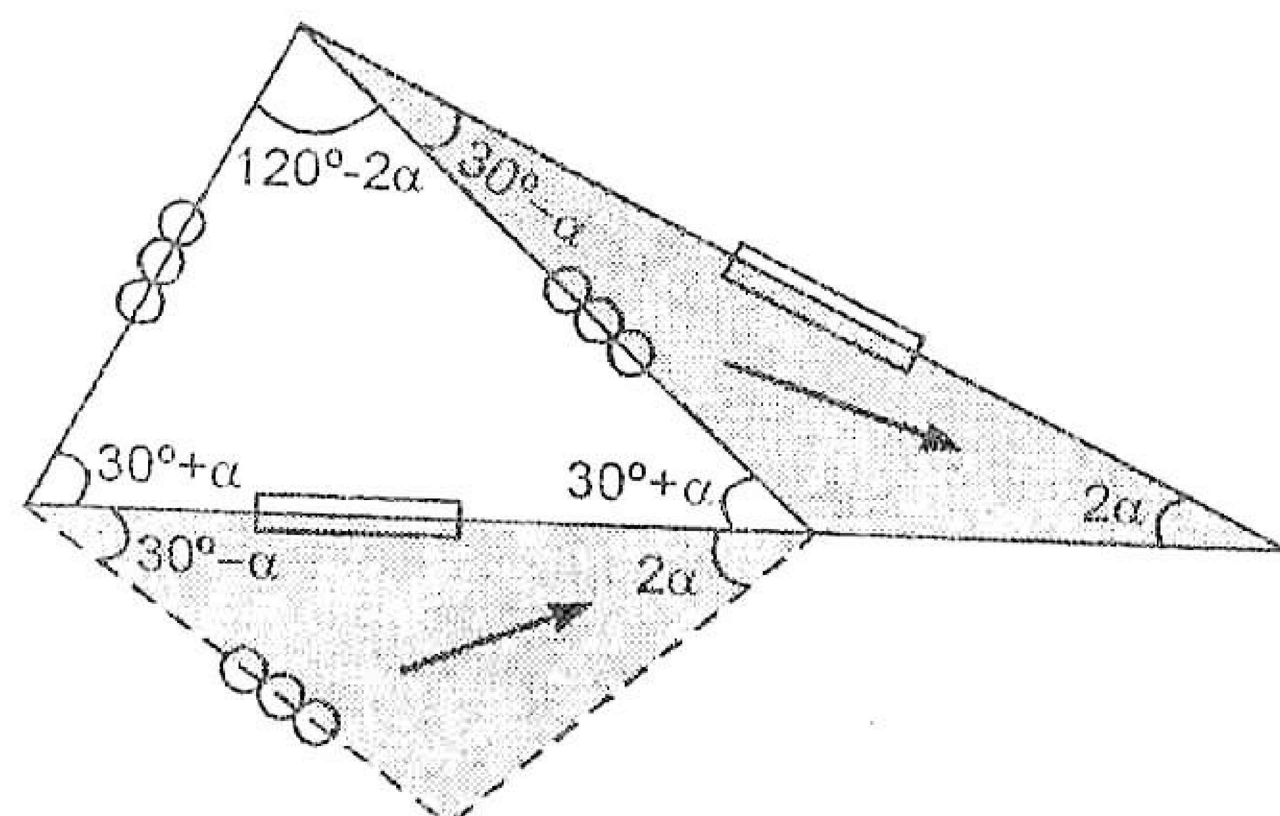
En la figura completamos los ángulos internos.



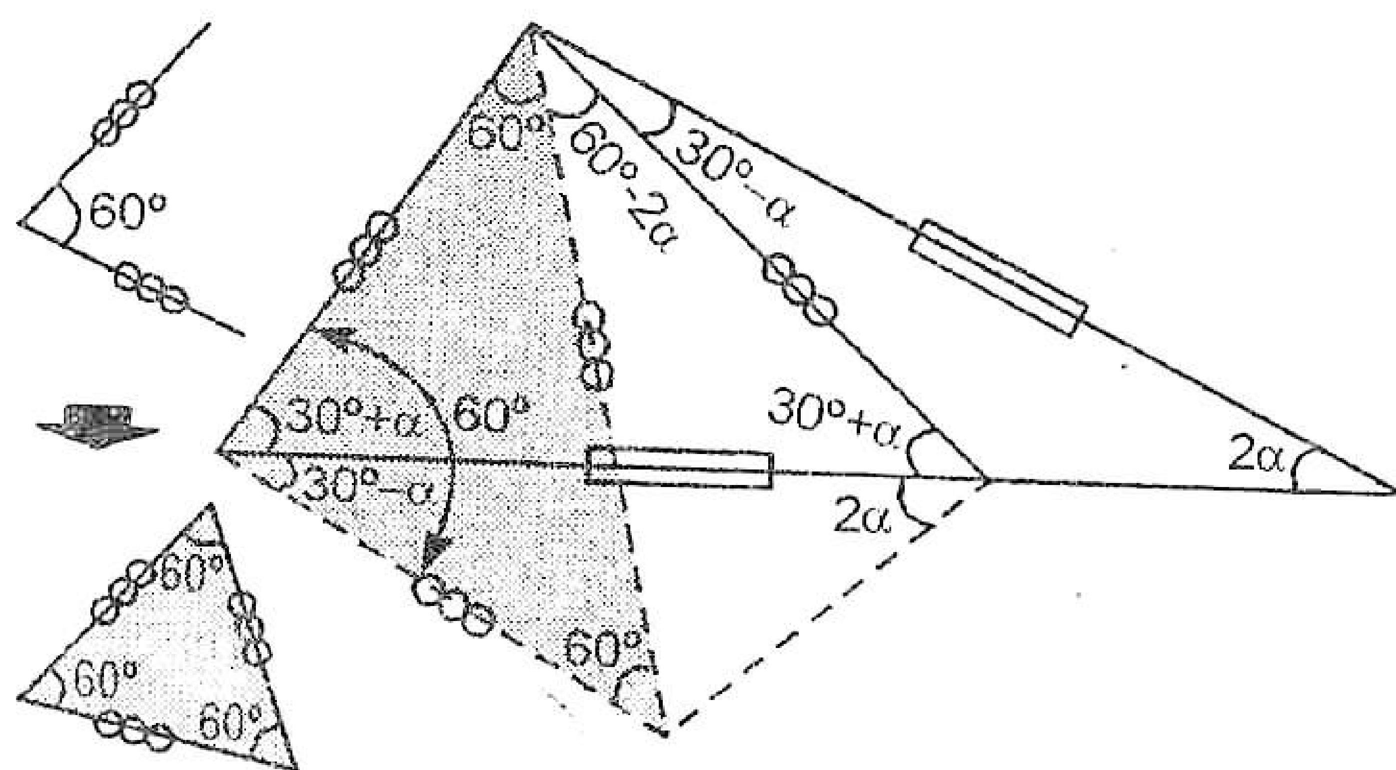
Paso N° 1:
Como se tiene en la figura lados iguales en forma alternada, entonces, buscamos triángulos congruentes realizando el siguiente trazo aplicando el quinto criterio de construcción.



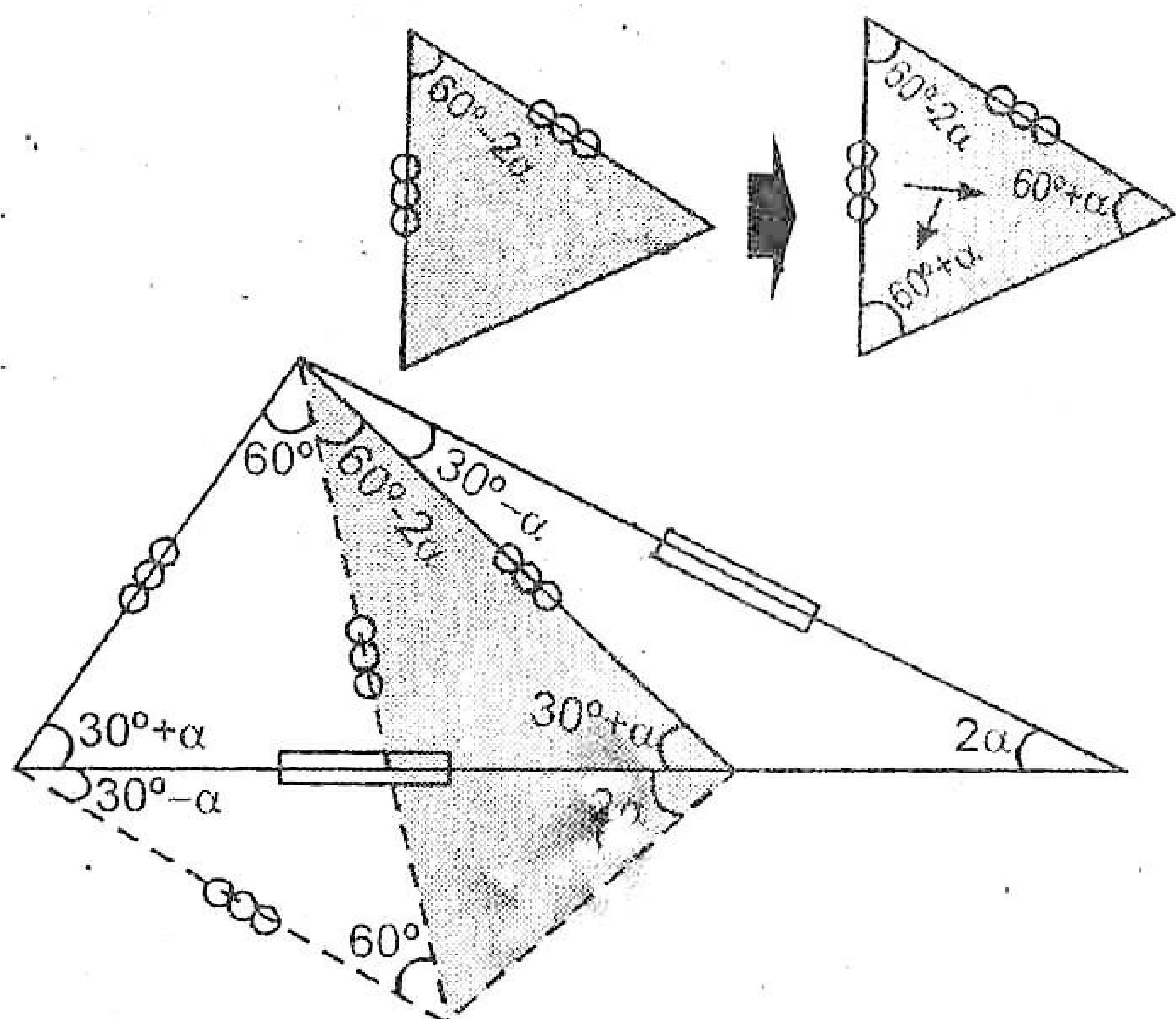
Aquí obtenemos dos triángulos congruentes; caso (L.A.L)



Paso N° 2:
Ahora observamos en la figura un triángulo equilátero.



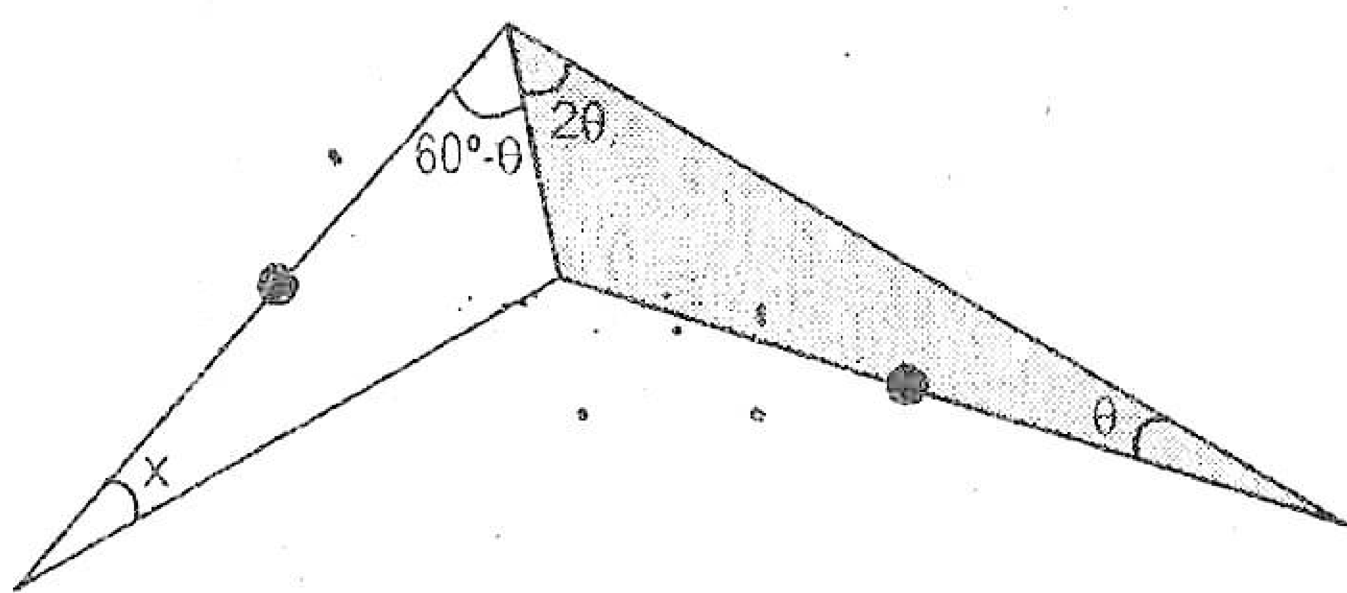
Paso N° 3: Ahora se obtiene un triángulo isósceles donde se cumple:



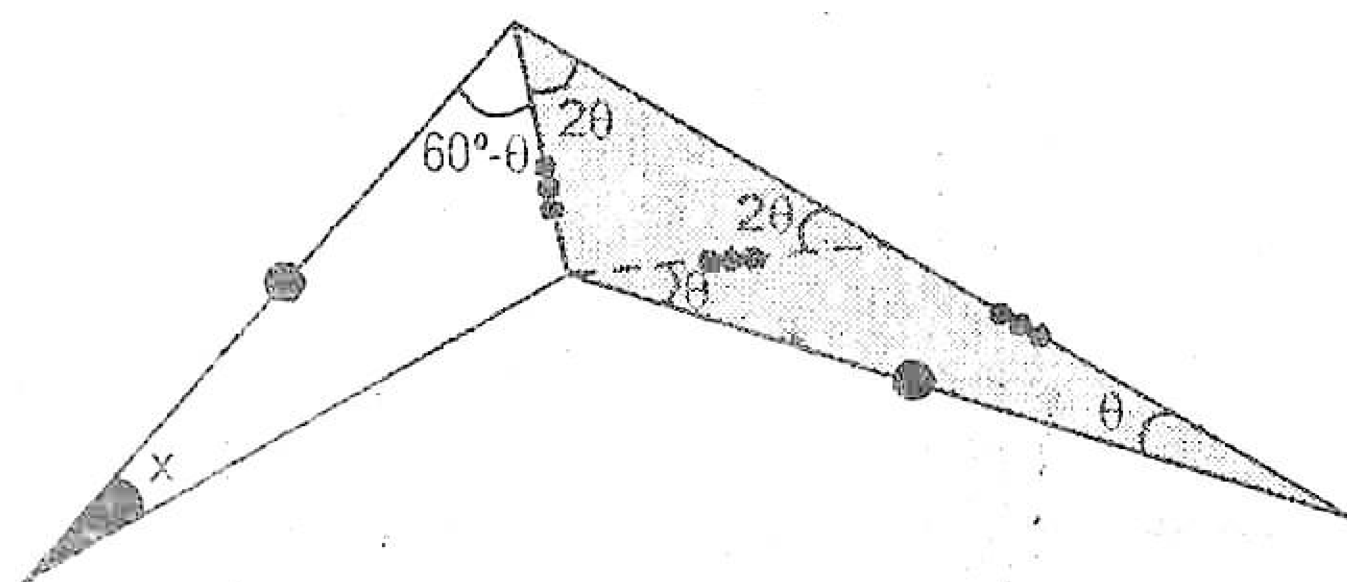
∴ de la figura:

$$30°+\alpha+2\alpha = 60°+\alpha$$
$$2\alpha = 30°$$
$$\alpha = 15°$$

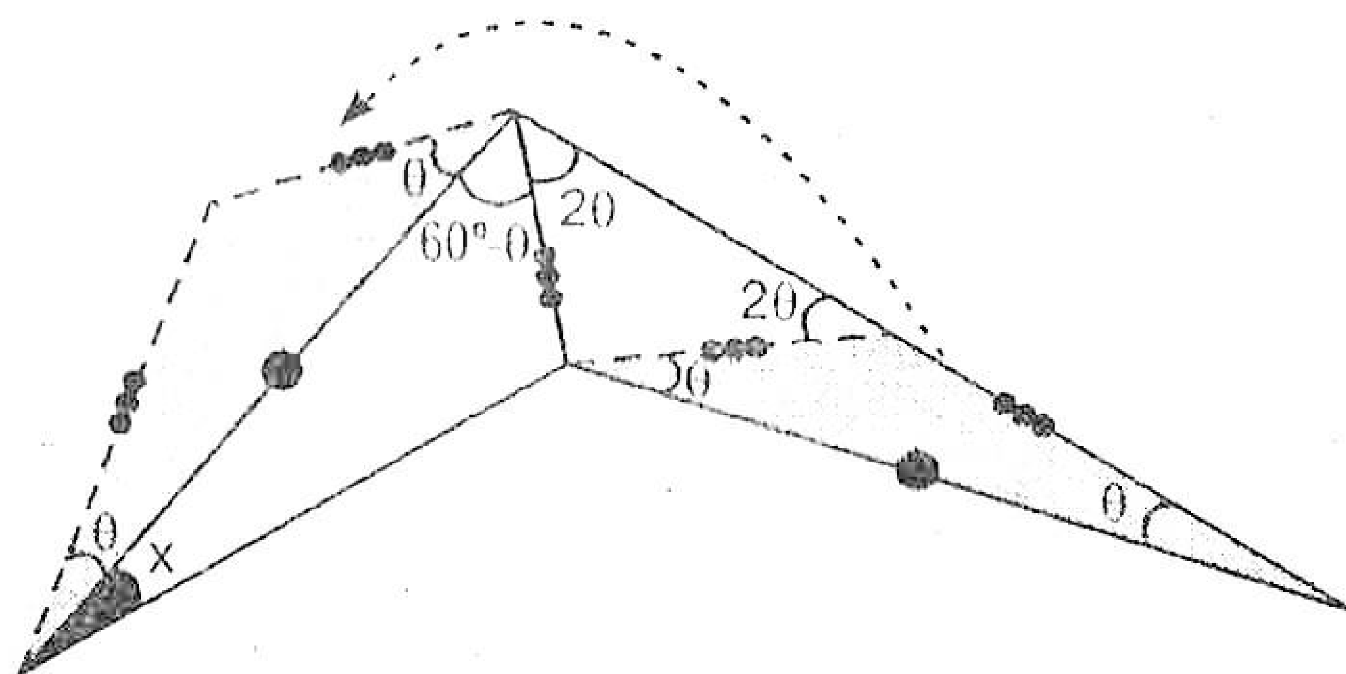
Solución N° 68



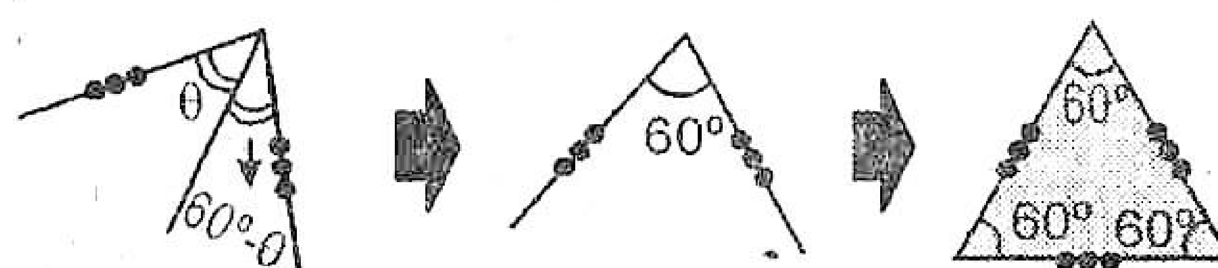
Paso N° 1:
En la figura observamos ángulos en la relación de dos a uno, entonces realizamos el siguiente trazo (Primer criterio de construcción).

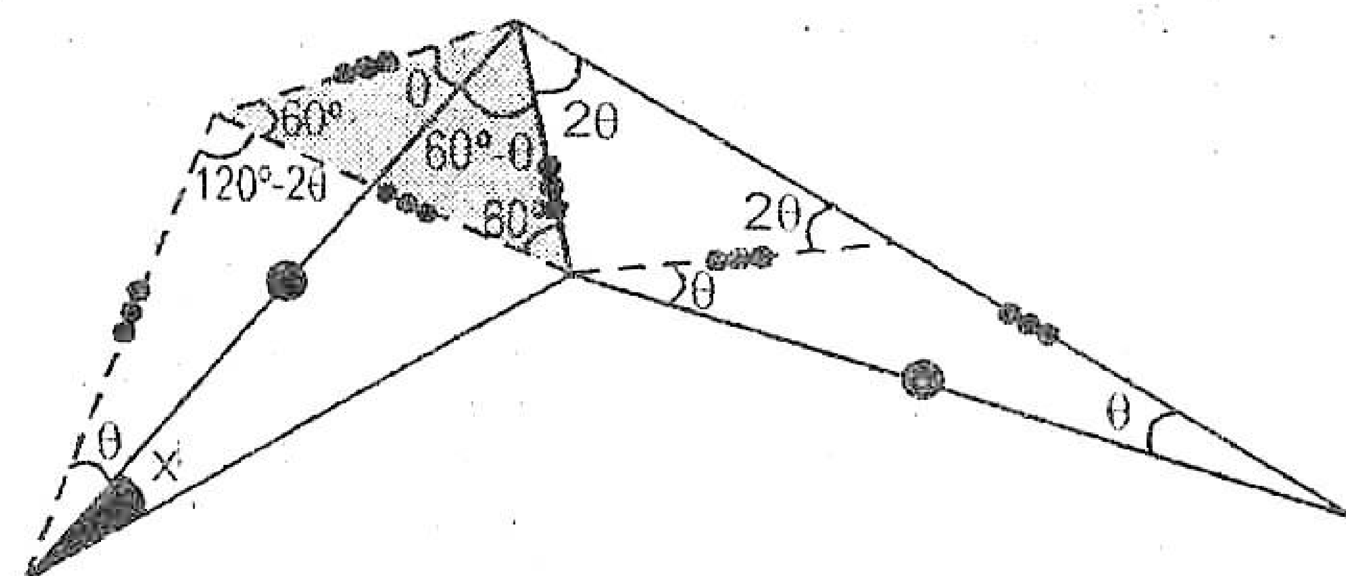


Paso N° 2:
Ahora como observamos lados iguales en forma alternada, entonces formamos triángulos congruentes de la siguiente manera.

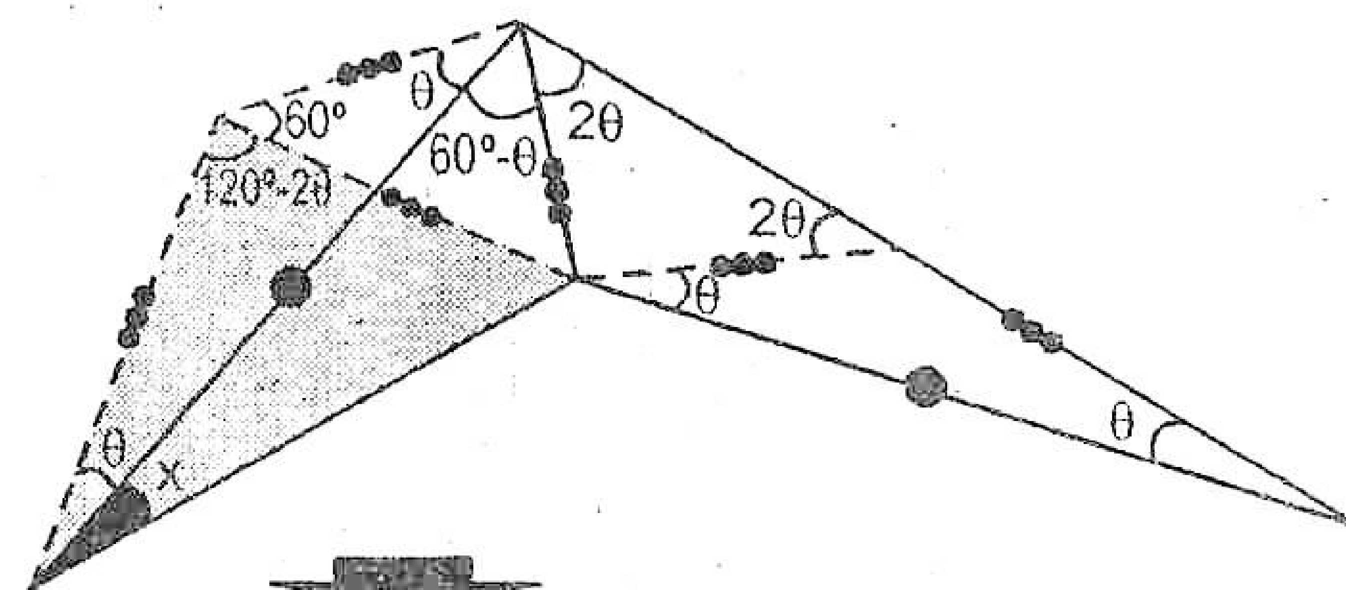


Paso N° 3:
Con el trazo realizado se observa que se ha obtenido un triángulo equilátero.

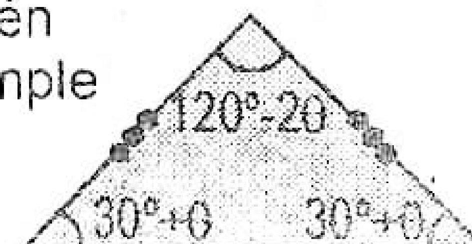




Paso N° 4: Luego tenemos un triángulo isósceles, dondé se cumple:



También se cumple



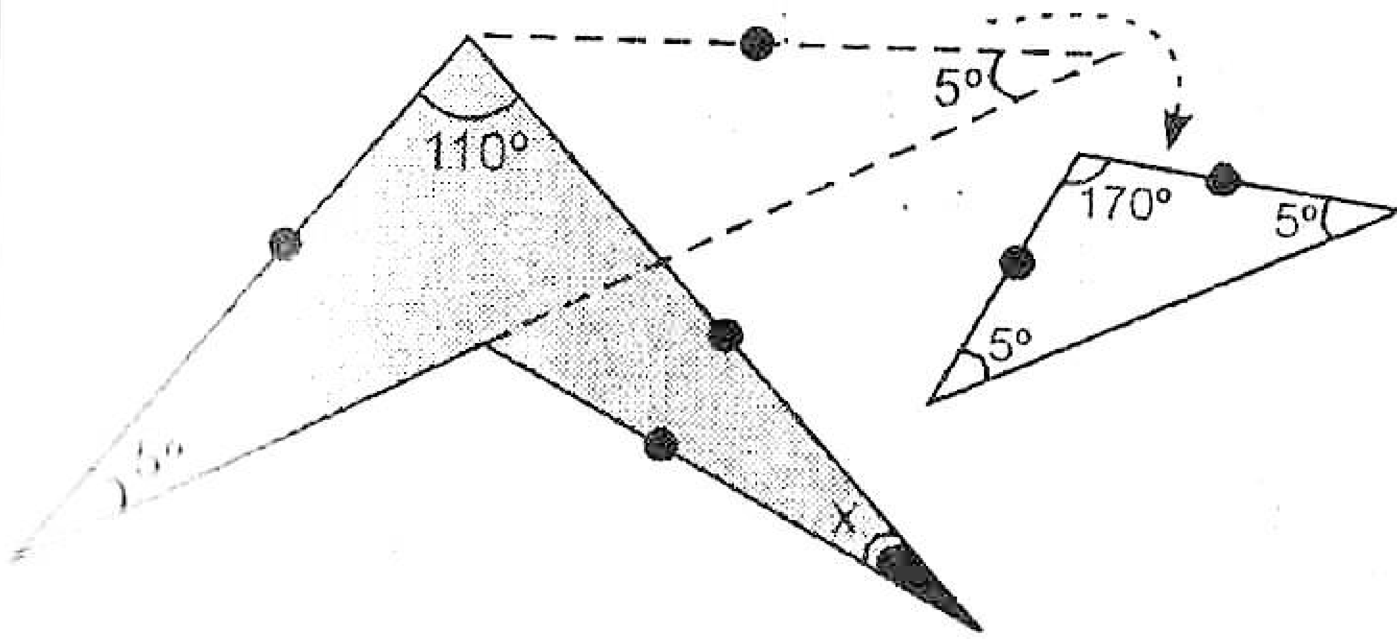
En la figura:

$$\therefore \quad x+\theta = 30°+\theta$$
$$x = 30°$$

Solución Nº 69

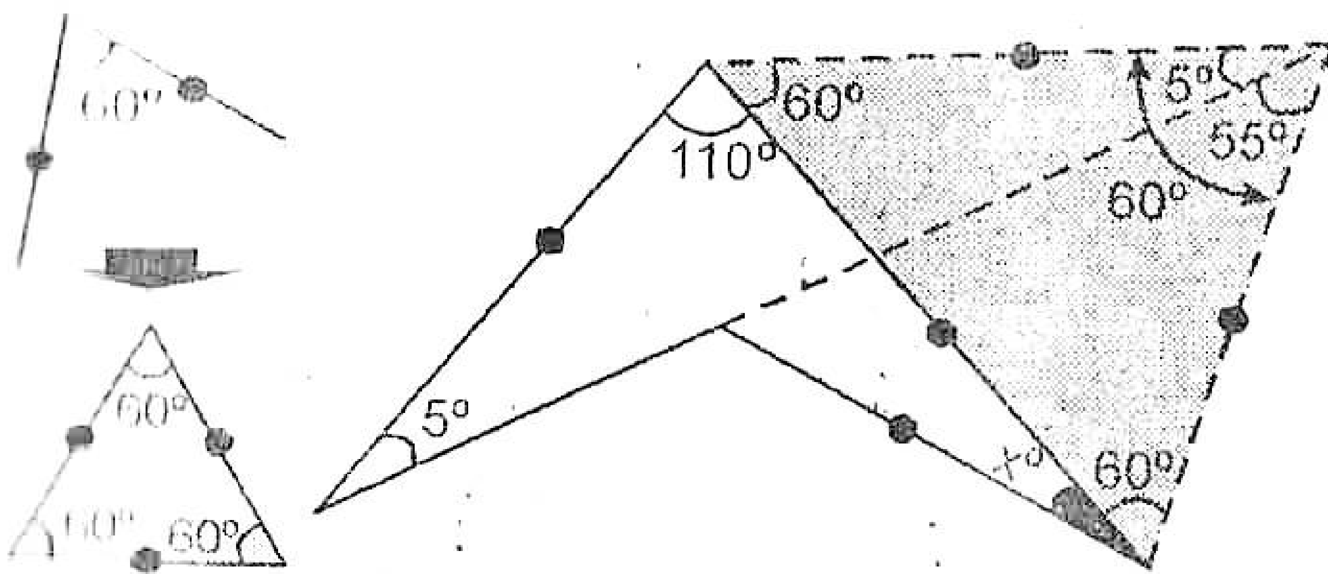
Paso Nº 1:

En la figura se observa que podemos obtener un triángulo isósceles realizando el siguiente trazo. El sexto criterio de construcción.



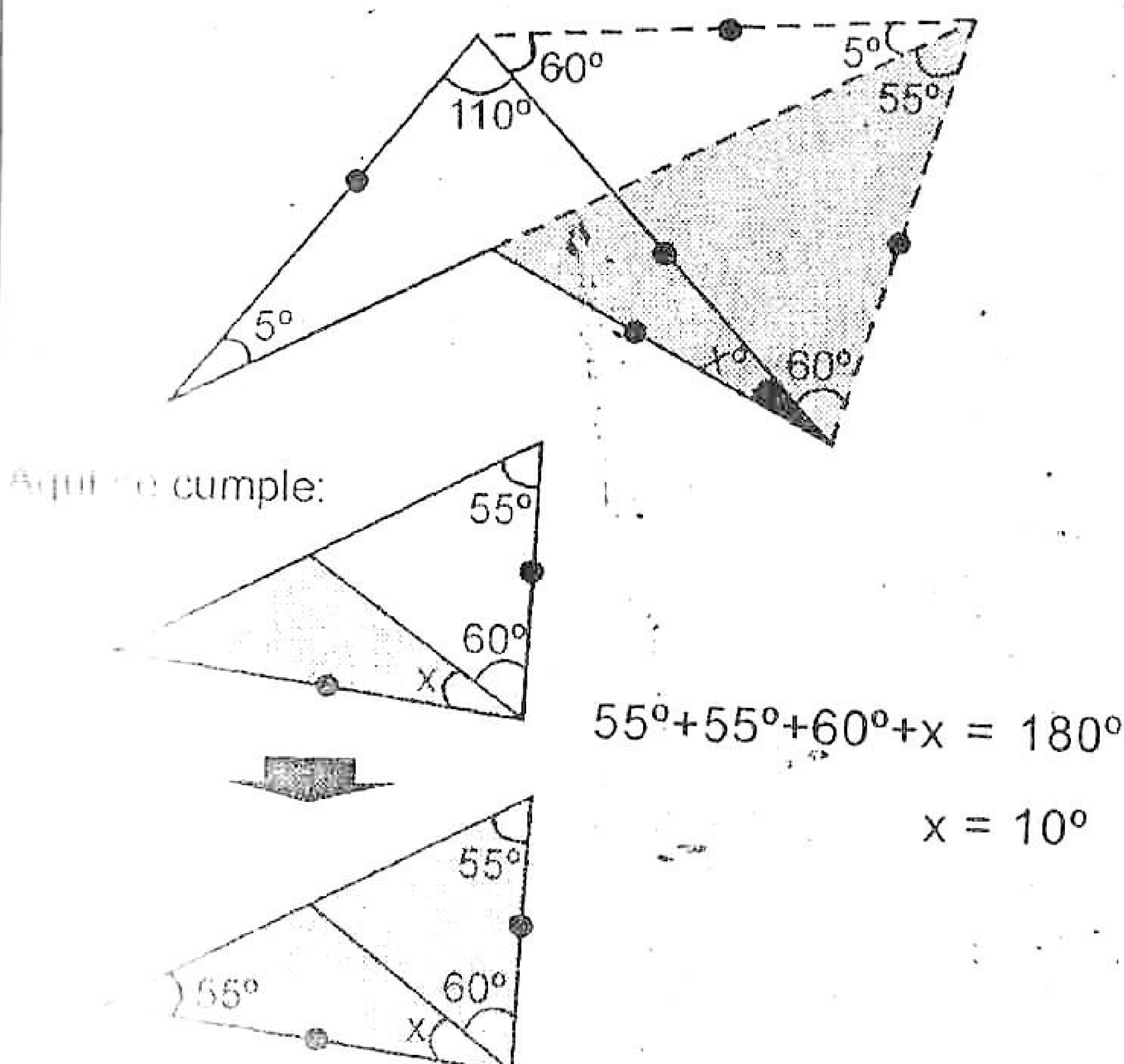
Paso Nº 2:

Con el trazo realizado se observa que obtenemos un ángulo de 60º y también lados iguales donde se cumple la siguiente propiedad.



Paso Nº 3:

Ahora observamos un triángulo isósceles en la figura sombreada.



Aquí se cumple:

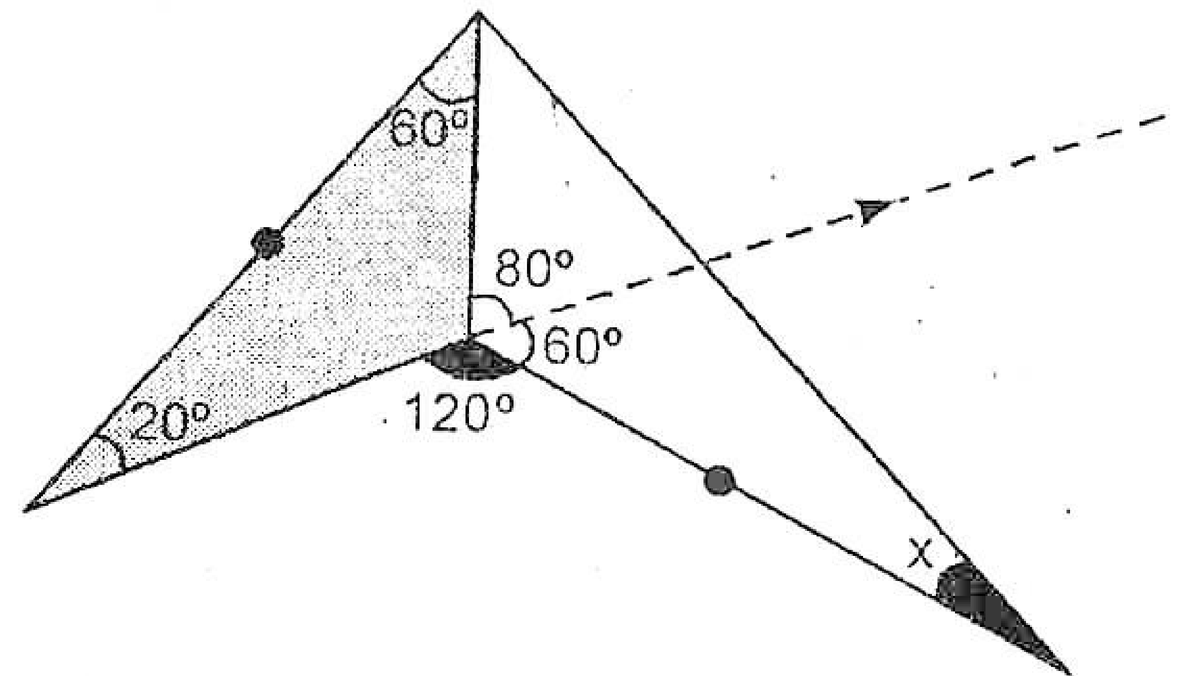
$55^\circ+55^\circ+60^\circ+x = 180^\circ$

$x = 10^\circ$

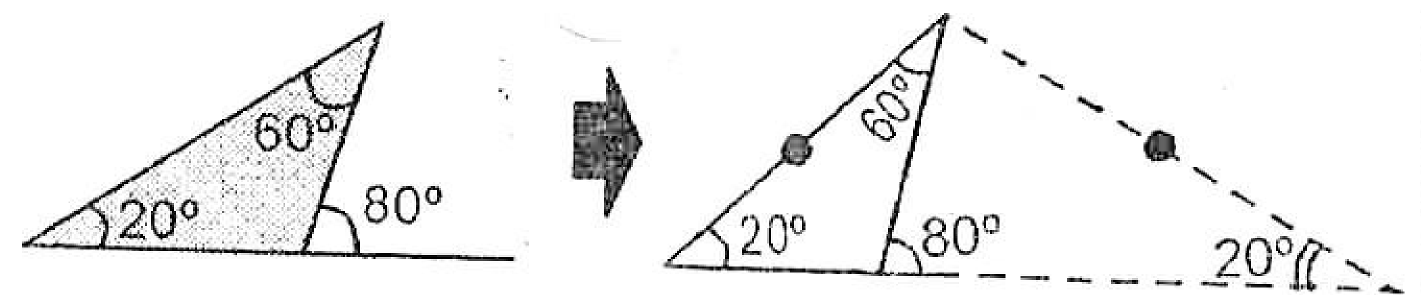
Solución Nº 70

Paso Nº 1:

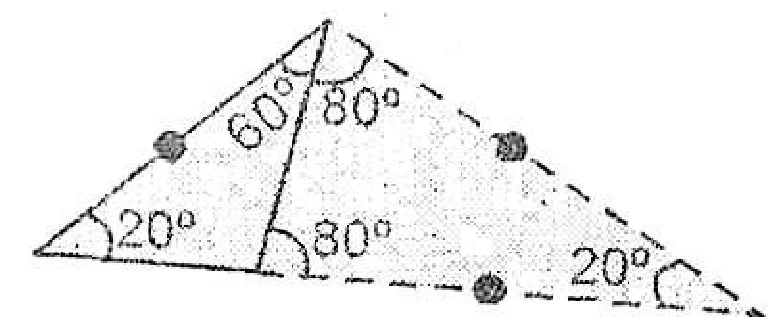
En la figura mostrada se observa:

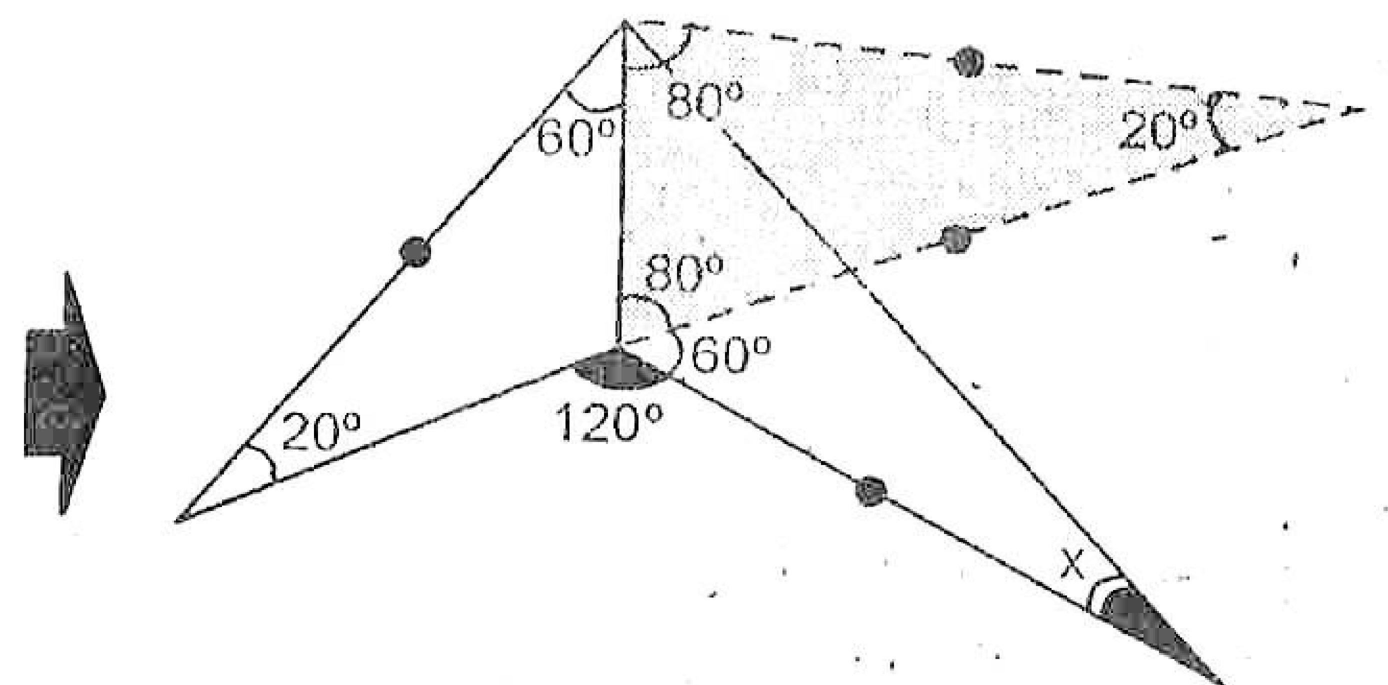


Se realiza el siguiente trazo para obtener un triángulo isósceles (Sexto criterio de construcción)



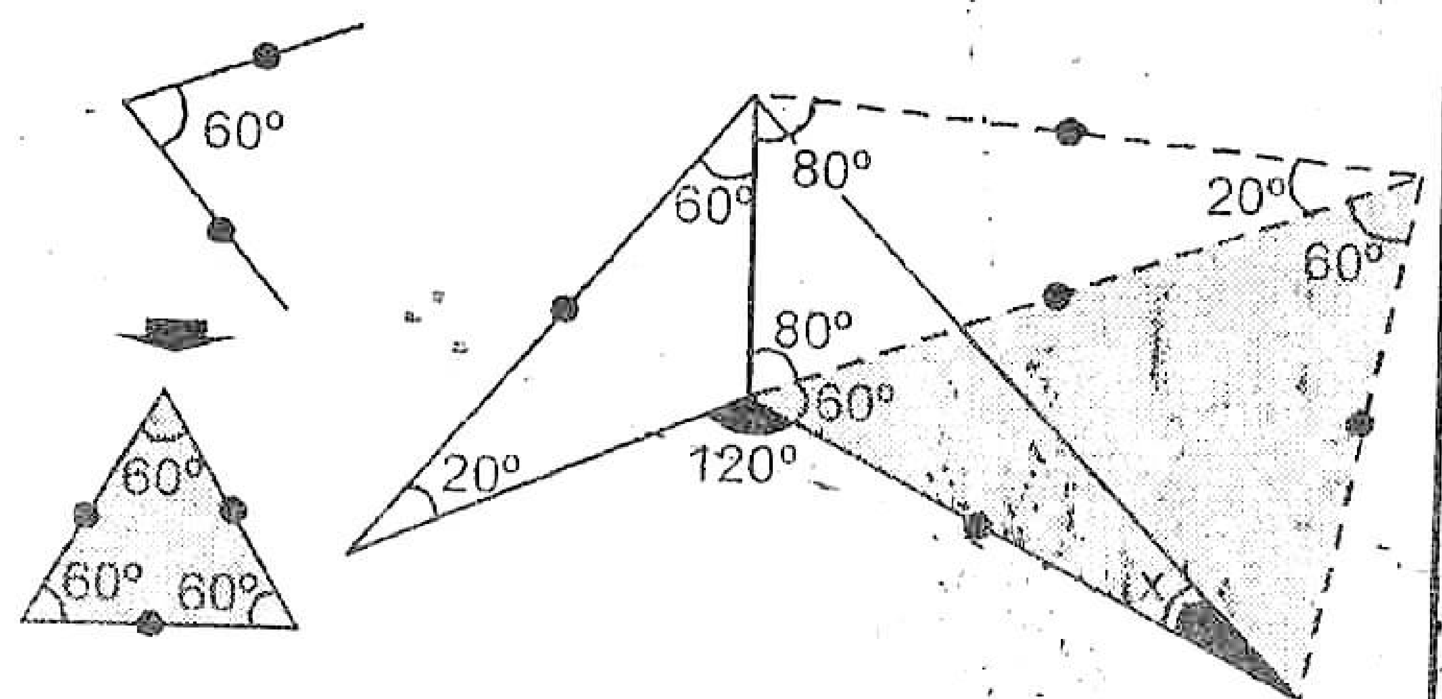
También se obtiene



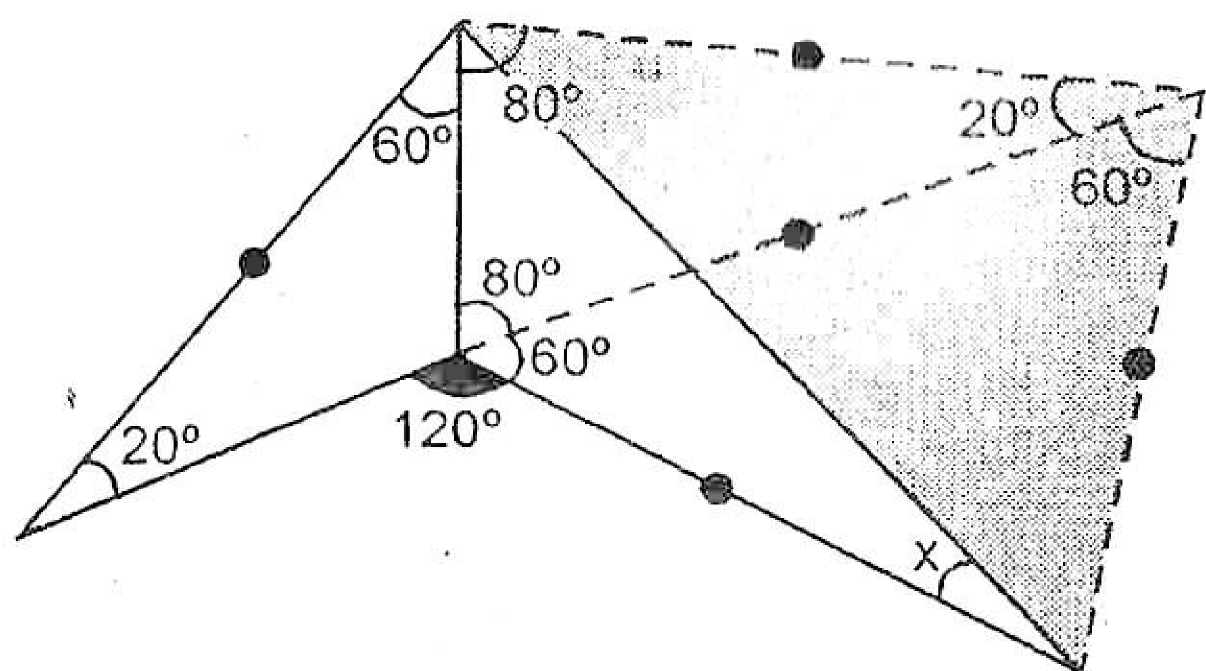


Paso Nº 2:

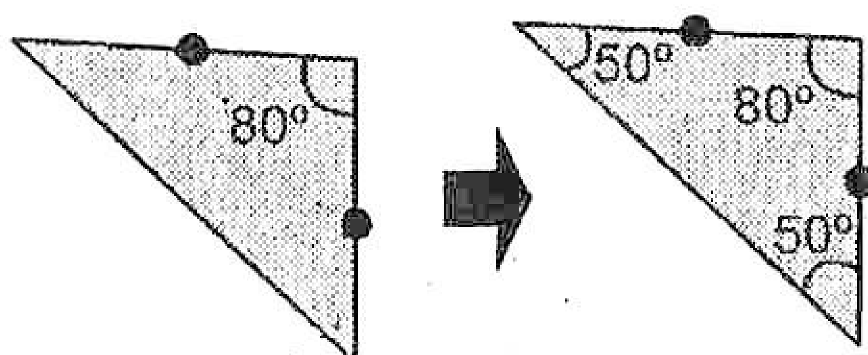
Con el trazo realizado se observa que obtiene un triángulo equilátero en la figura sombreada.



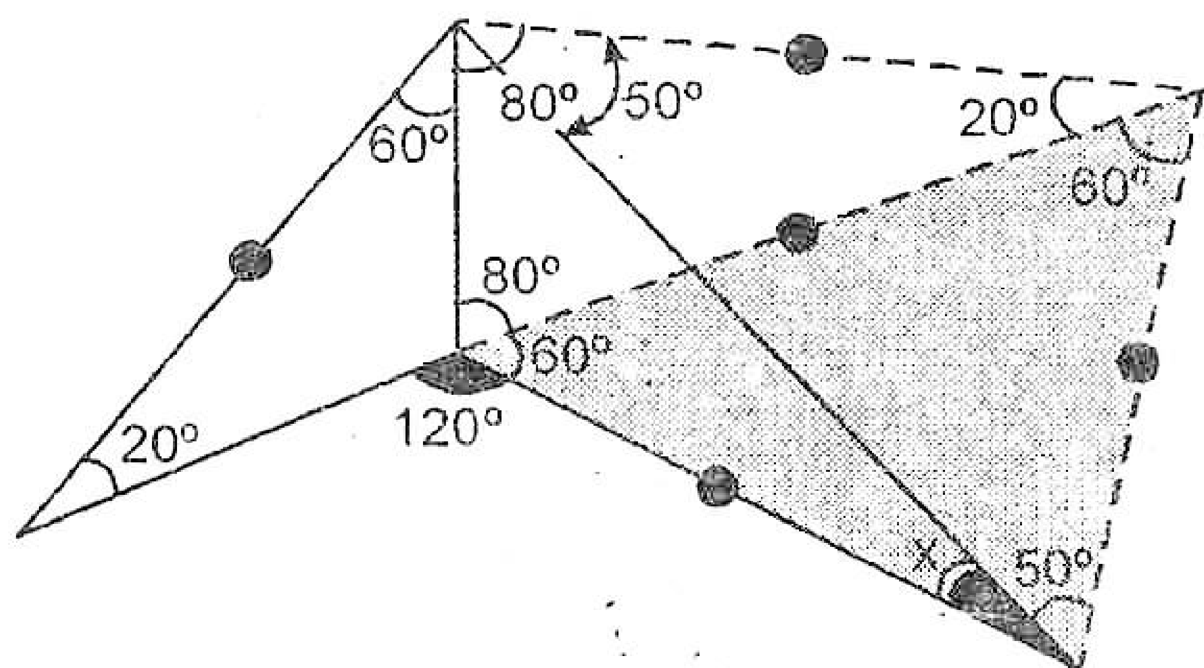
Paso N° 3:
Ahora observamos que se tiene en la figura un nuevo triángulo isósceles.



Aqui se cumple:



Paso N° 4: Se obtiene un nuevo triángulo isósceles, donde cumple:



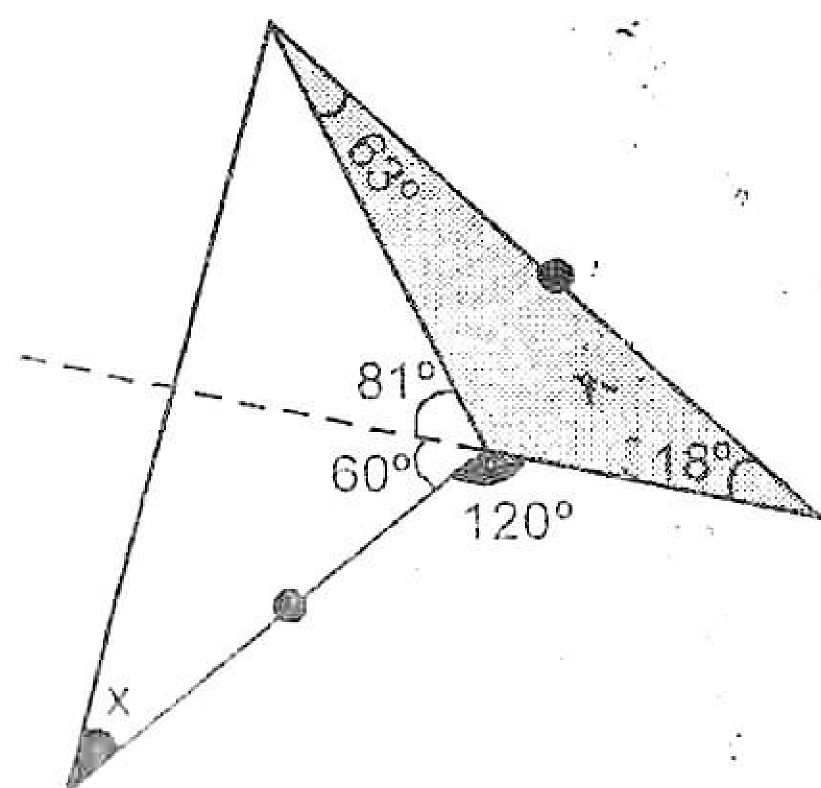
∴ En la figura se observa:

$$x + 50° = 60°$$

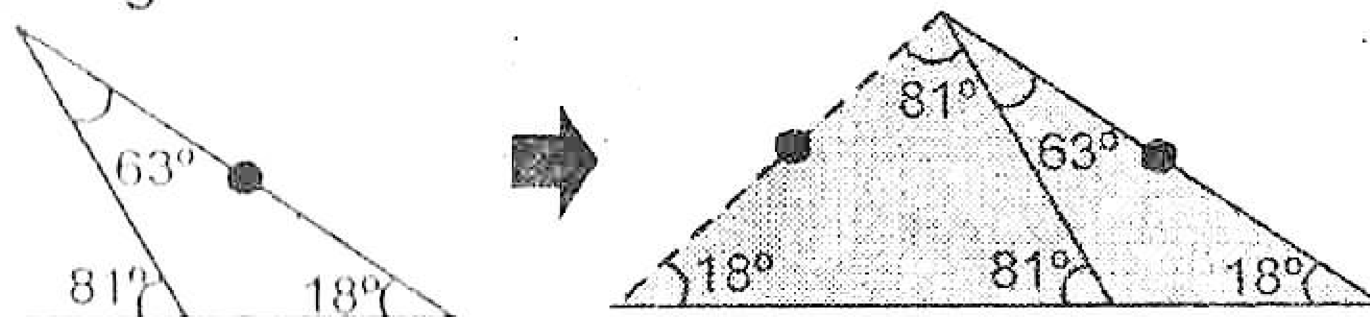
$$x = 10°$$

Solución N° 71

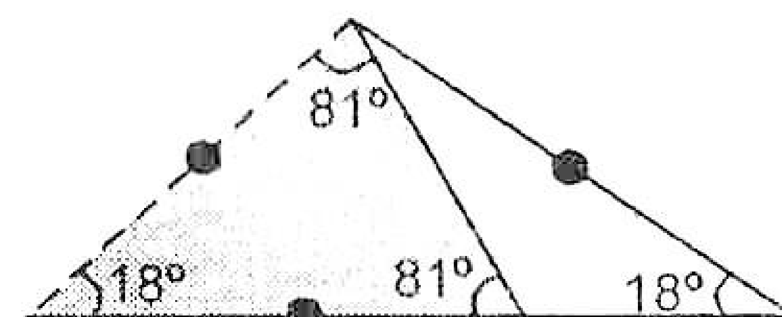
En la figura mostrada se observa:

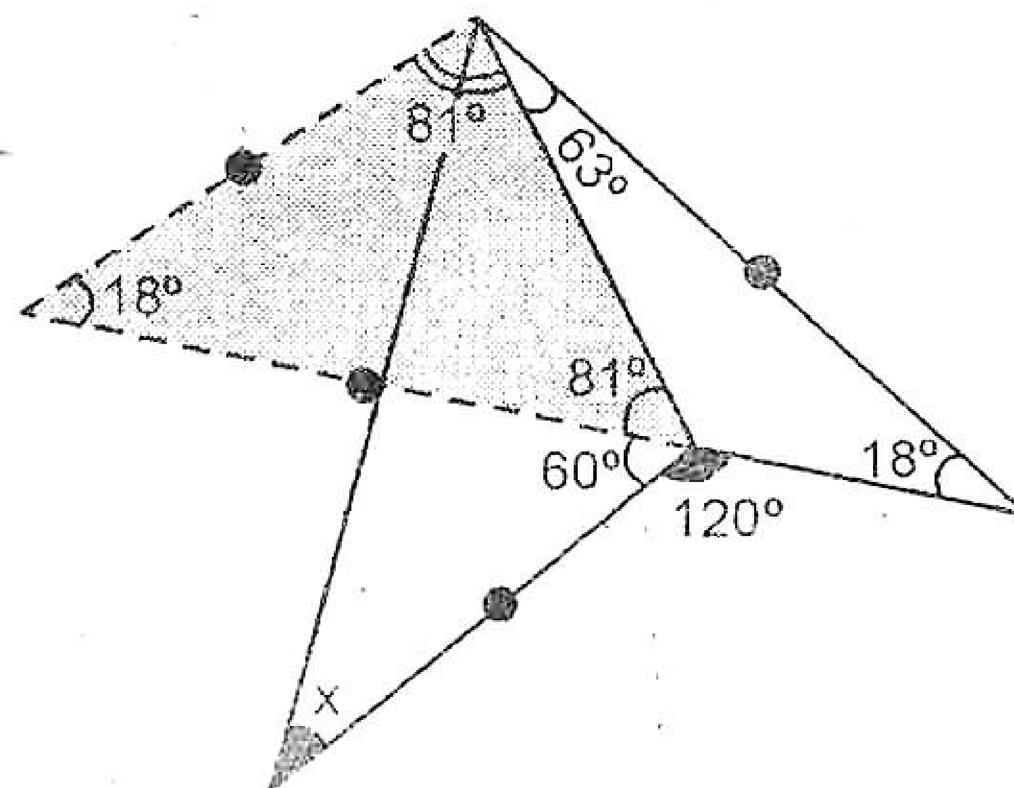


Paso N° 1: En la siguiente figura se realizará el sexto criterio de construcción, para encontrar triángulos isósceles:

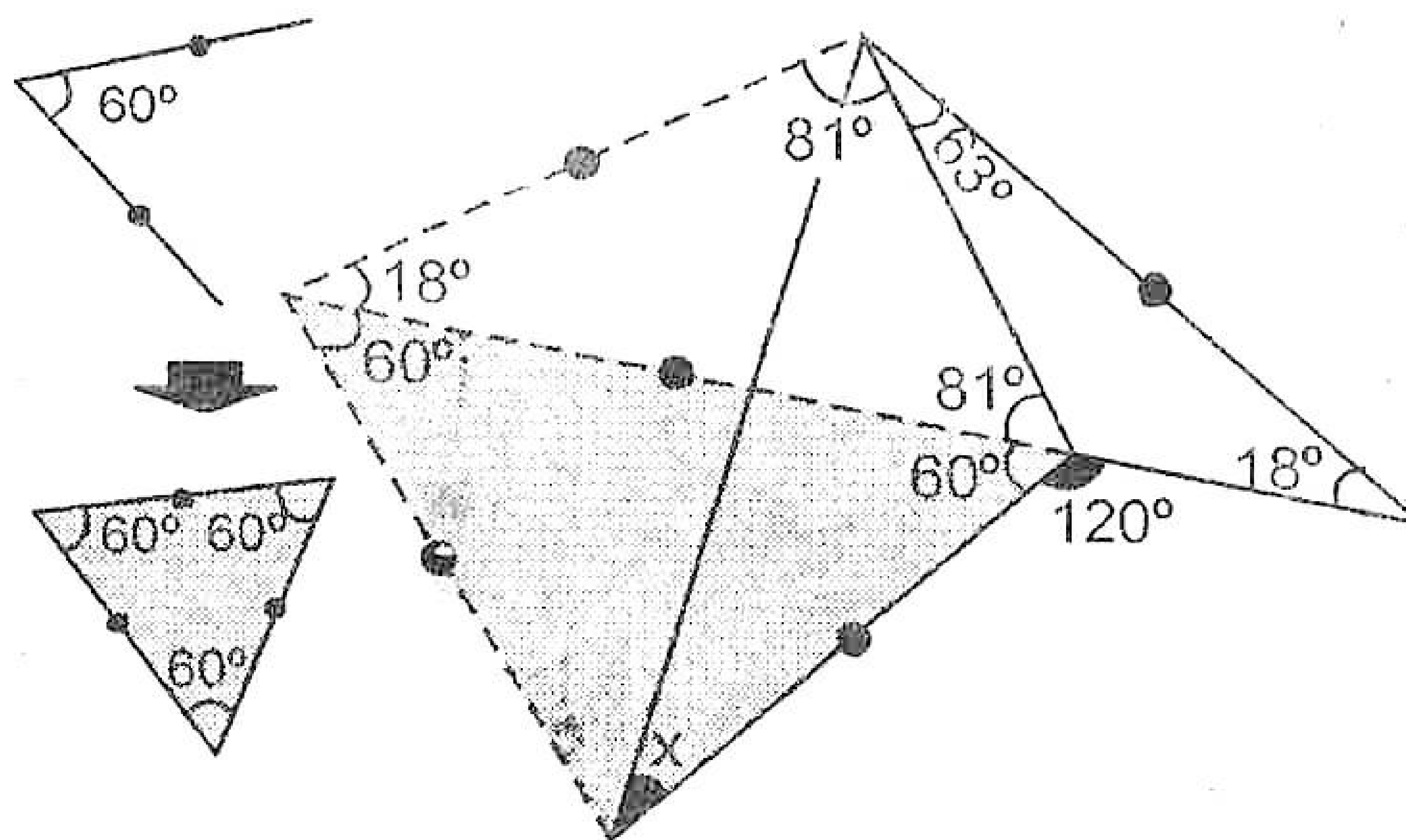


También se obtiene

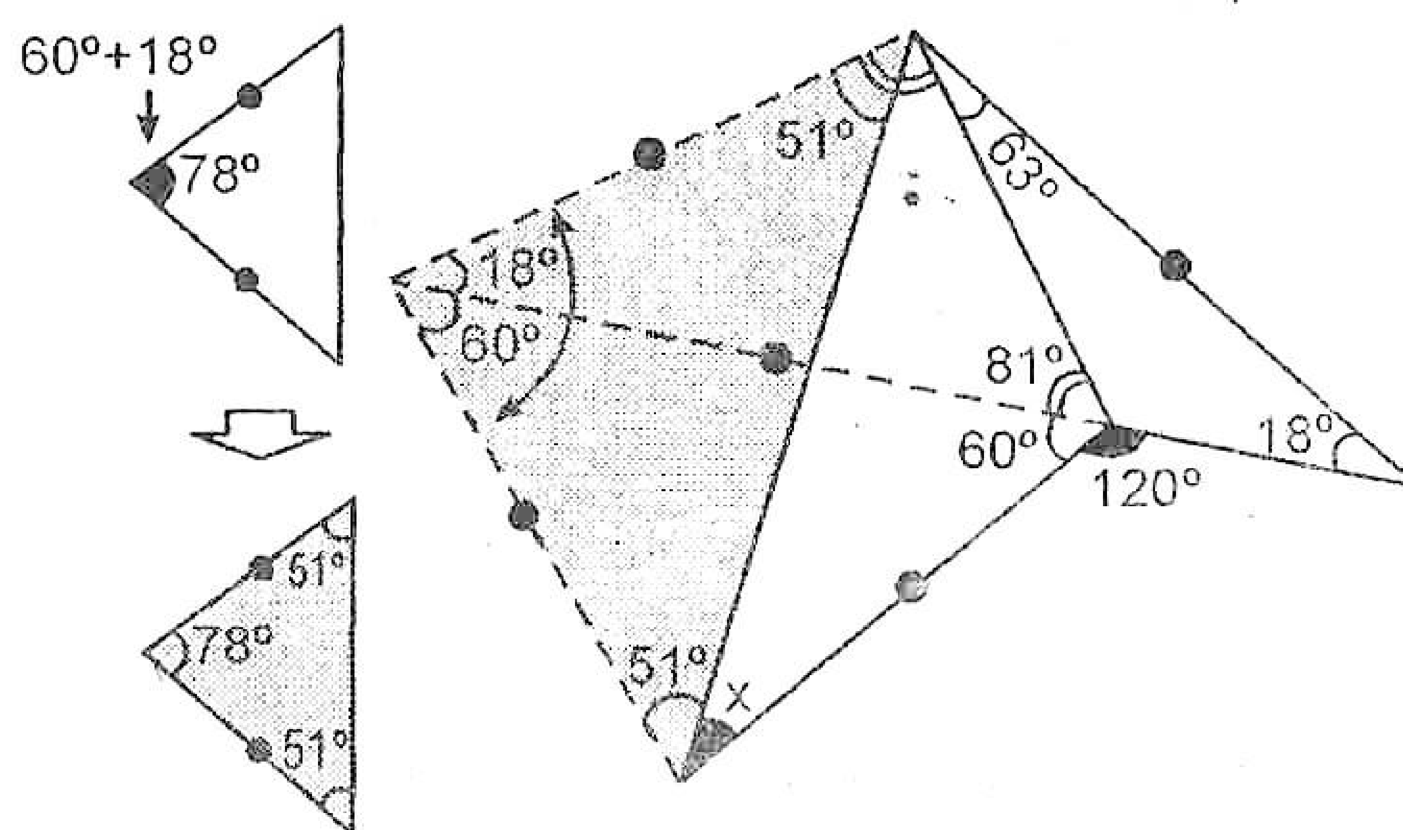




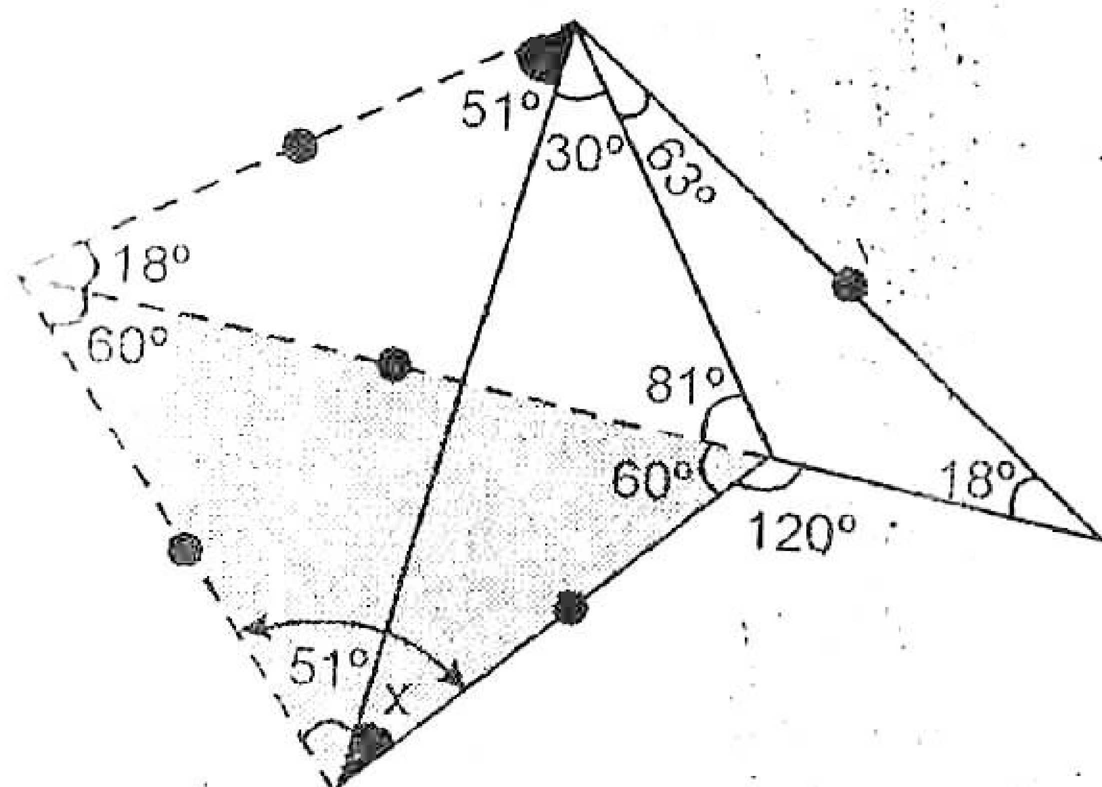
Paso N° 2:
Con el trazo realizado se tiene un triángulo equilátero.



Paso N° 3:
Luego obtenemos un nuevo triángulo isósceles.



Paso N° 4:
... nueva figura se obtiene un triángulo equilátero donde se cumple:

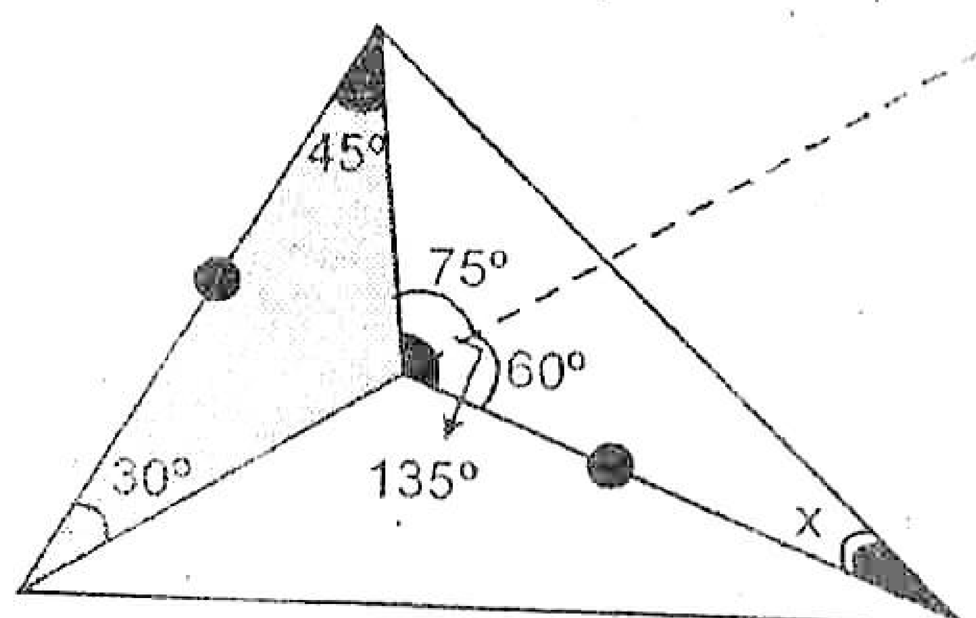


$x + 51° = 60°$

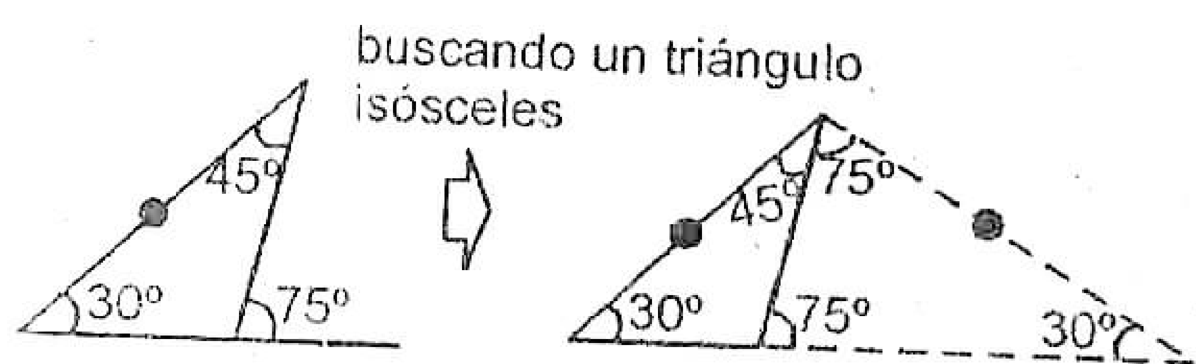
$x = 9°$

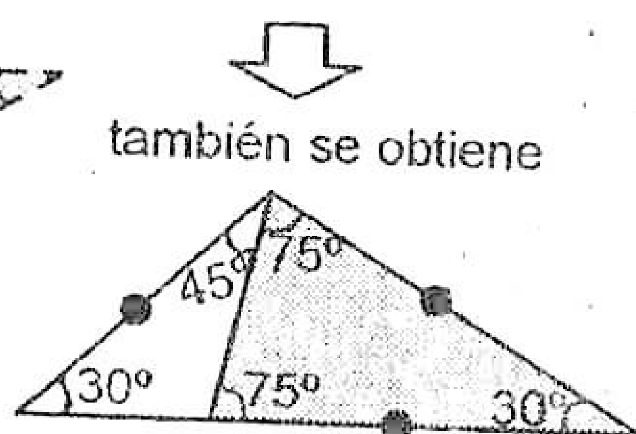
Solución N° 72

En la figura se observa:

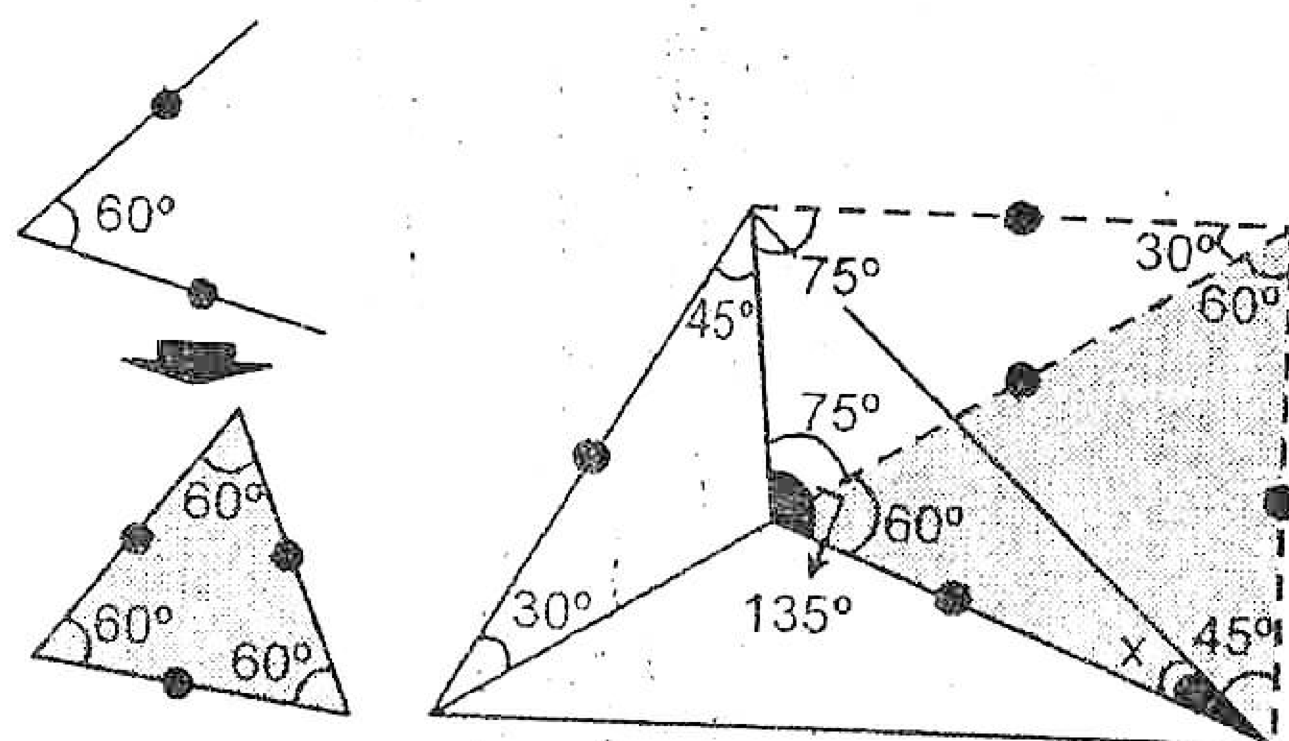


Paso N° 1:
Observamos la siguiente figura en donde realizamos el sexto criterio de construcción.

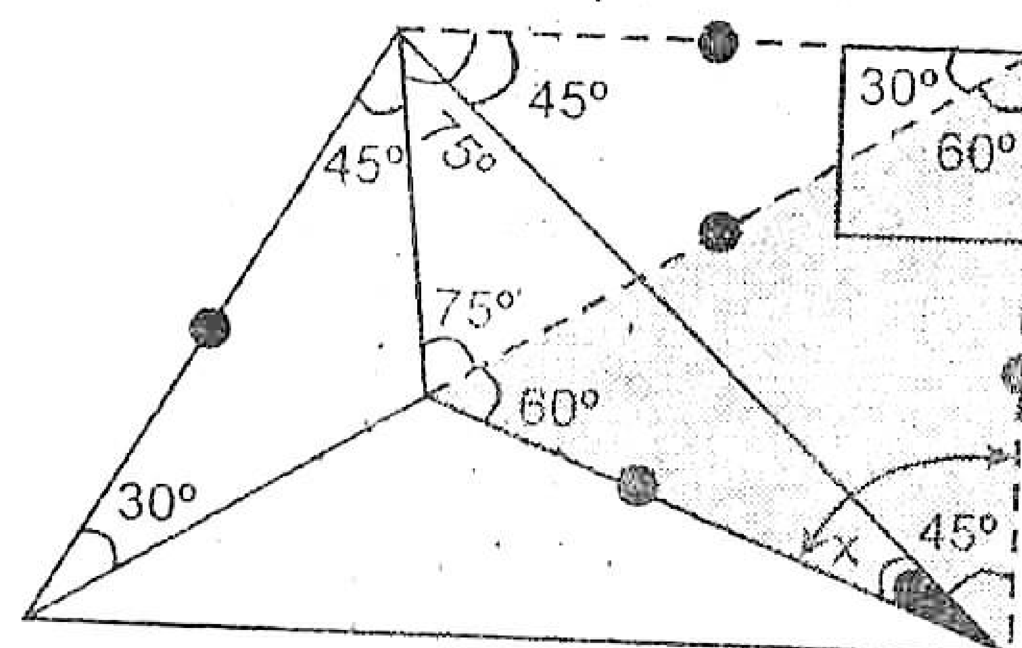




Paso N° 2:
Con el trazo realizado se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



Paso N° 3: Se observa en el triángulo equilátero donde se cumple:

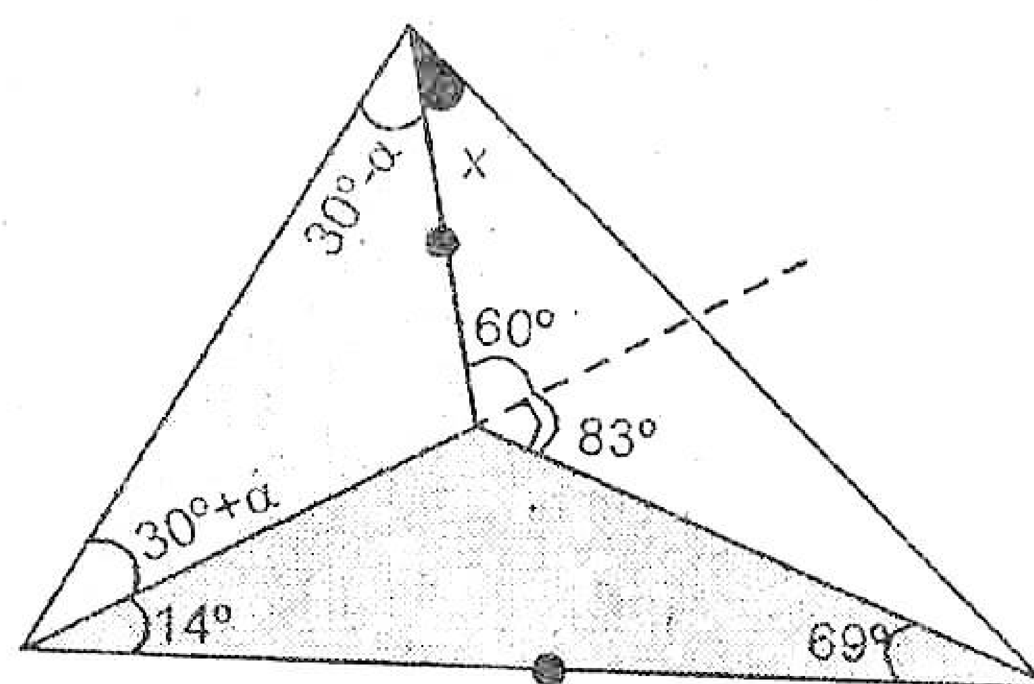


$x + 45° = 90°$

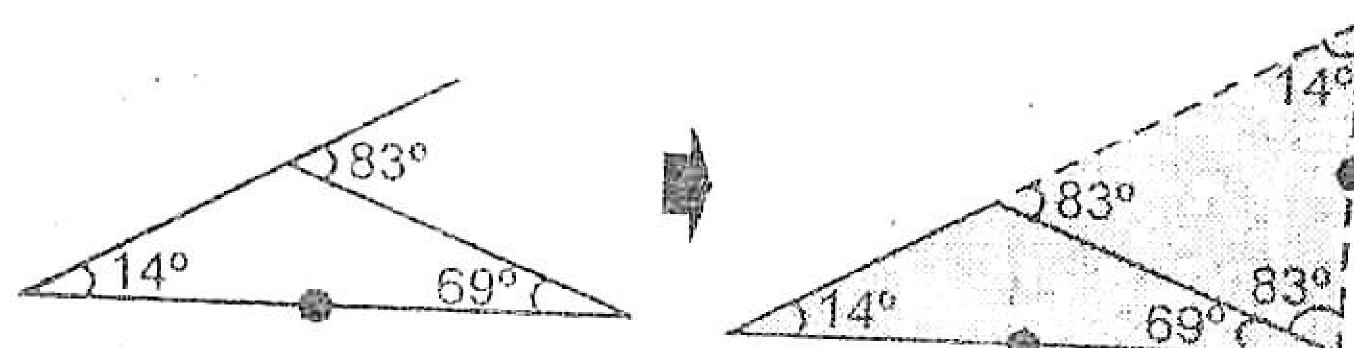
$x = 15°$

Solución N° 73

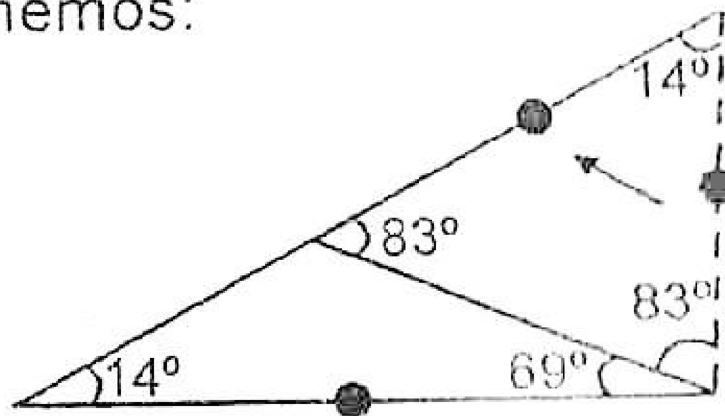
En la figura se observa:



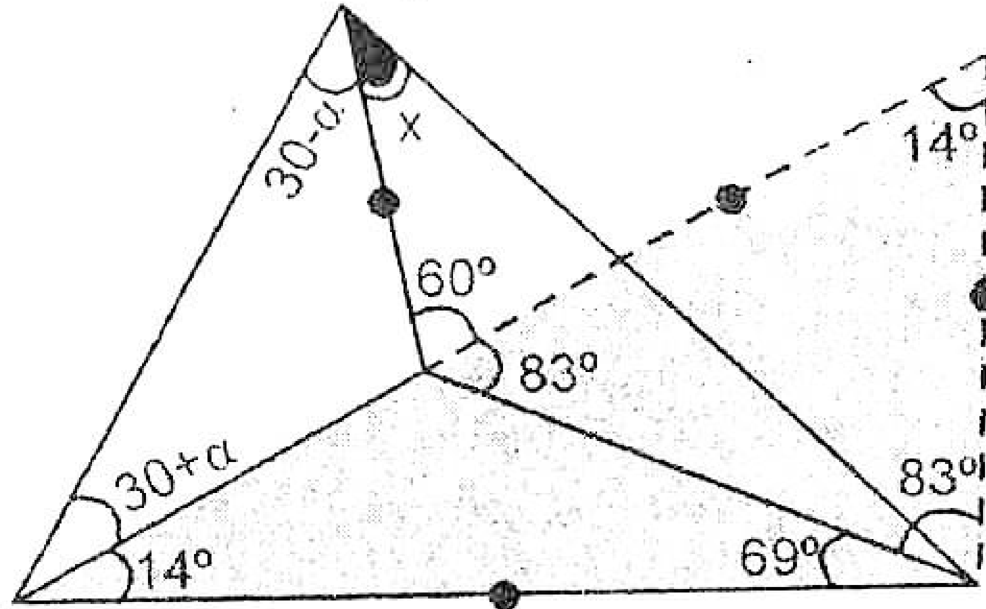
Paso N° 1:
En la figura se realiza el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles (Sexto criterio de construcción)



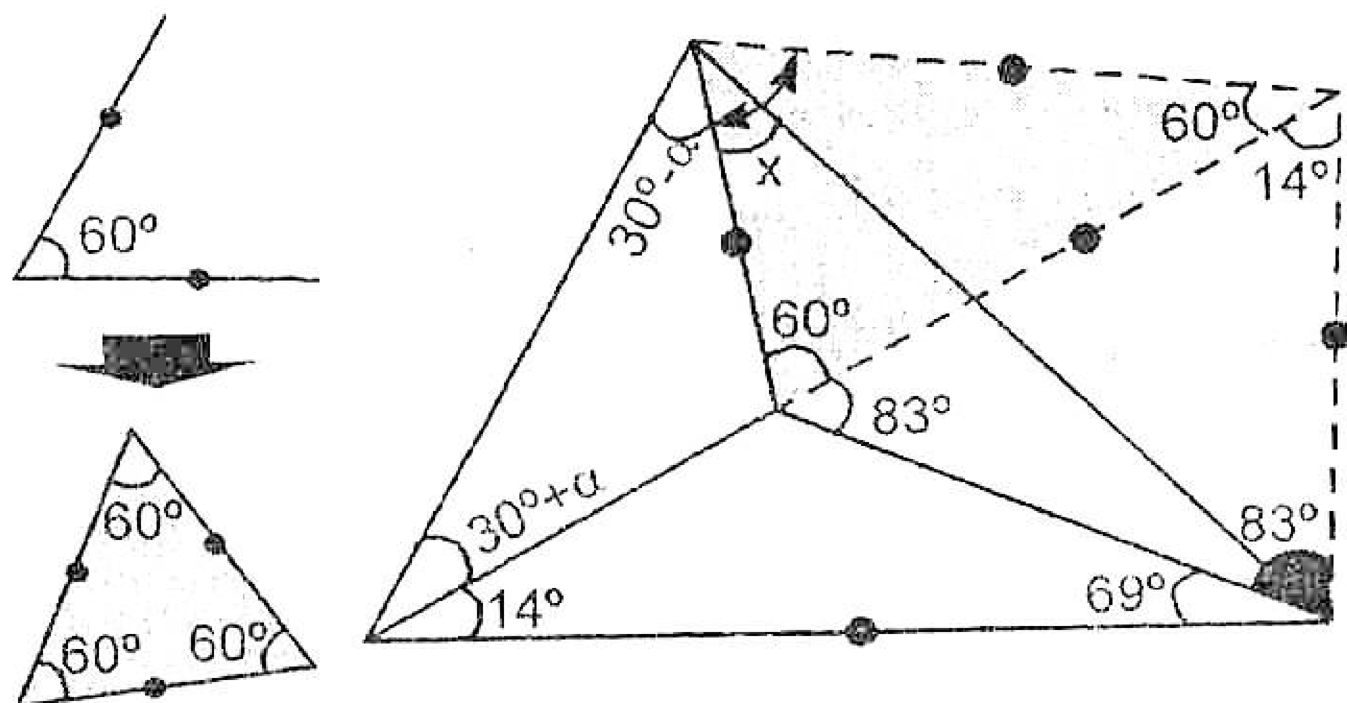
Tambien tenemos:



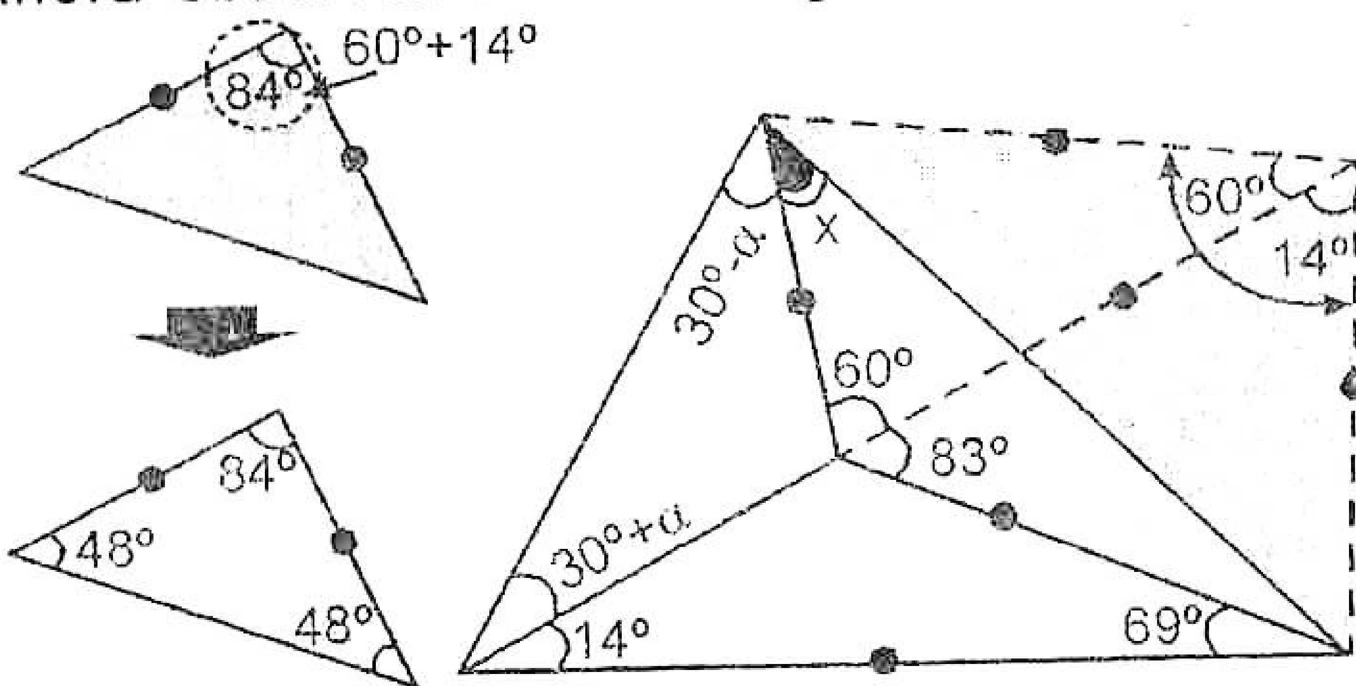
Luego tenemos la siguiente fiugra:



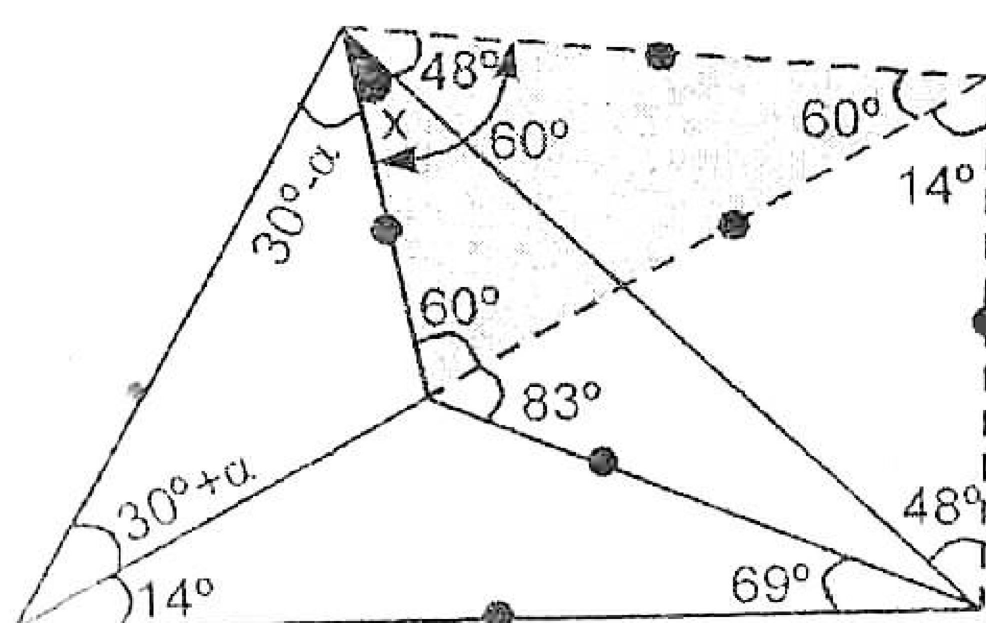
Paso N° 2: Realizado el trazo anterior se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



Paso N° 3:
Ahora observamos un triángulo isósceles.



Paso N° 4: Finalmente observamos en la siguiente figura un nuevo triángulo equilátero.

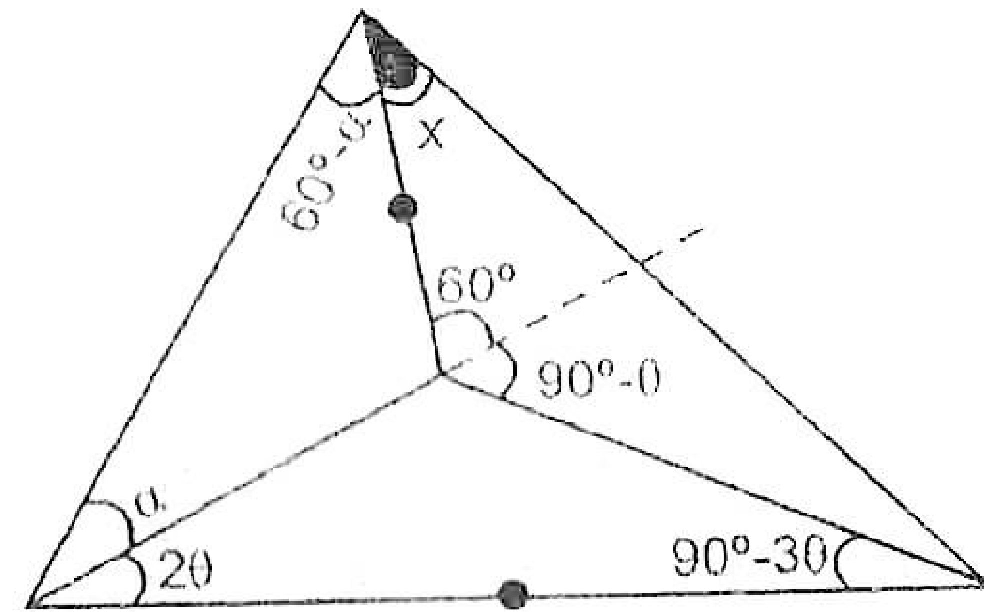


∴ De la figura se cumple:

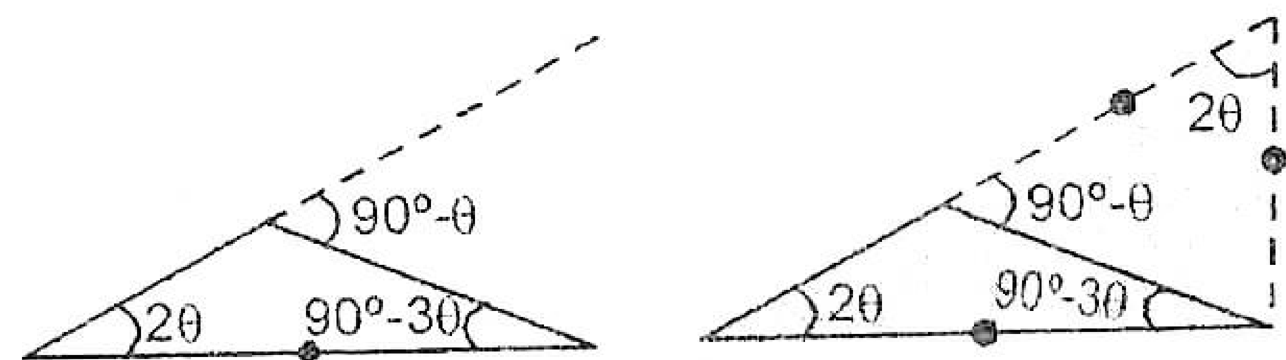
$$x + 48° = 60°$$
$$x = 12°$$

Solución N° 74

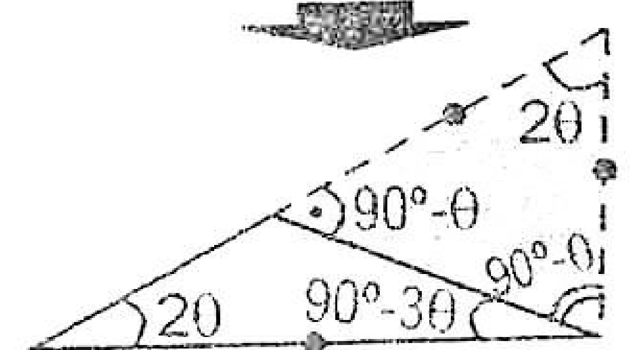
En la figura se observa:



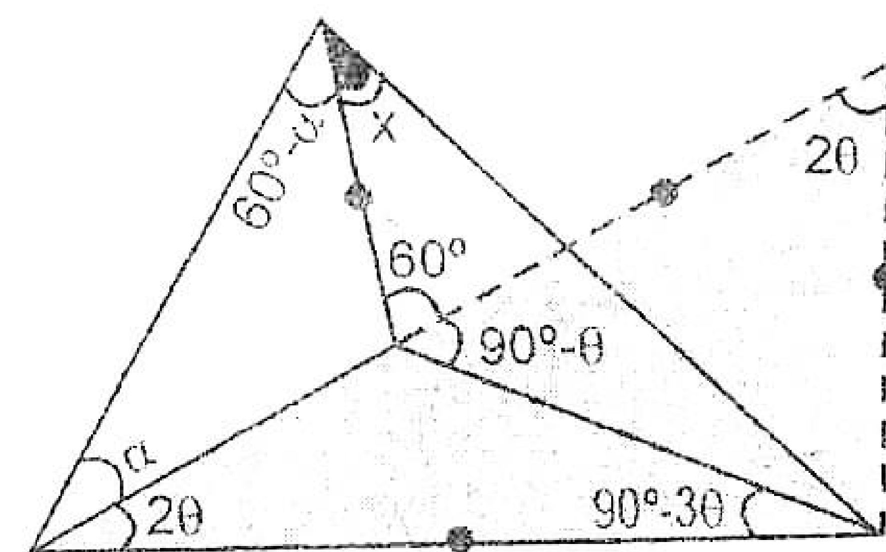
Paso N° 1:
En la figura realizamos el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles (Sexto criterio de construcción).



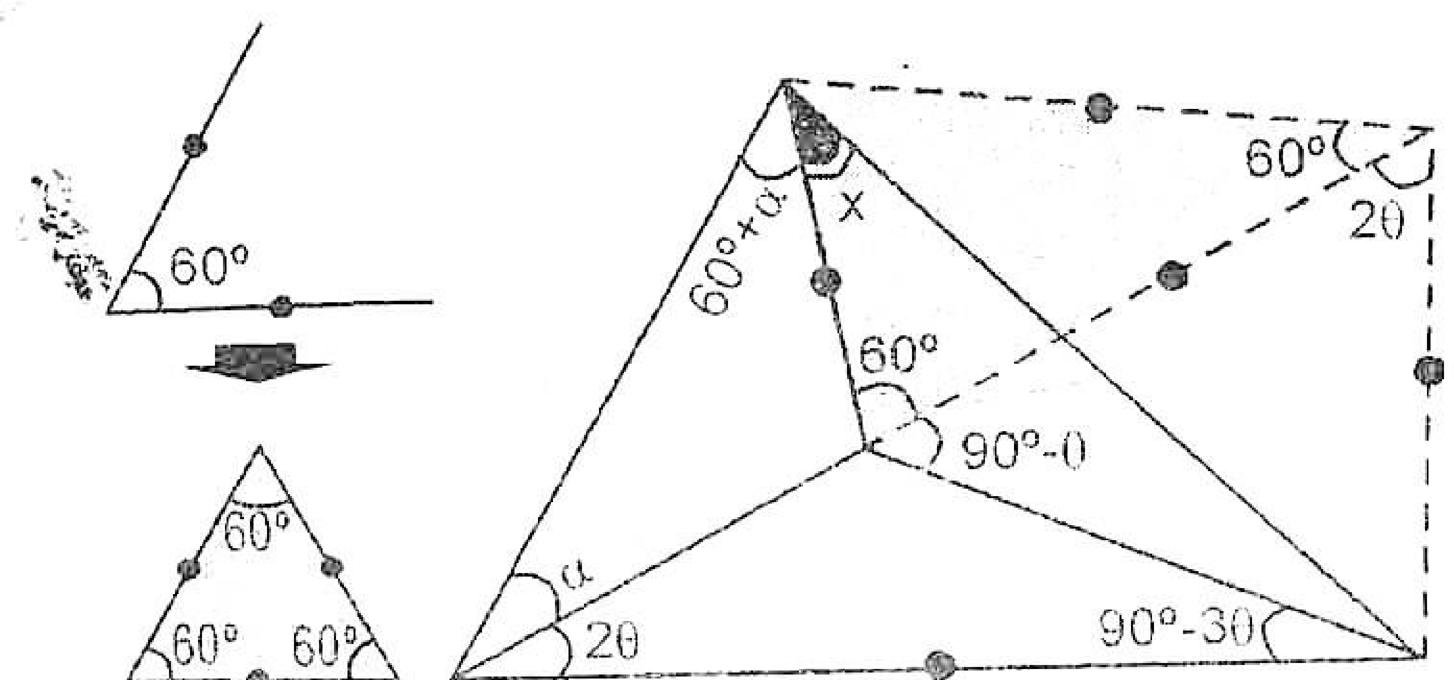
También se cumple:



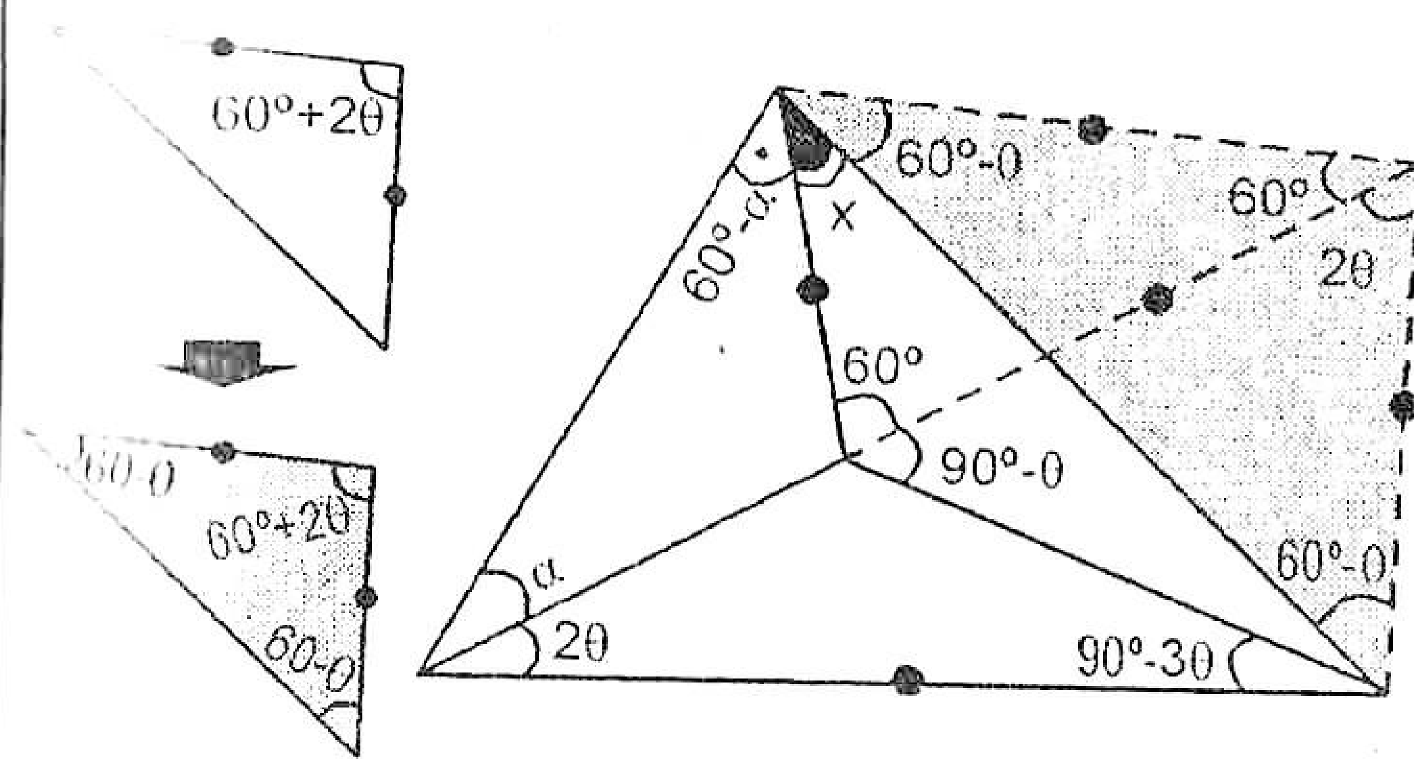
Luego tenemos en la figura:



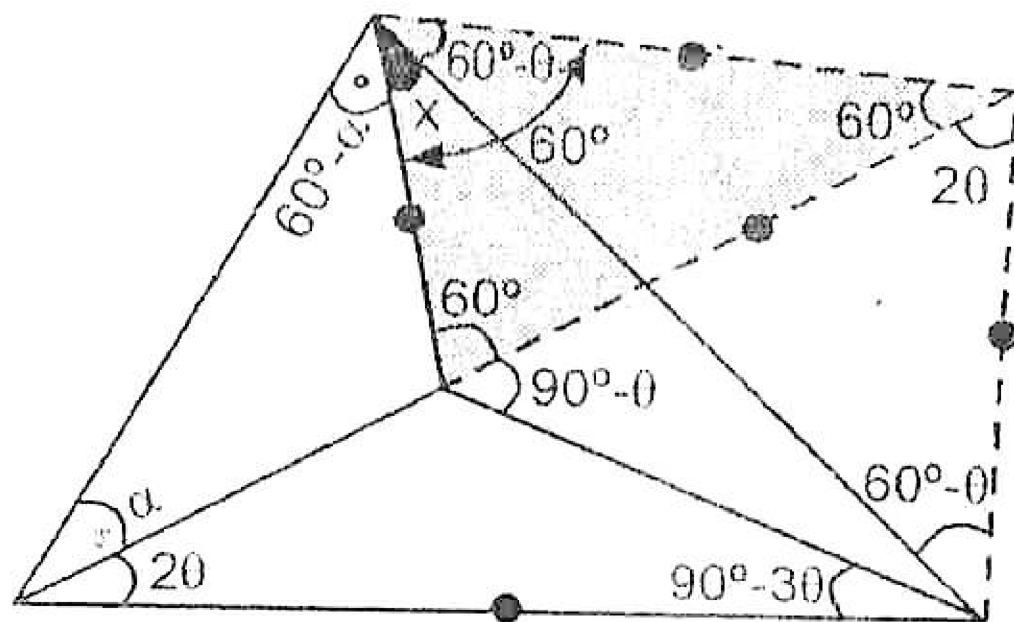
Paso N° 2:
Realizado el trazo anterior se observa que se obtiene un triángulo equilátero.



Paso Nº 3: Luego observamos un triángulo isósceles donde se cumple:



Paso Nº 4: Finalmente tenemos en la siguiente figura un nuevo triángulo equilátero.

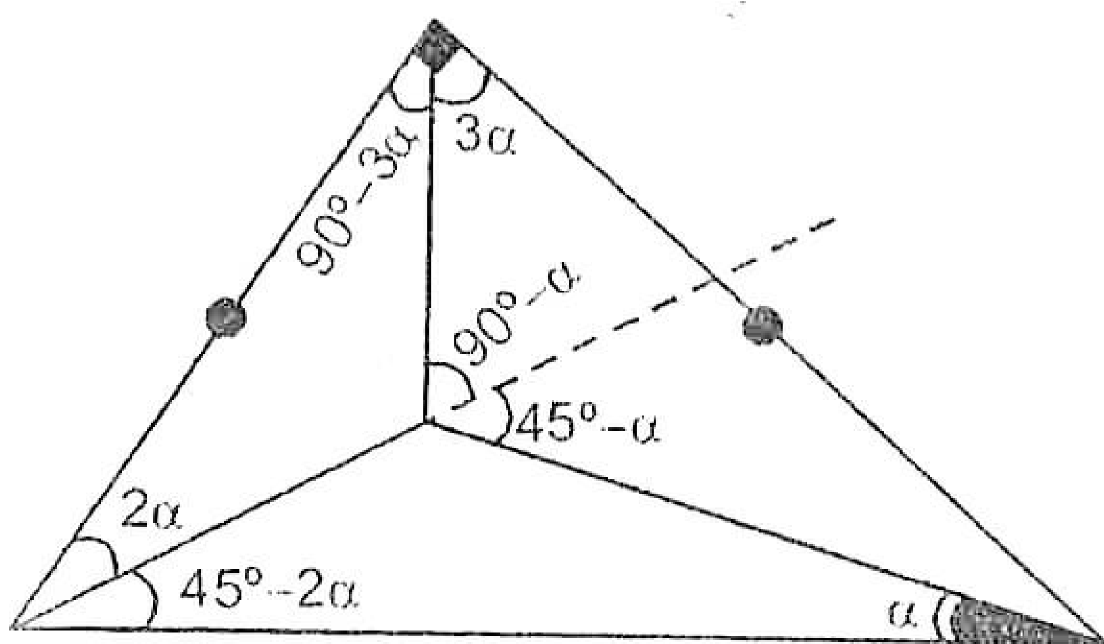


$$\therefore\ x + 60° - \theta = 60°$$

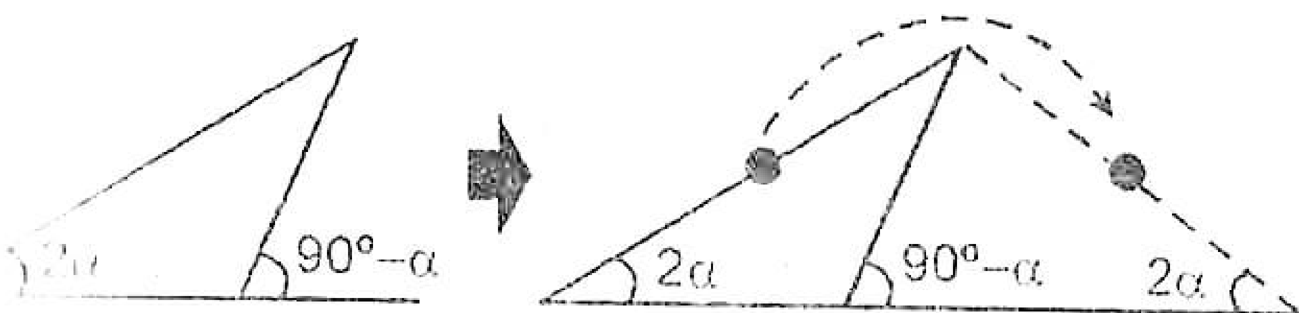
$$x = \theta°$$

Solución Nº 75

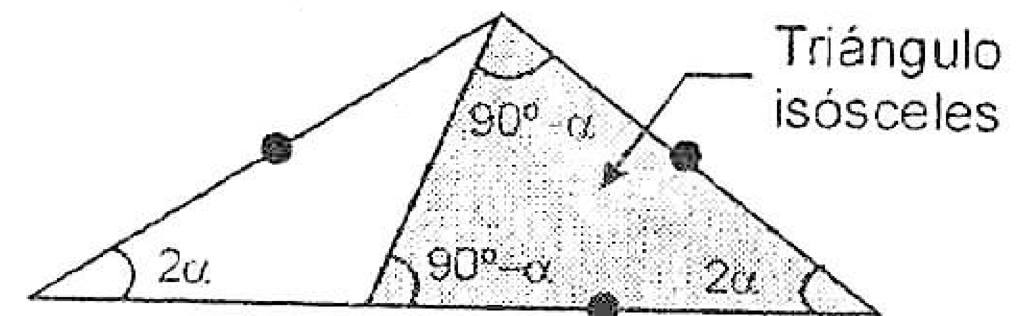
En la figura se observa:



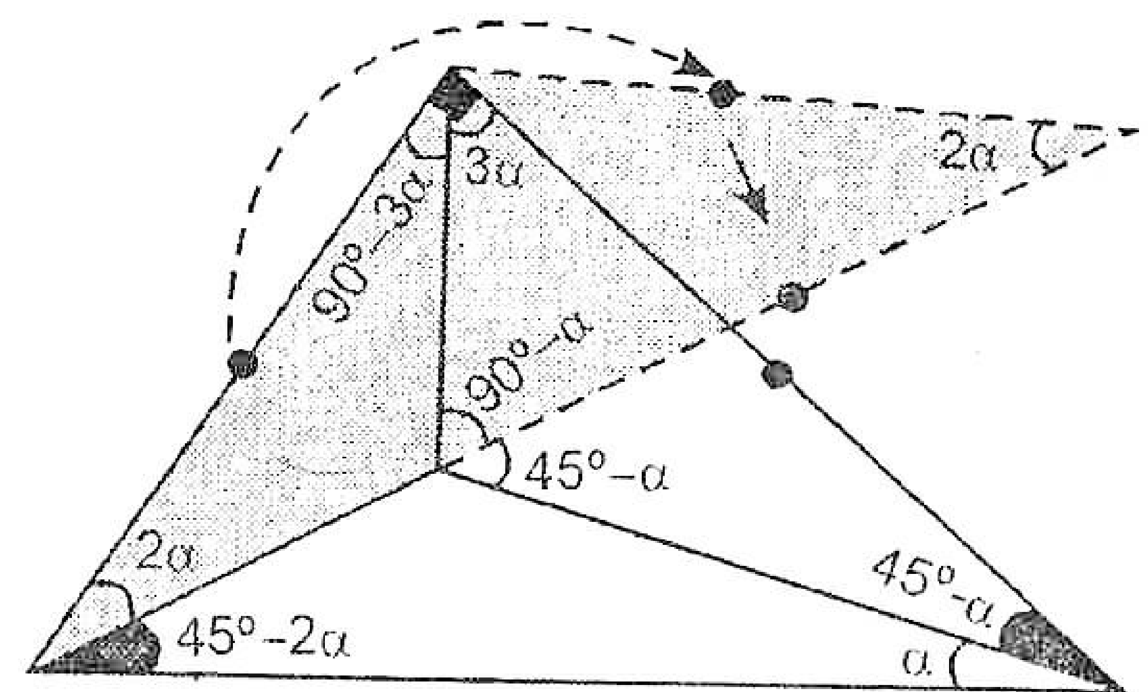
Paso Nº 1: En la siguiente figura se realiza el siguiente trazo (Sexto criterio de construcción) para obtener triángulos isósceles.



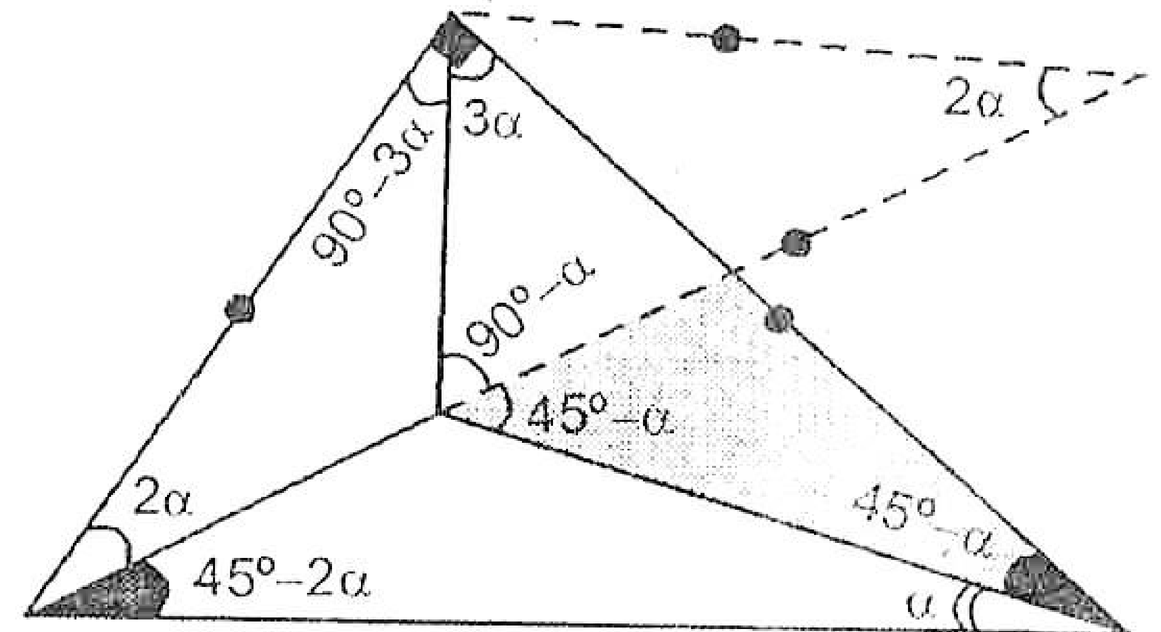
También se obtiene:



Luego obtenemos:

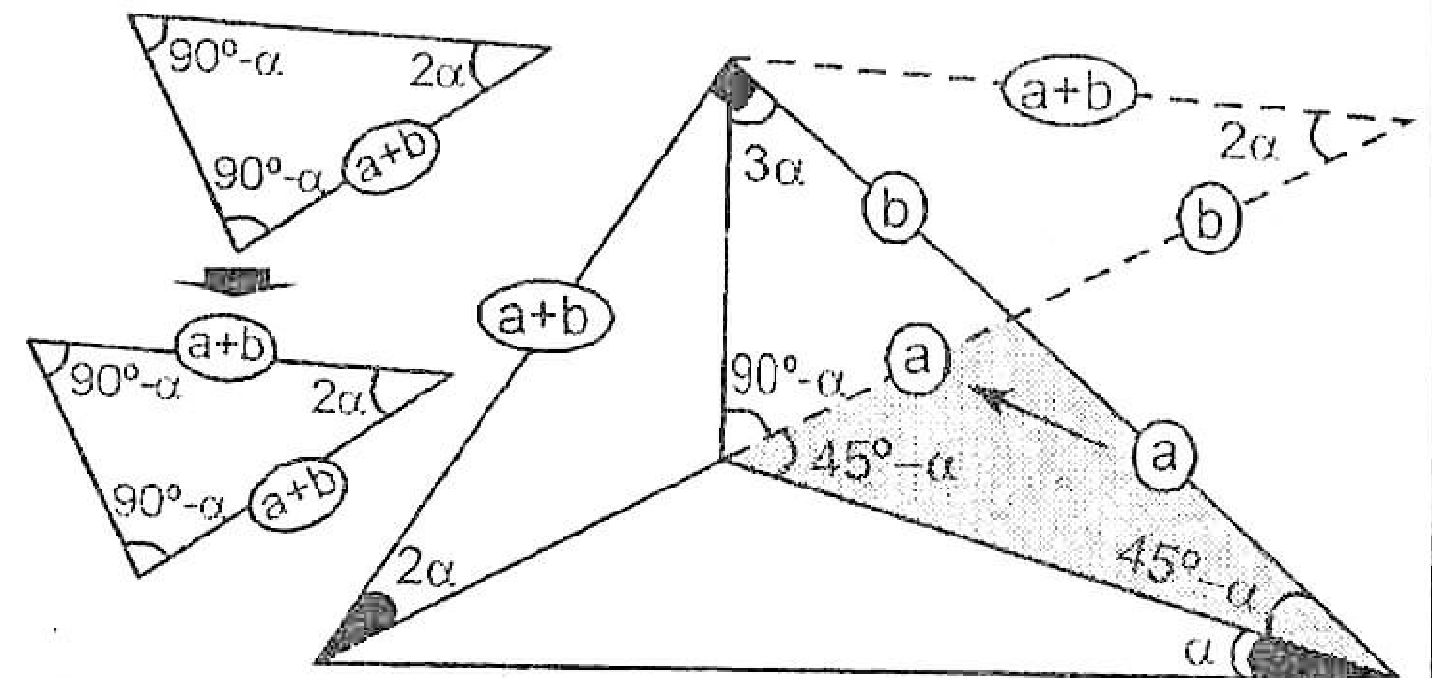


Paso Nº 2: Se observa un triángulo isósceles en la figura sombreada.

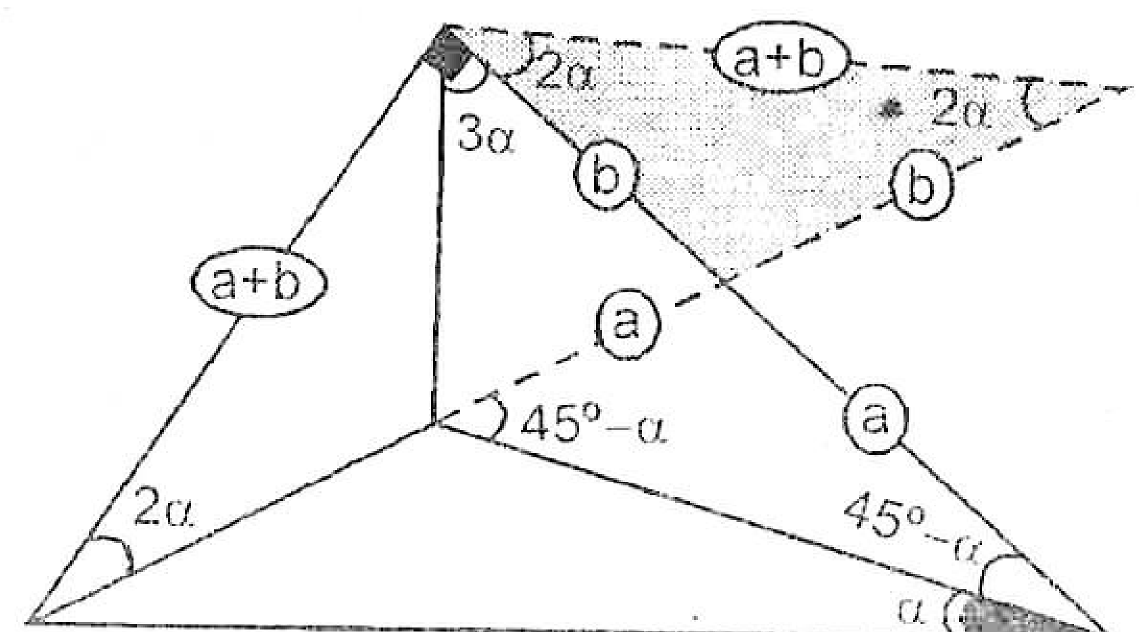


Paso Nº 3: En la figura identificamos los lados iguales de la siguiente manera:

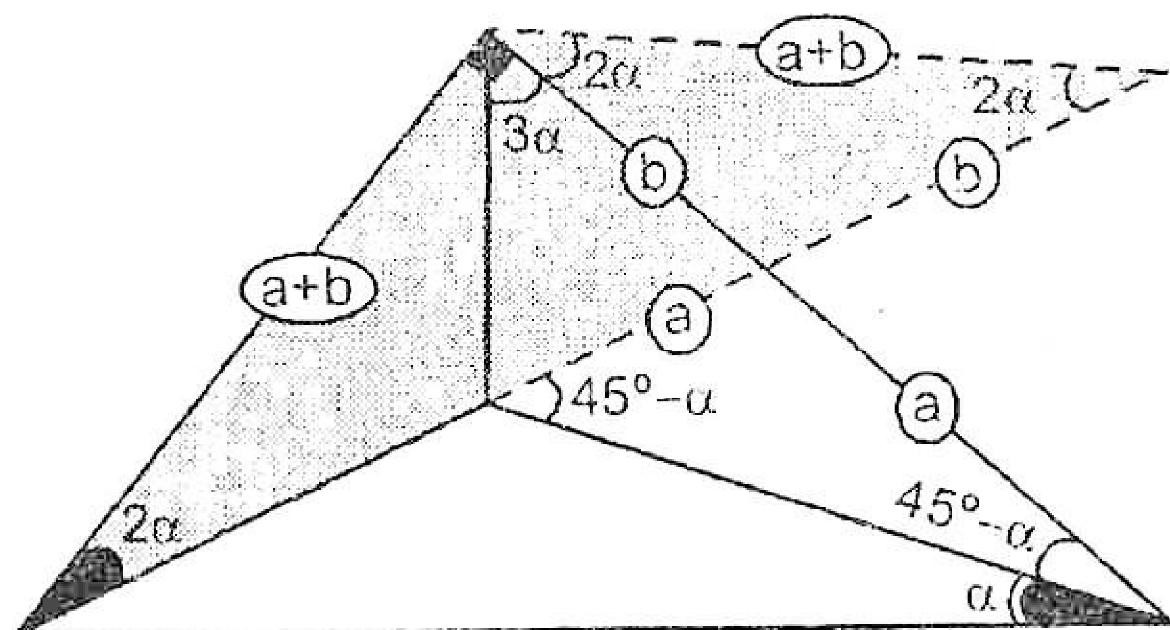
Tambien:

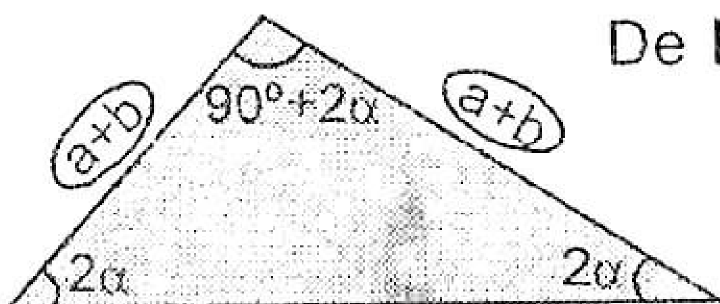


Paso Nº 4: También observamos un nuevo triángulo isósceles de la siguiente forma.



Paso N° 5: Finalmente se observa:





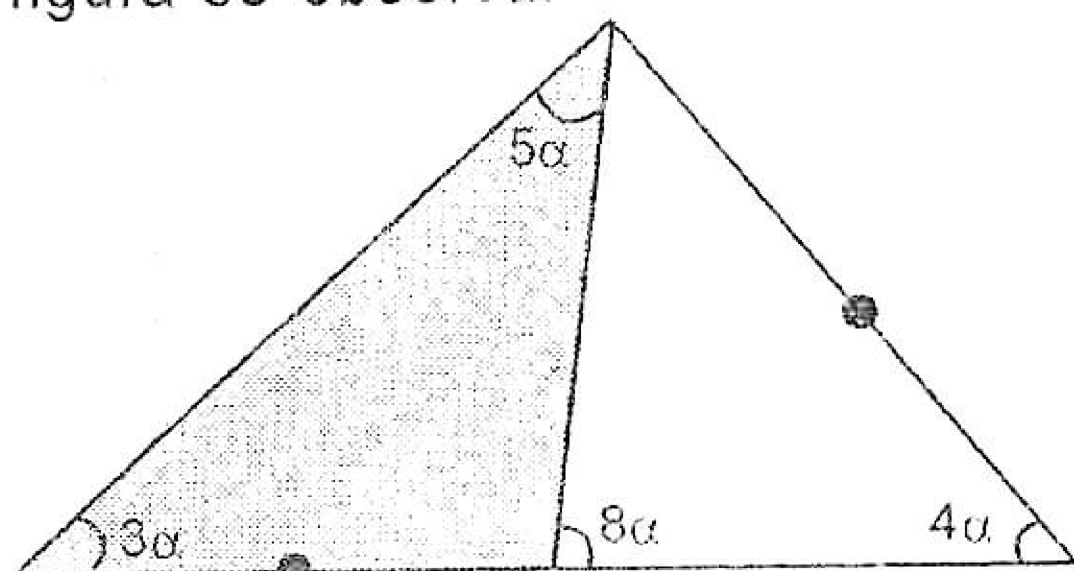
De la figura se cumple:

$$6\alpha + 90^\circ = 180^\circ$$

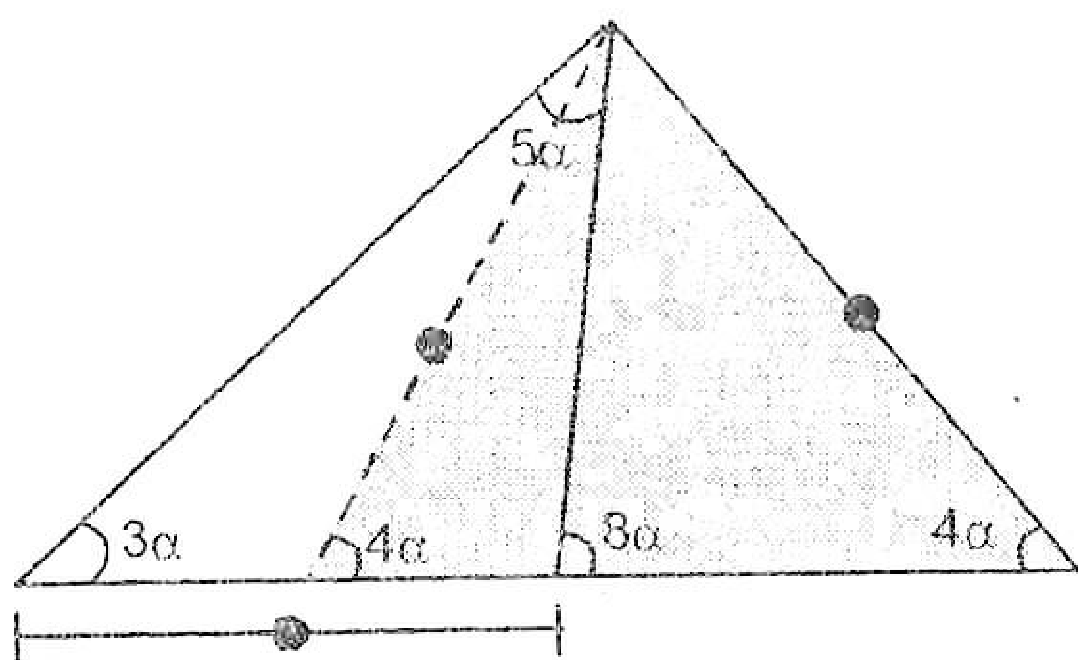
$$\alpha = 15^\circ$$

Solución N° 76

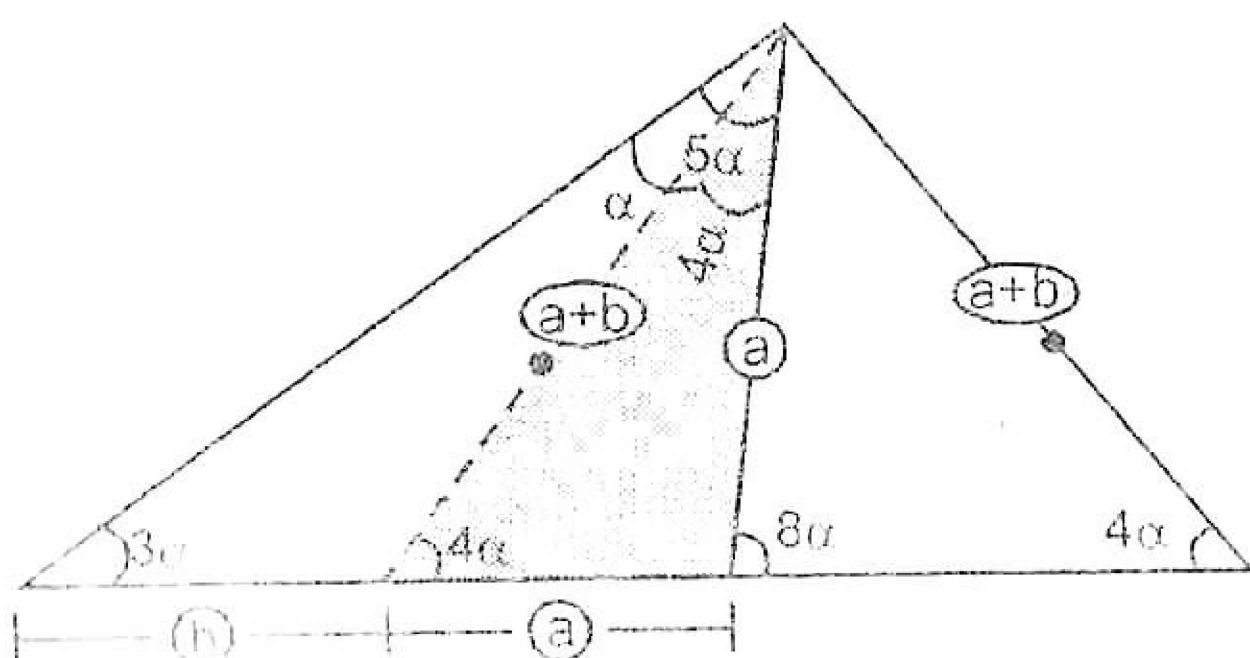
En la figura se observa:



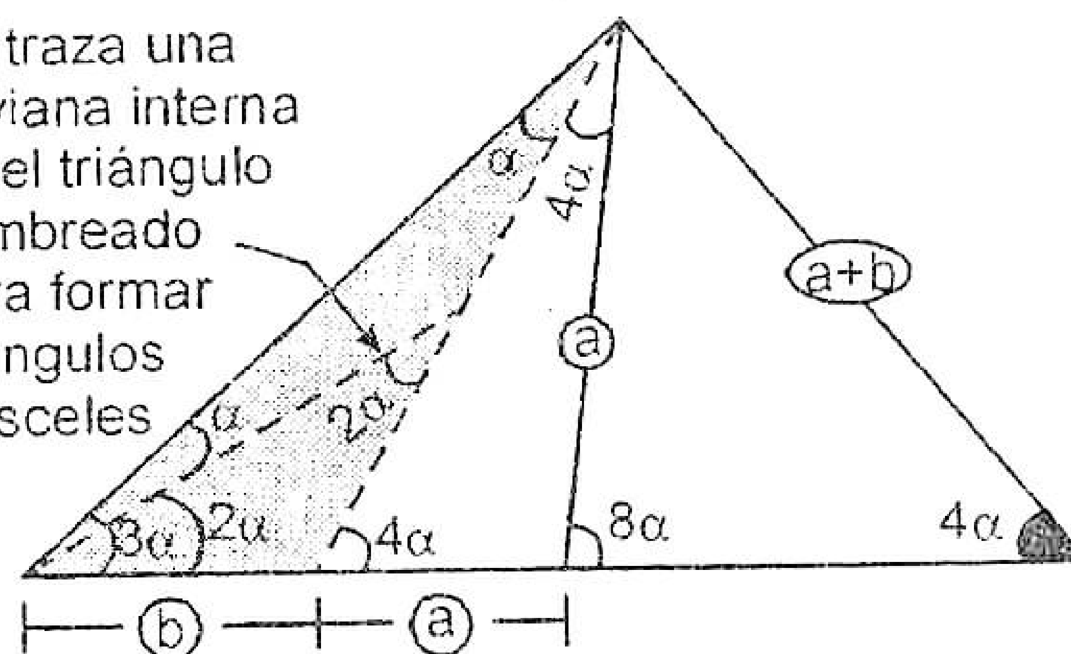
Paso N° 1: Trazamos una ceviana interna de tal manera que se consigue un triángulo isósceles.



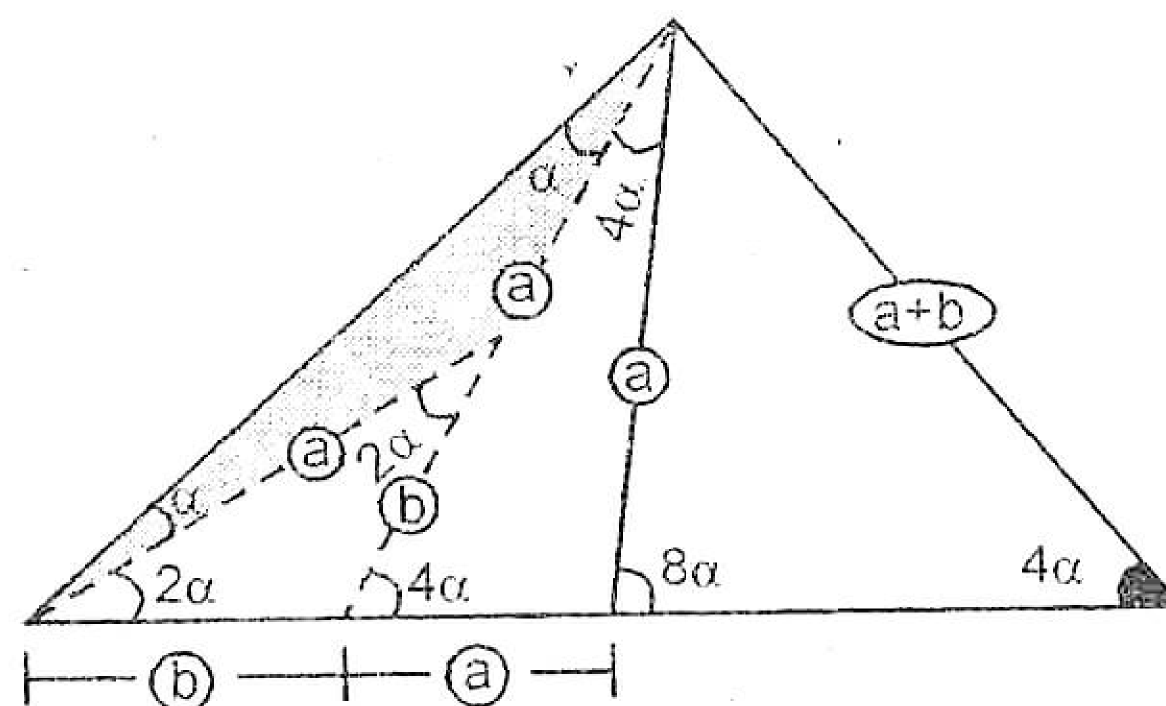
Ahora identificamos los lados iguales de la siguiente manera.



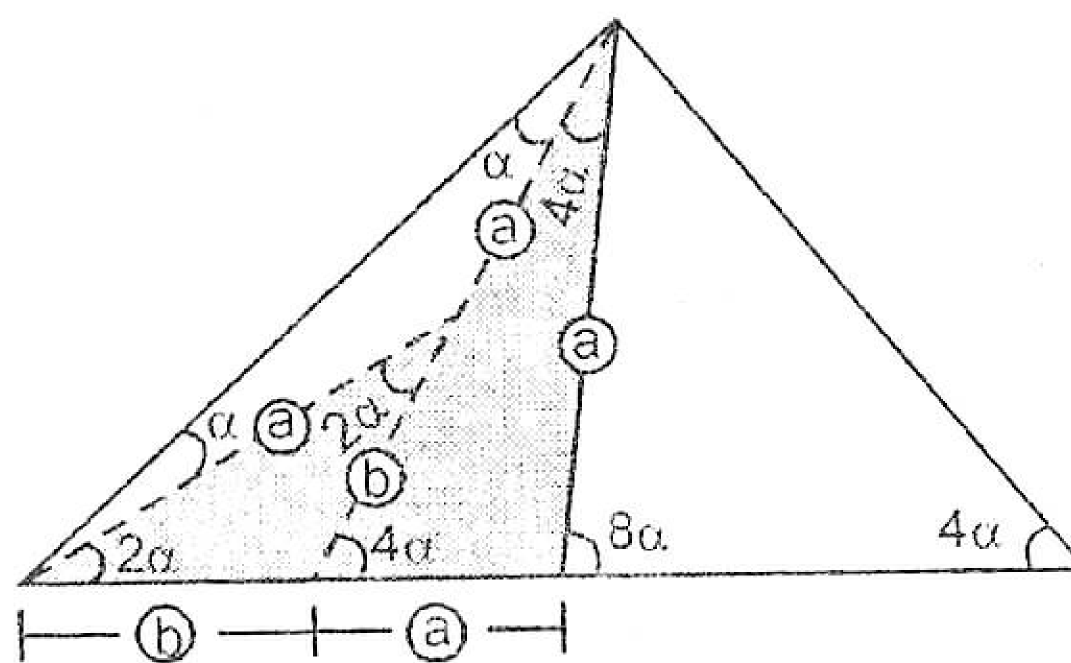
Paso N° 3:
Ahora se realiza el siguiente trazo para obtener triángulos isósceles de la forma siguiente:

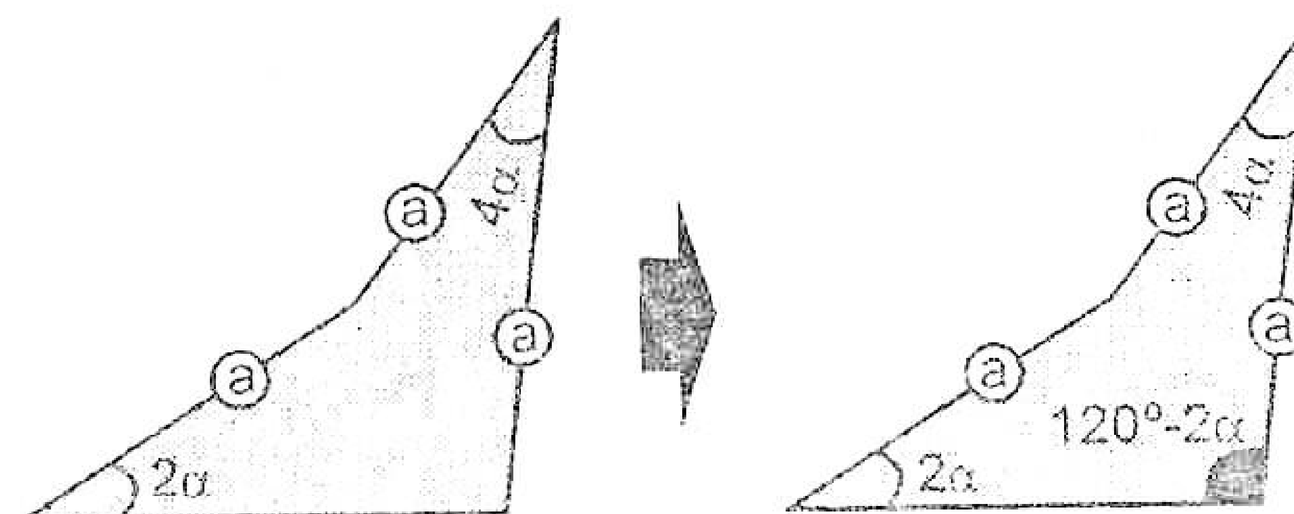


Luego se observa:



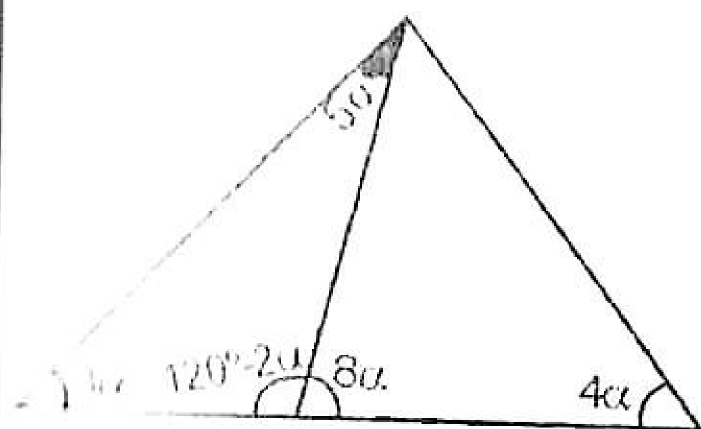
Paso N° 4:
Ahora se tiene en la figura un cuadrilátero concavo (septimo criterio de construcción)





Paso N° 5:

Aquí se cumple la propiedad del concavo.



Por ángulo llano:

$\therefore\ 120° - 2\alpha + 8\alpha = 180°$

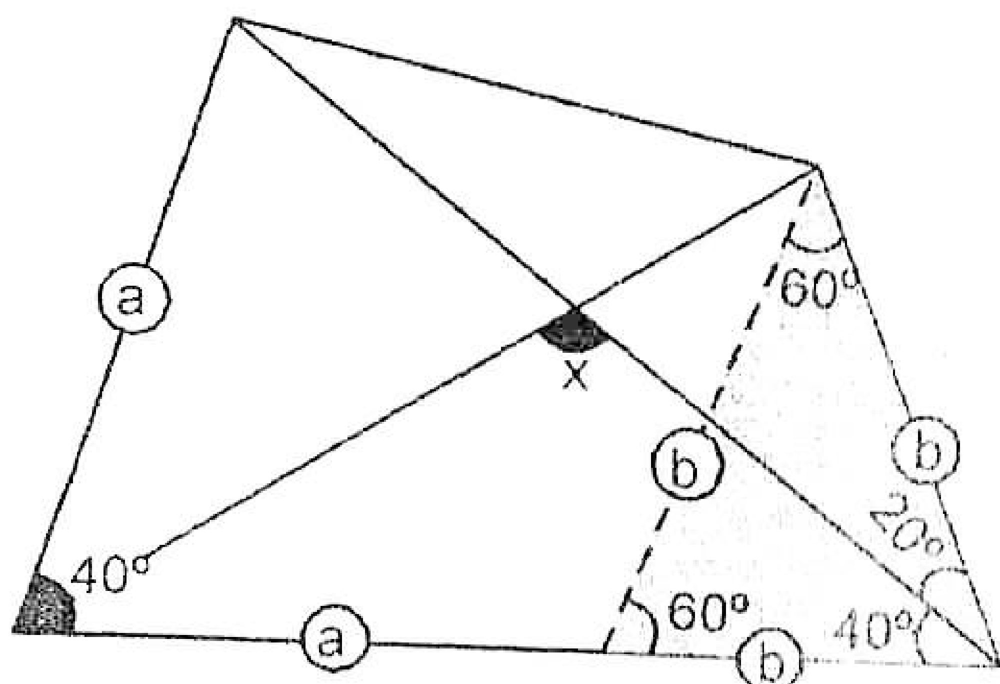
$6\alpha = 60°$

$\alpha = 10°$

Solución N° 77

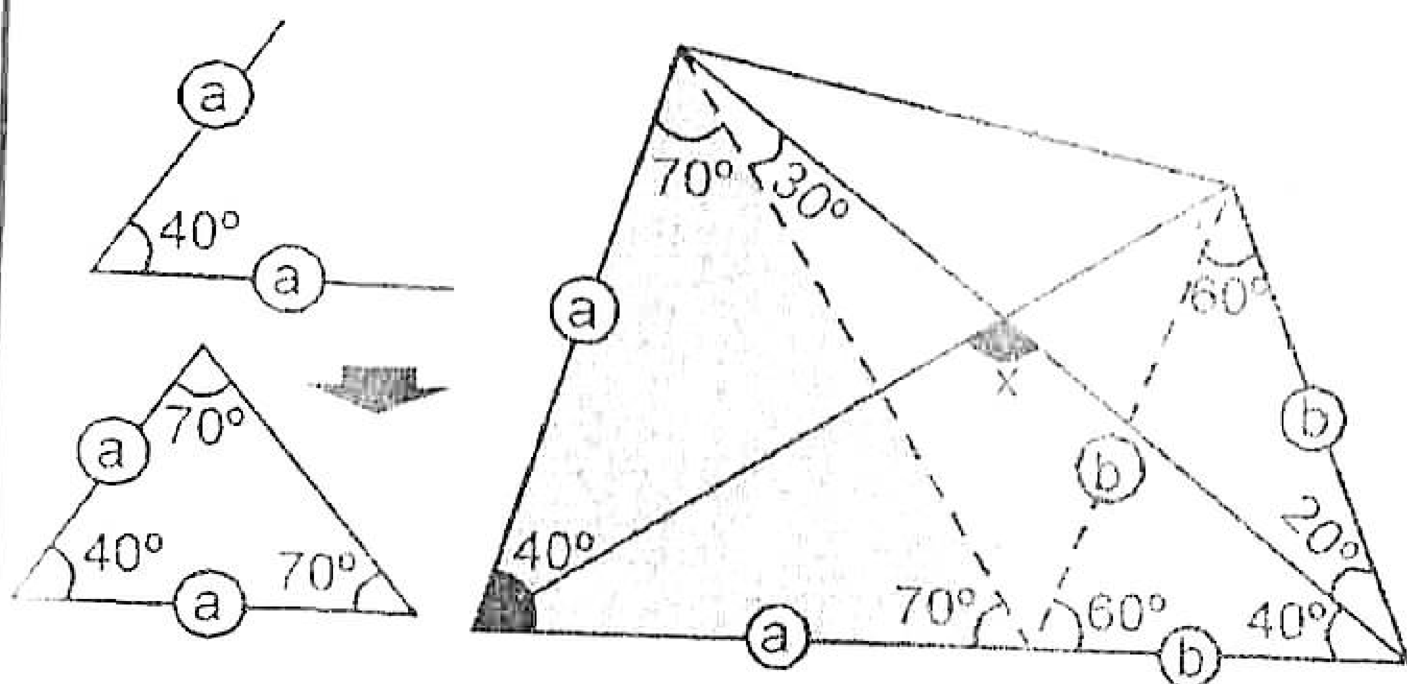
Paso N° 1:

Realizamos el siguiente trazo para formar un triángulo equilátero.



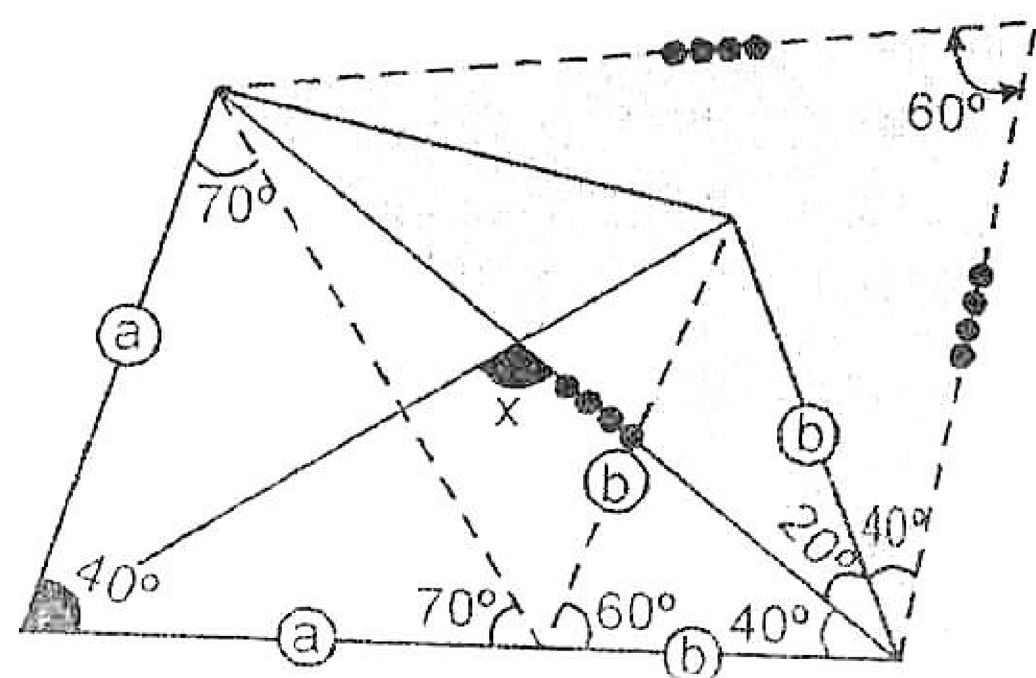
Paso N° 2:

También se obtiene un triángulo isósceles de la siguiente forma.



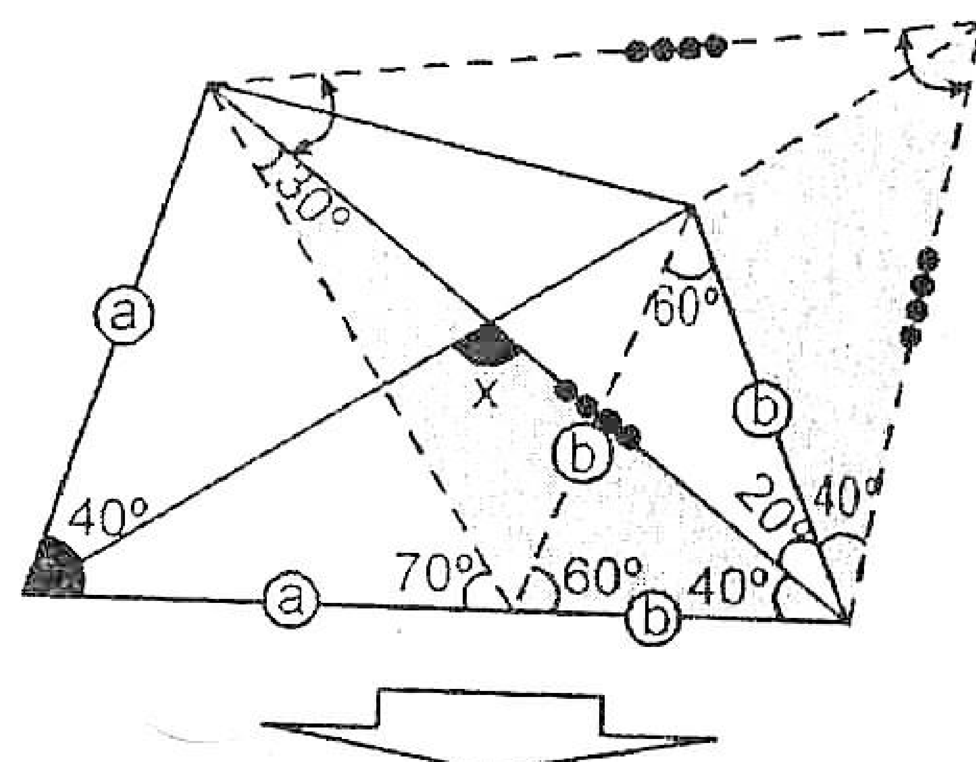
Paso N° 3:

Ahora externamente formamos un triángulo equilátero para obtener 3 lados iguales de la siguiente manera.

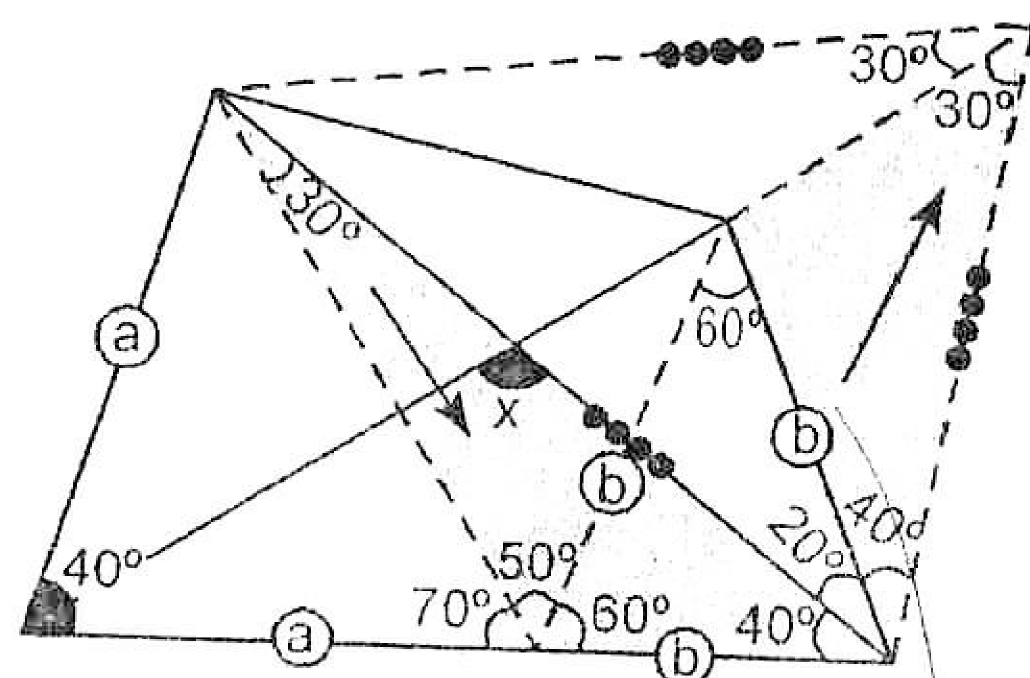


Paso N° 4:

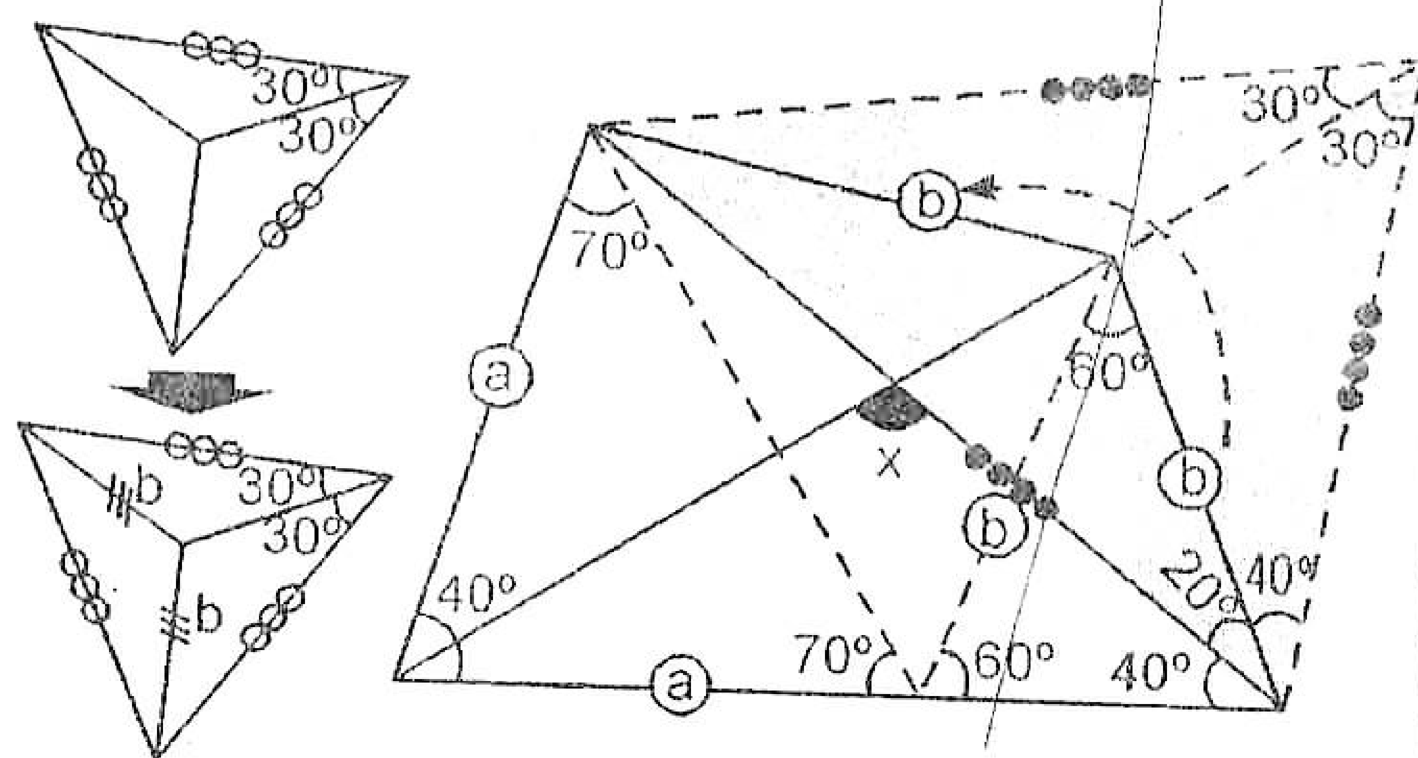
Luego se obtiene dos triángulos congruentes. caso (L.A.L.)



Aqui se cumple: "A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa"

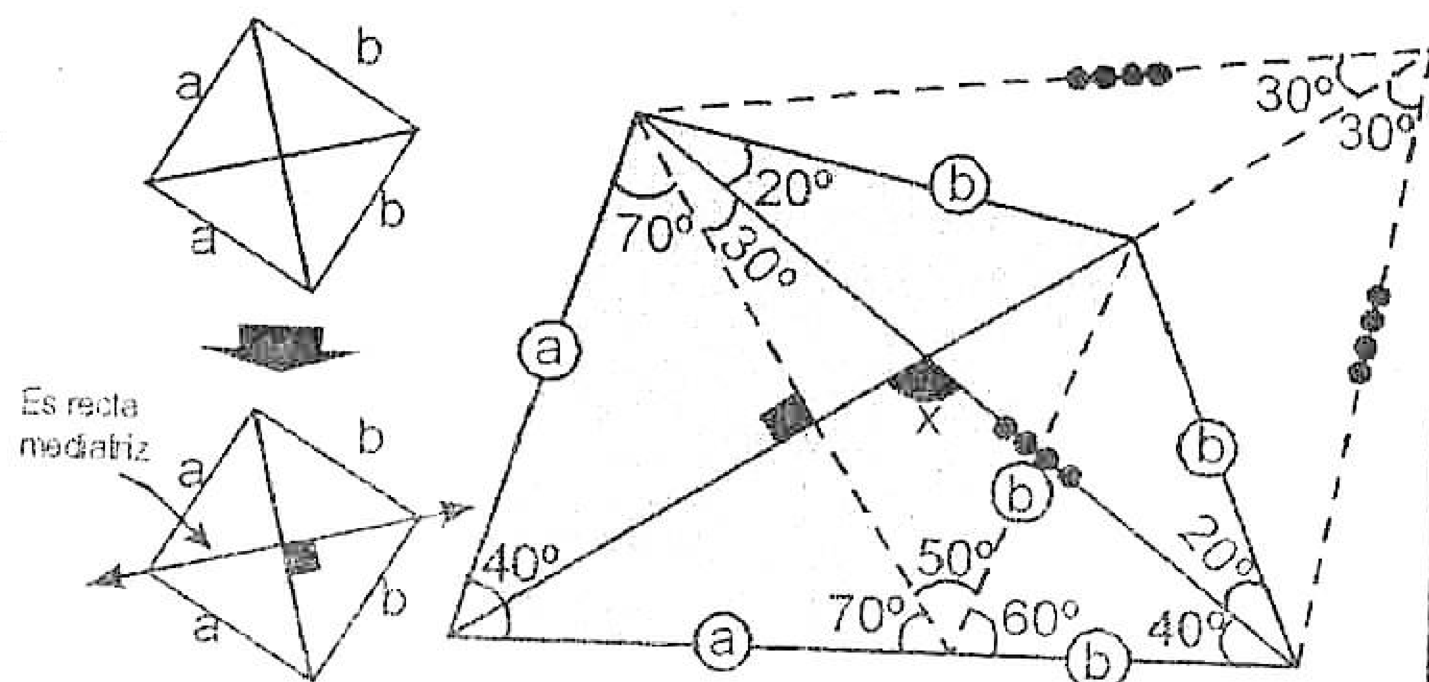


Paso N° 5: En el triángulo equilátero trazado se cumple:

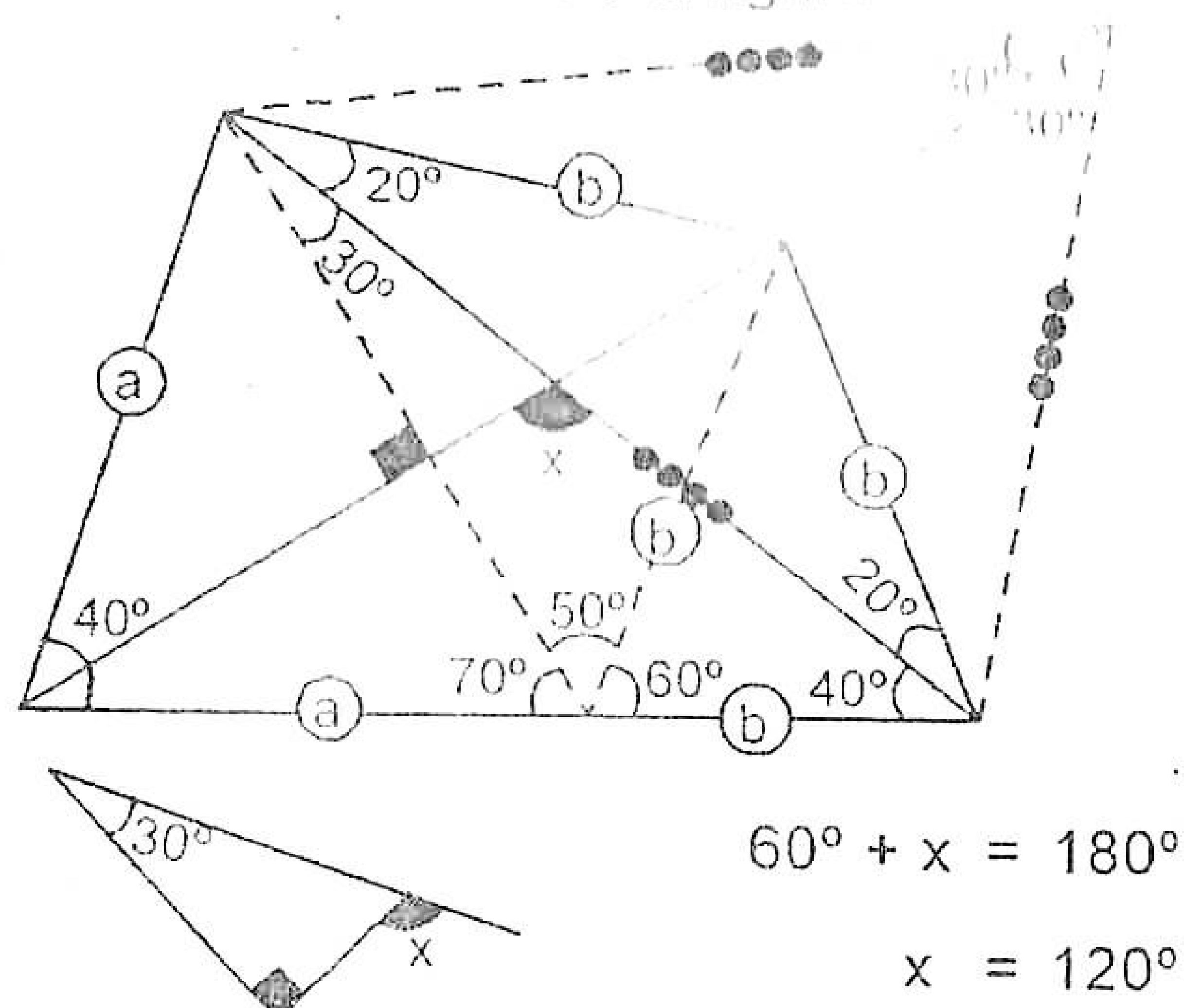


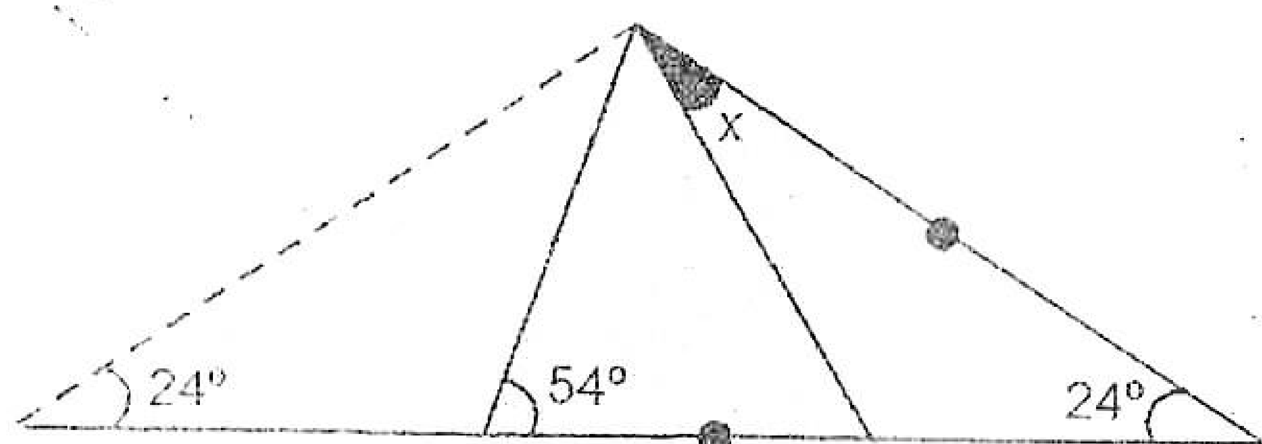
Paso N° 6:

Ahora observamos la siguiente figura donde se cumple la propiedad de la mediatriz.



Finalmente se obtiene en la figura





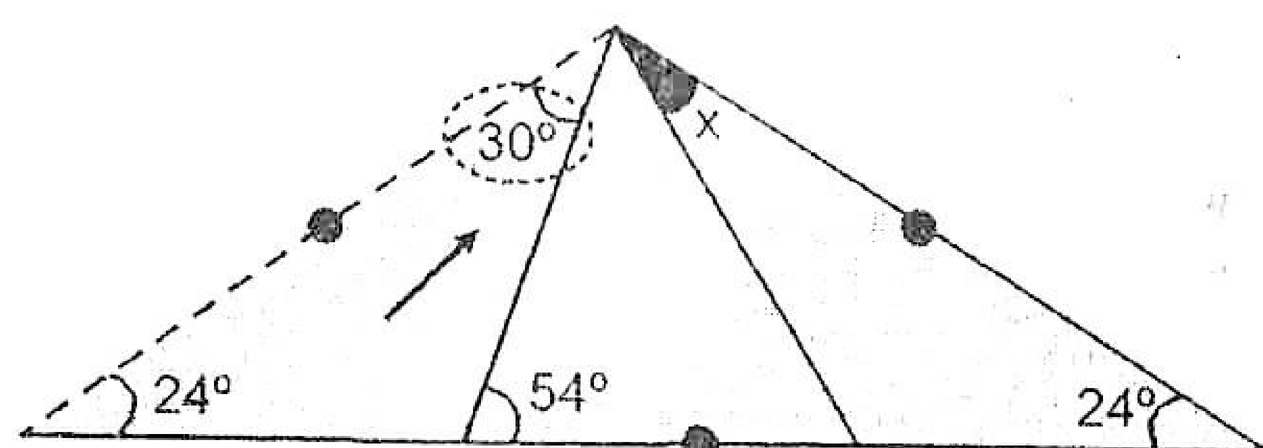
$$60° + x = 180°$$

$$x = 120°$$

Solución Nº 78

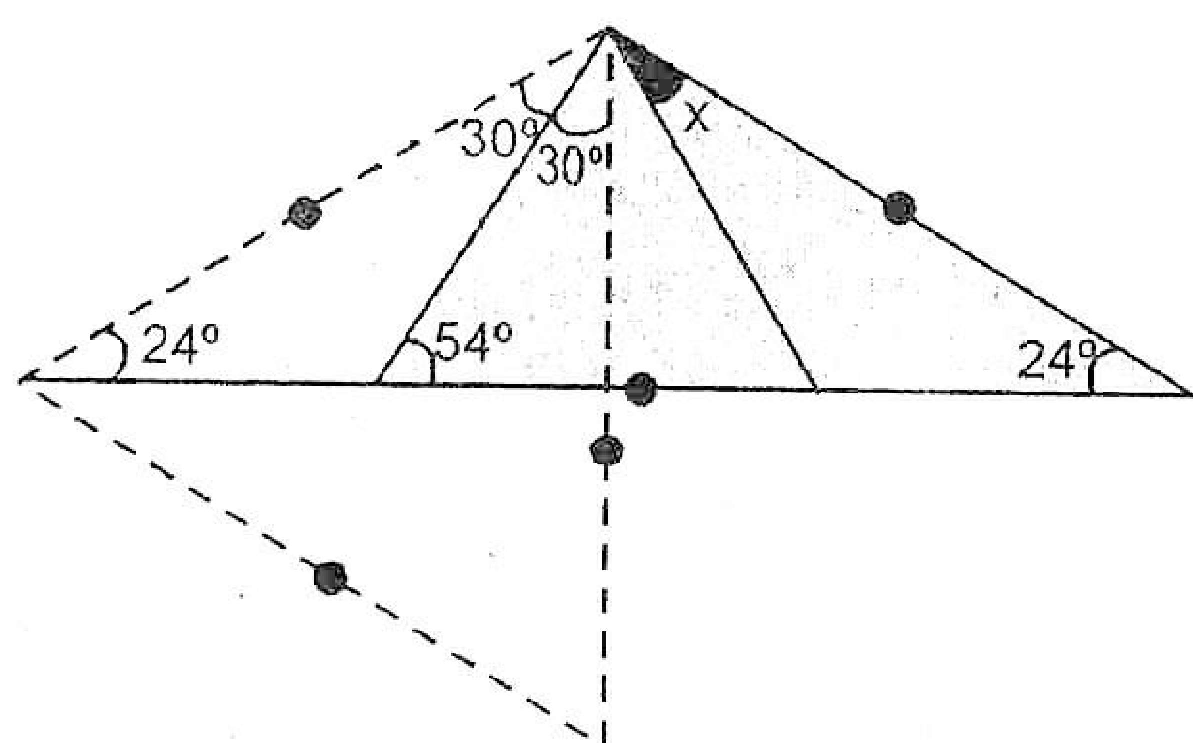
Paso Nº 1:

Trazamos una ceviana externa formando un ángulo de 24° con la base. Ello para obtener un triángulo isósceles.



Paso Nº 2:

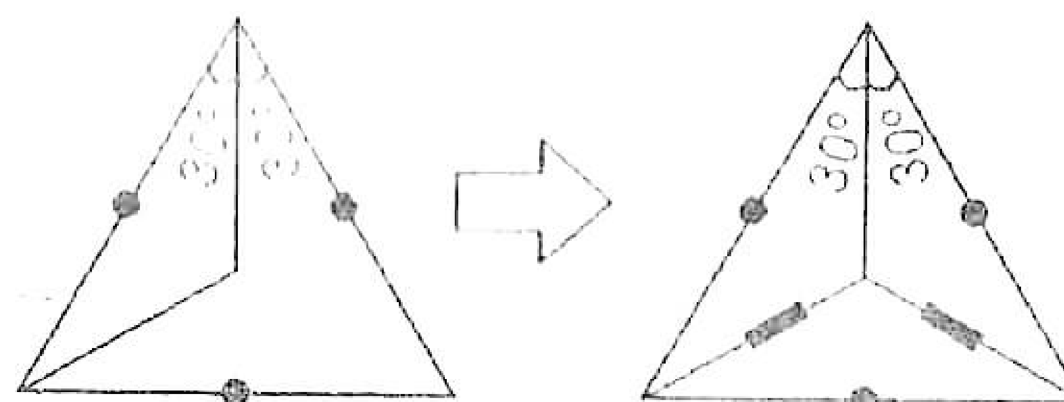
En la figura resultante, se observa un ángulo de 30° que es la mitad de 60° y con ello podemos formar un triángulo equilátero.

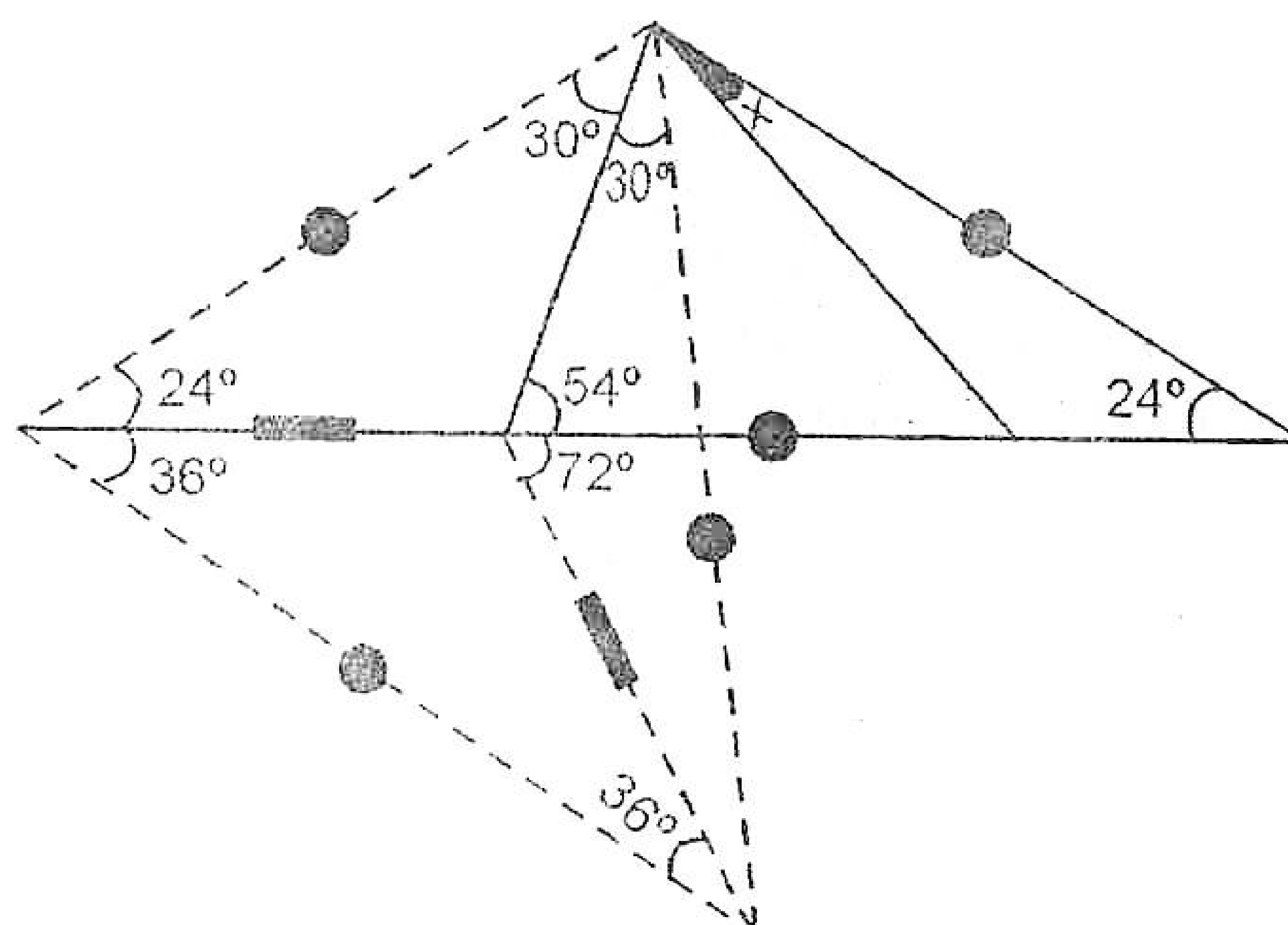


Ahora realizamos el siguiente trazo.

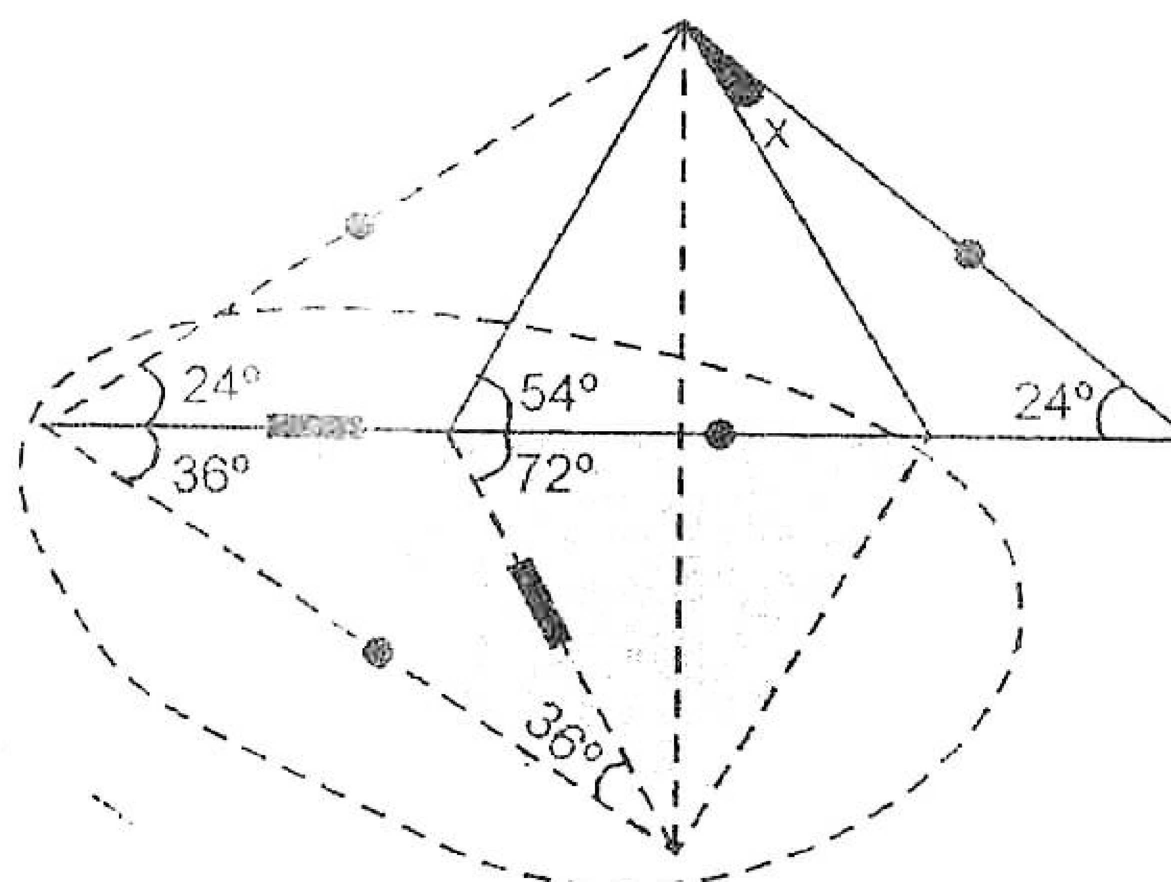
Paso Nº 3:

Completamos los ángulos internos del triángulo y se observa también se cumple la siguiente propiedad.

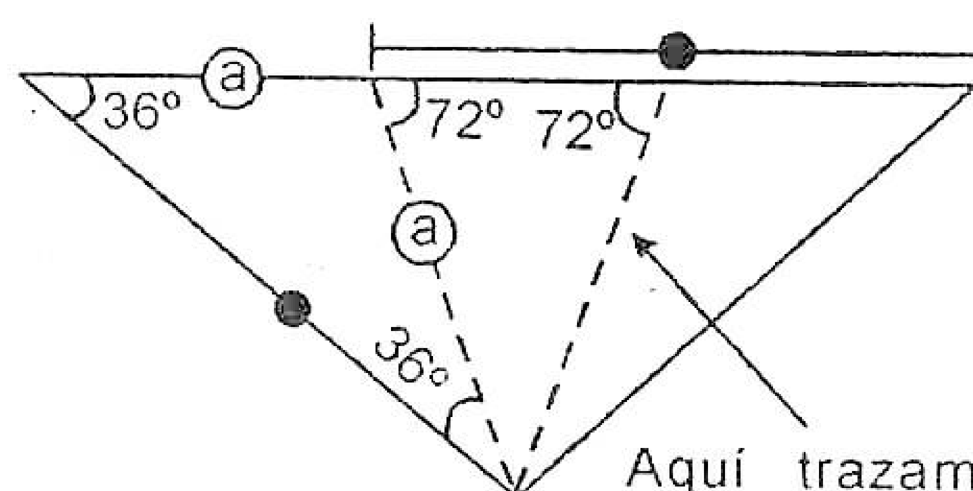




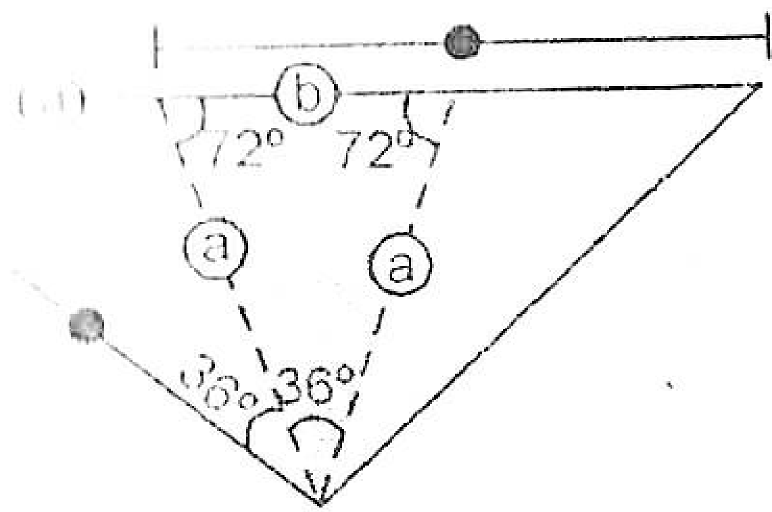
Paso Nº 4: Tomamos una porción de la figura donde se observa:



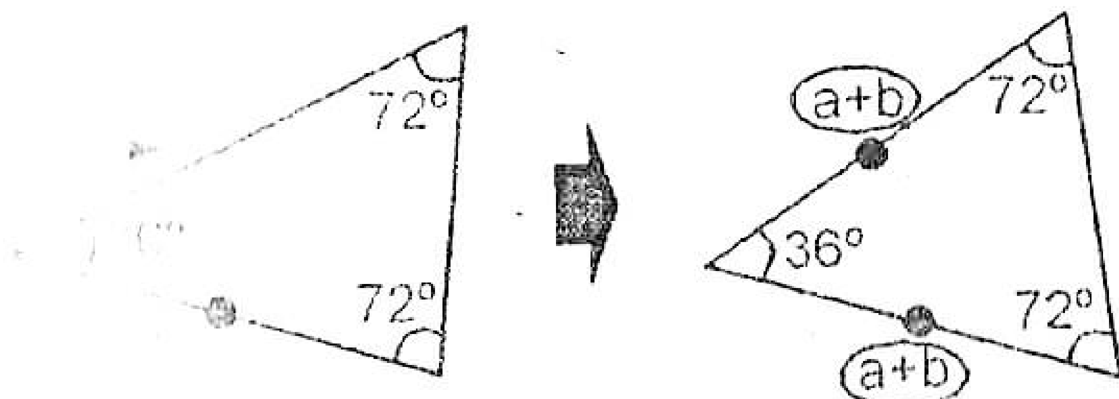
Aqui hacemos:



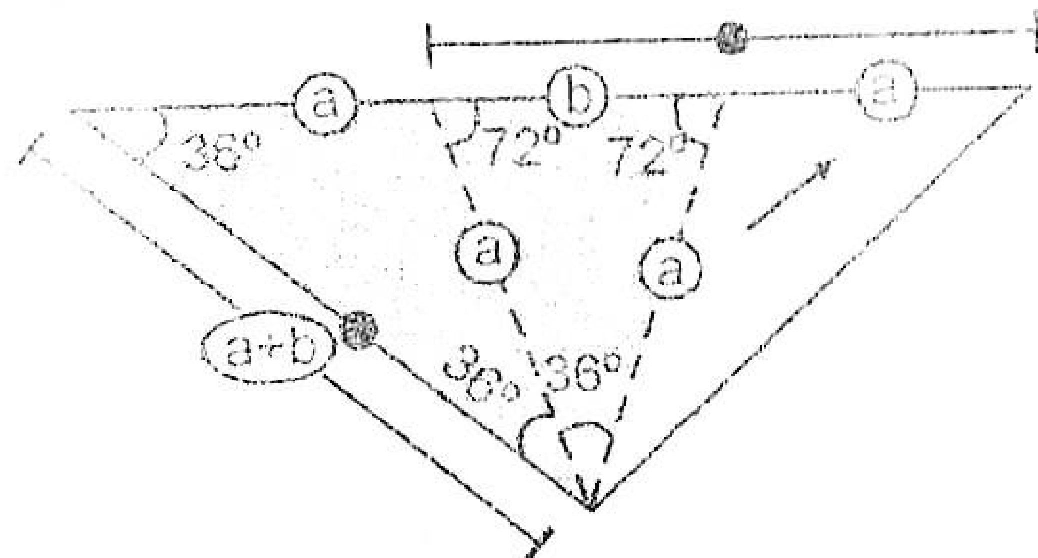
Aquí trazamos una ceviana interna formando un ángulo de 72° para obtener un triangulo isósceles



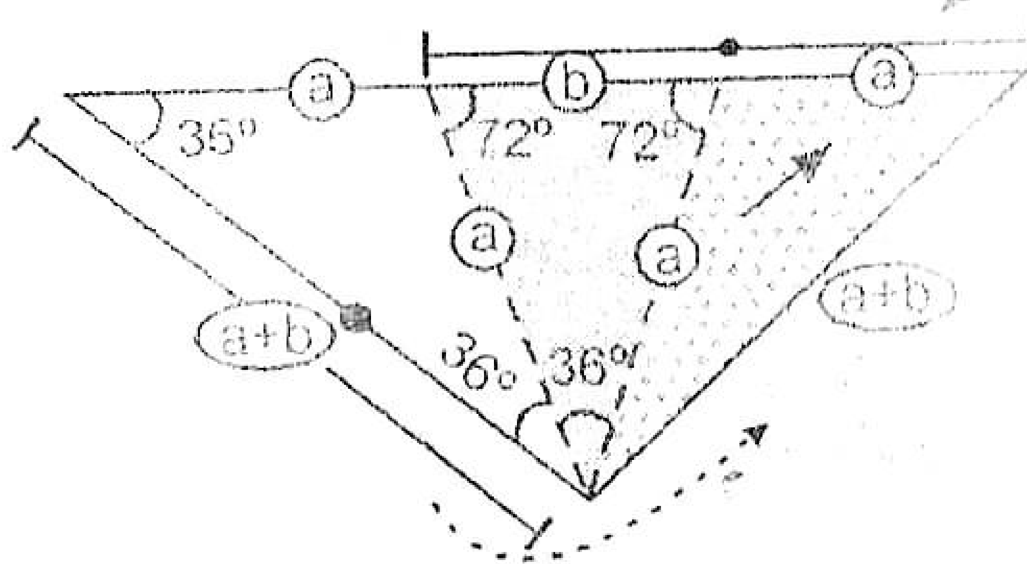
Observamos:



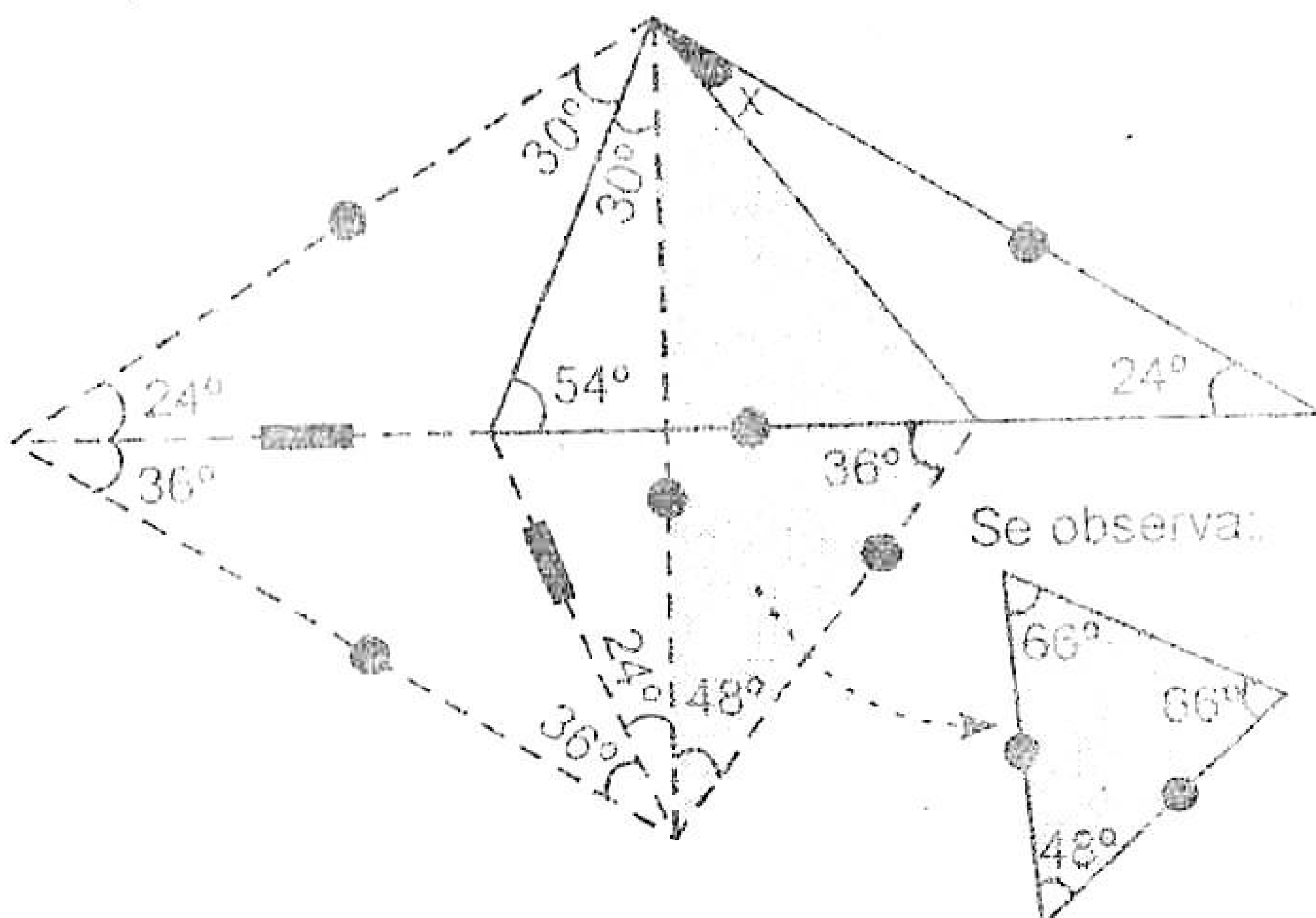
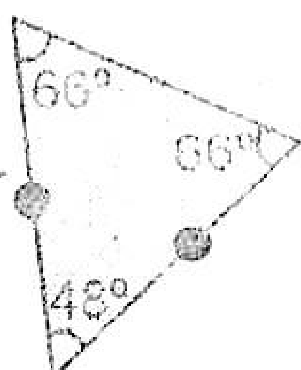
Paso N° 5:
Aquí obtenemos:

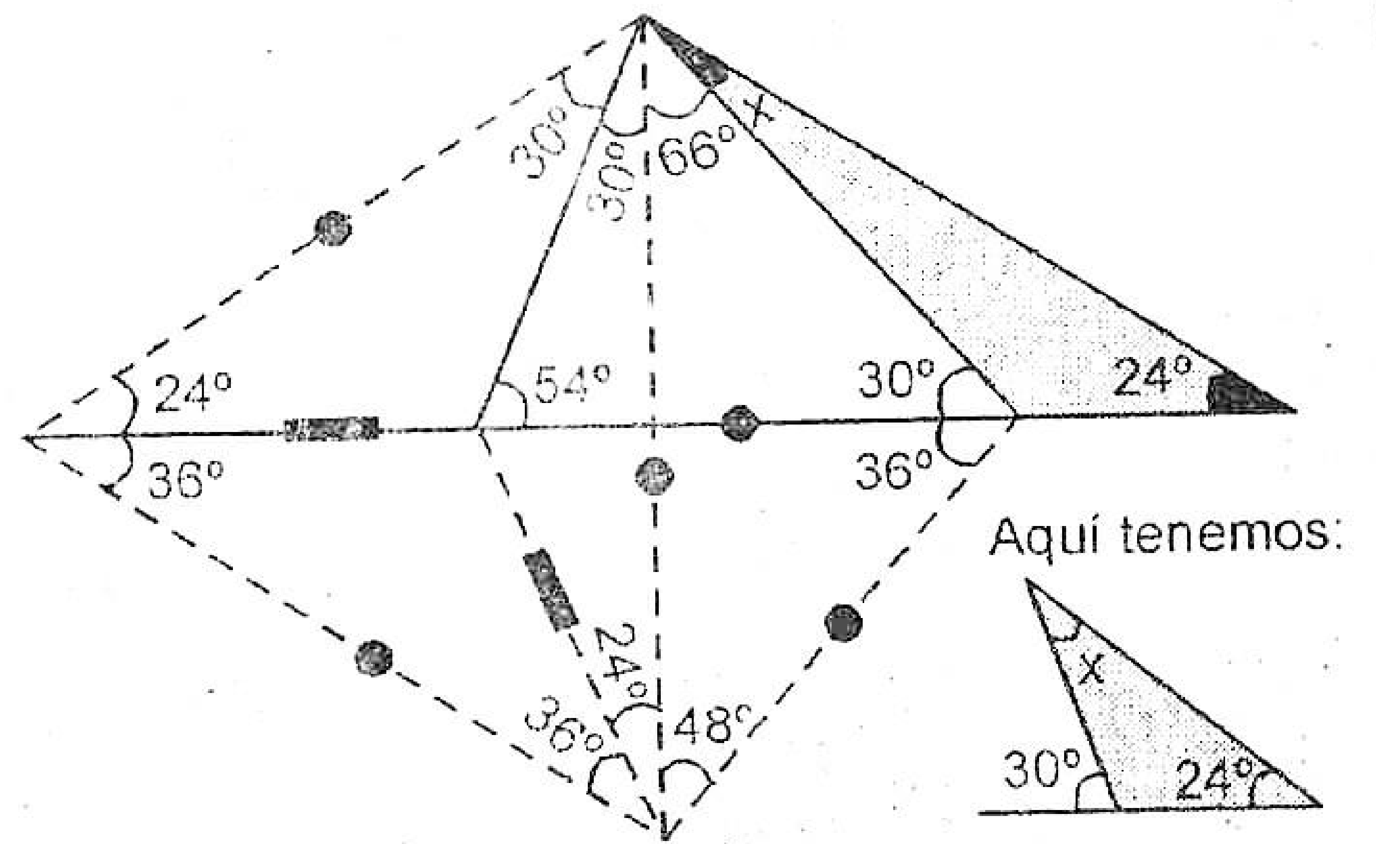
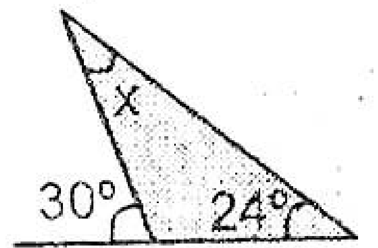


Se observa un triangulo isosceles



Paso N° 6: Ahora observamos en el triángulo total que se cumple:

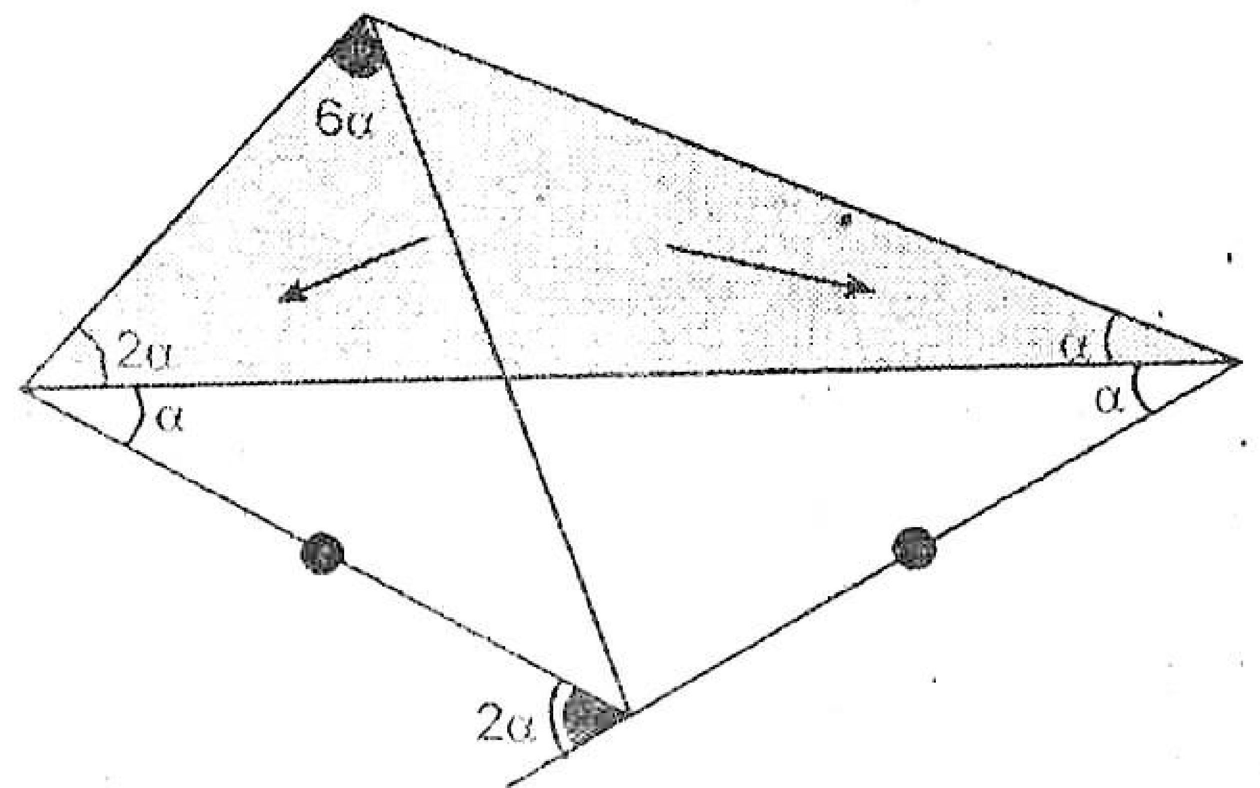



$\therefore \quad 30^\circ = x + 24^\circ$

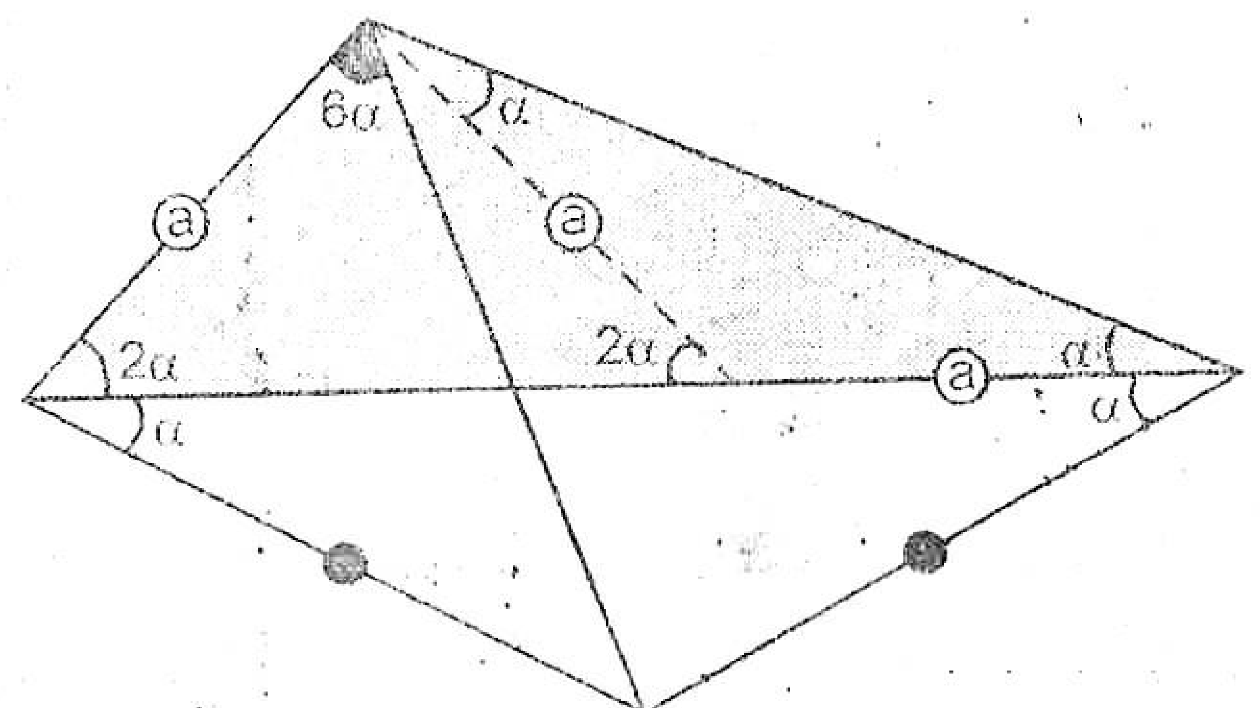
$x = 6^\circ$

Solución N° 79

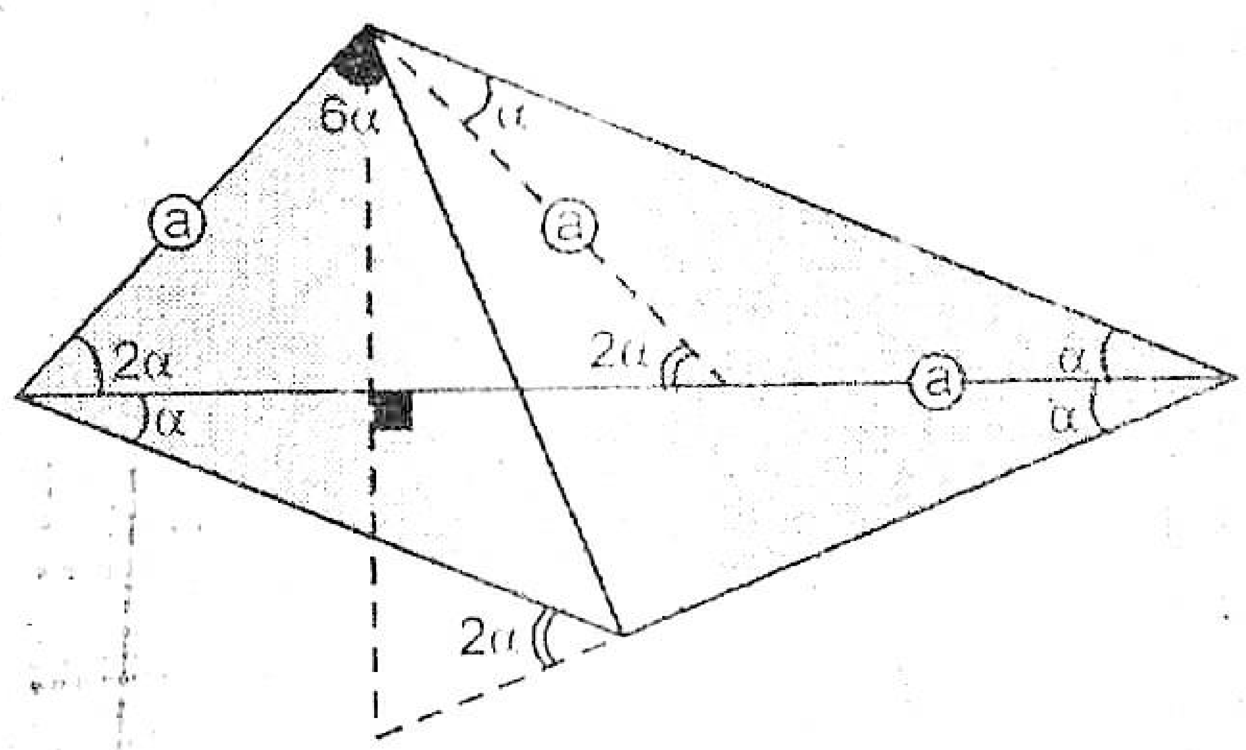
Se observa:



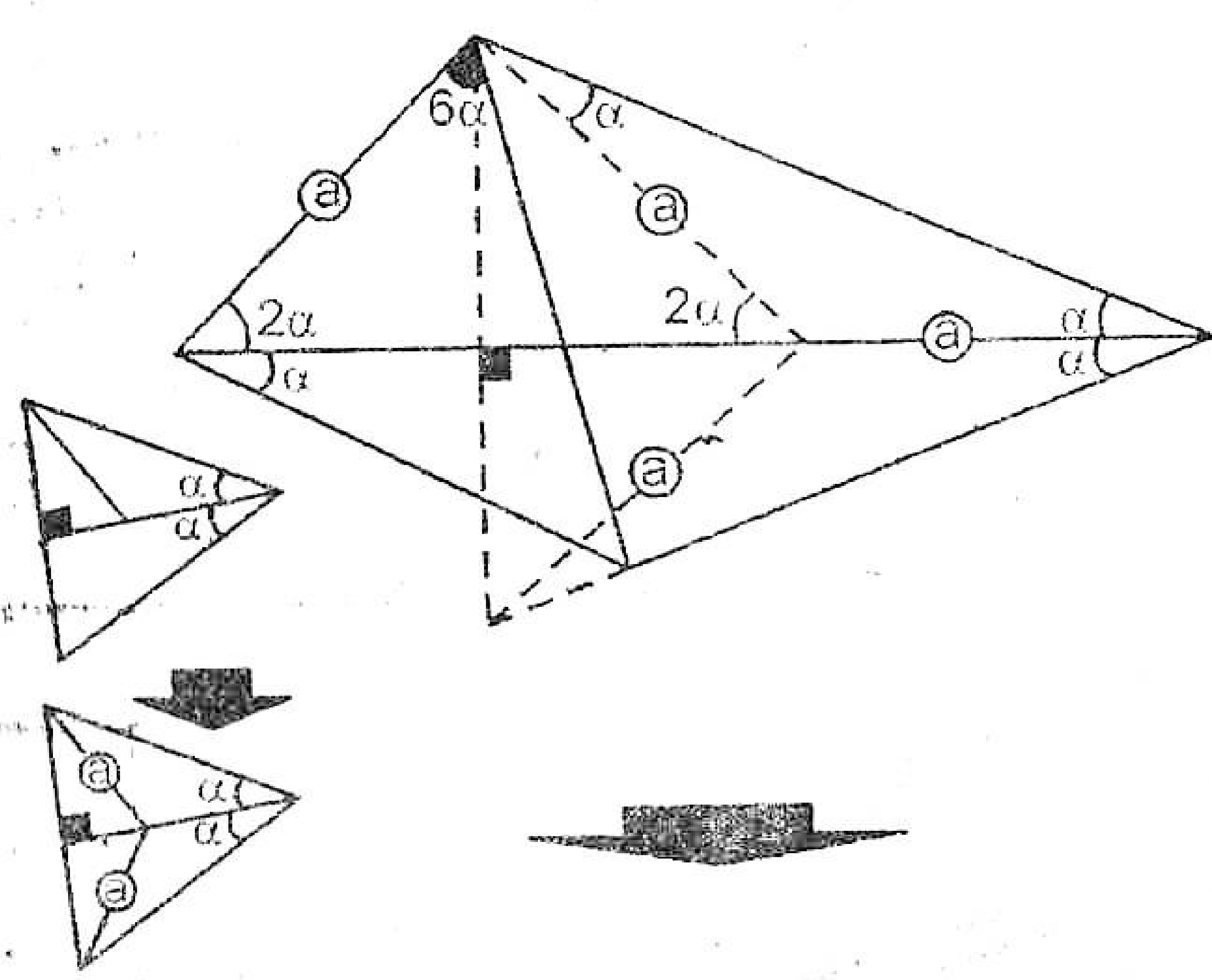
Paso N° 1:
Aplicamos el primer criterio de construcción de la siguiente manera.



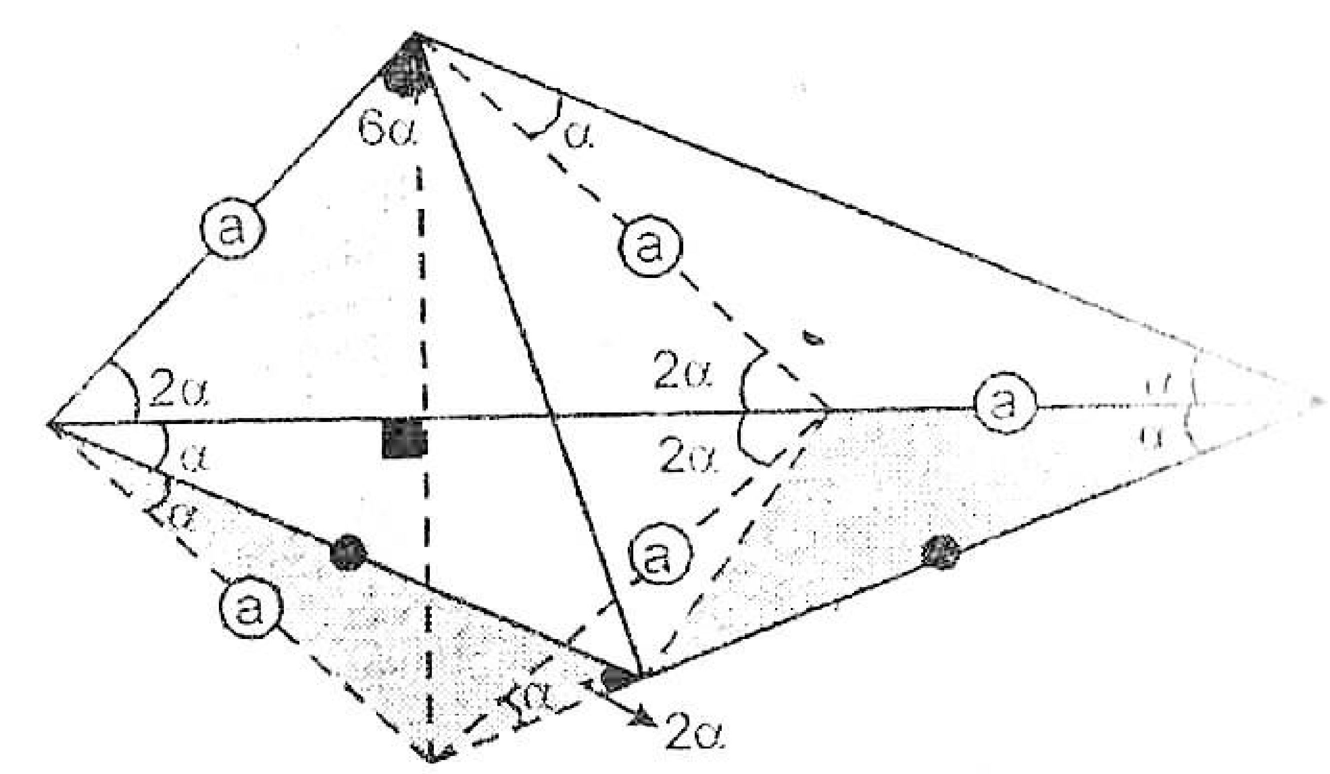
Paso N° 2:
Luego aplicamos el segundo criterio de construcción: se construye exteriormente un triángulo isósceles.



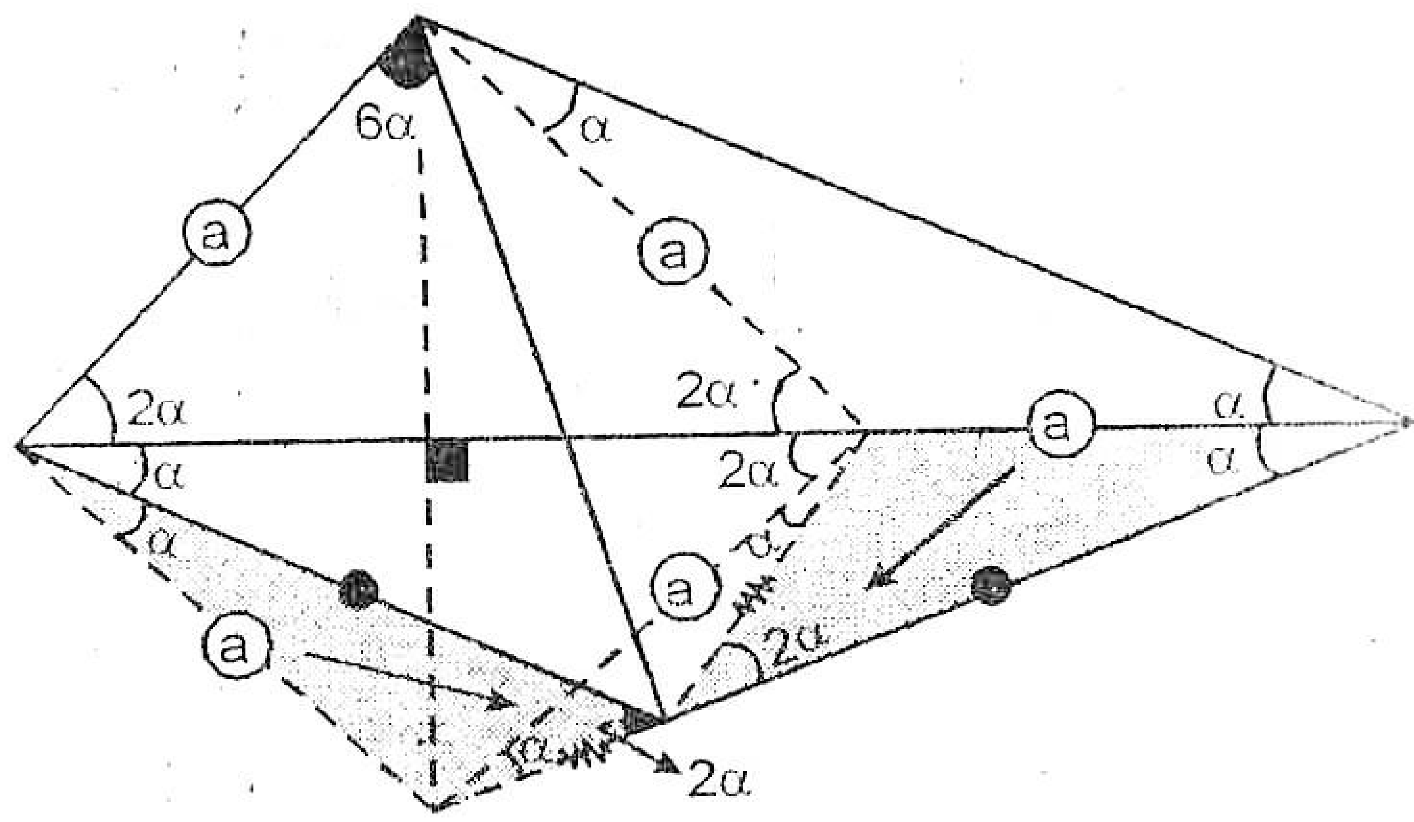
Paso N° 3:
Se observa en el triángulo isósceles formado que se cumple la siguiente propiedad.



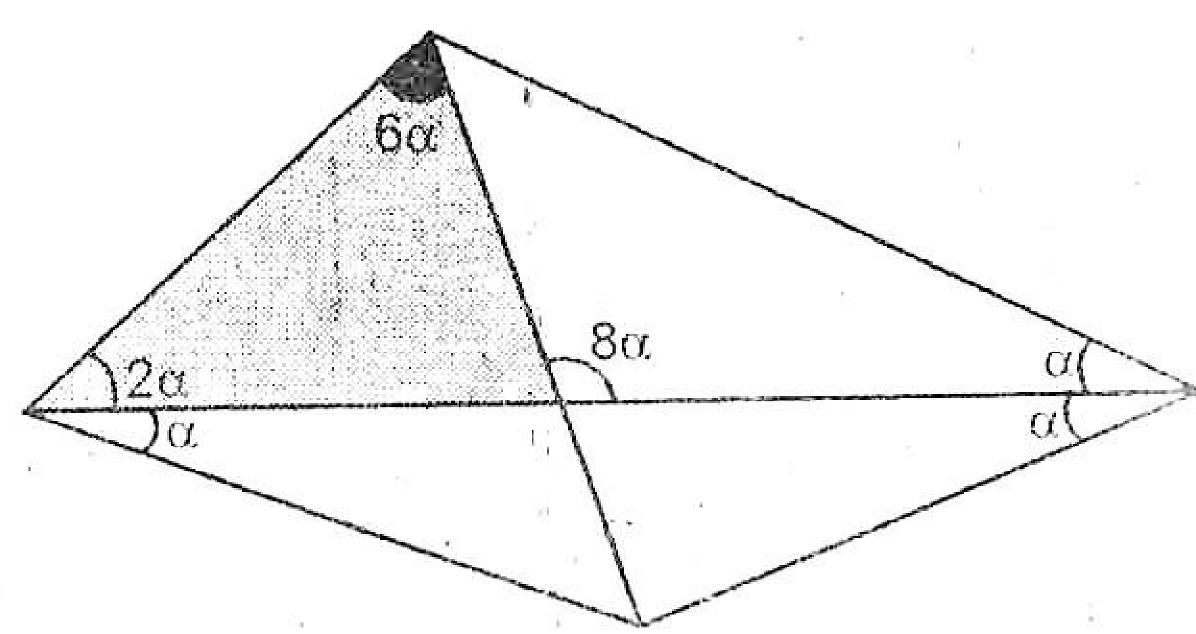
Paso N° 4:
Si obtiene en la nueva figura dos trángulos congruentes; caso (L.A.L.)



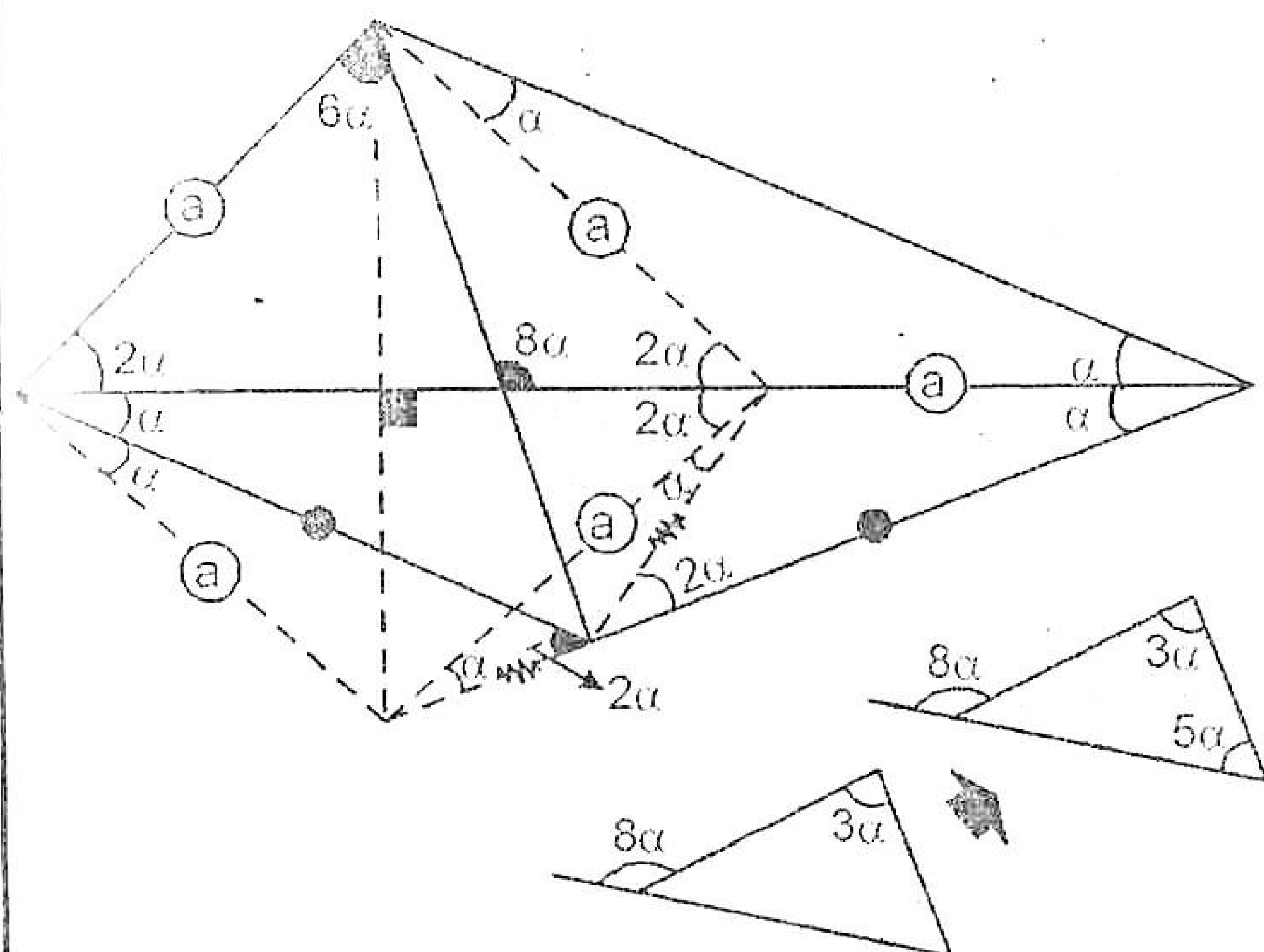
Completando ángulos internos en la figura.



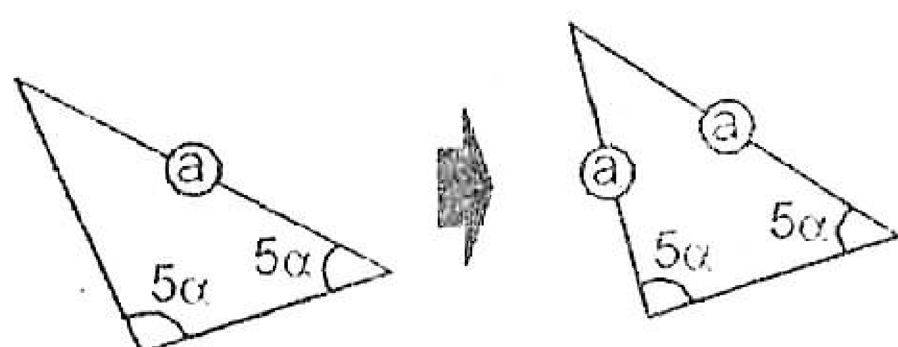
Paso N° 5:
Observamos en la figura original la siguiente propiedad.

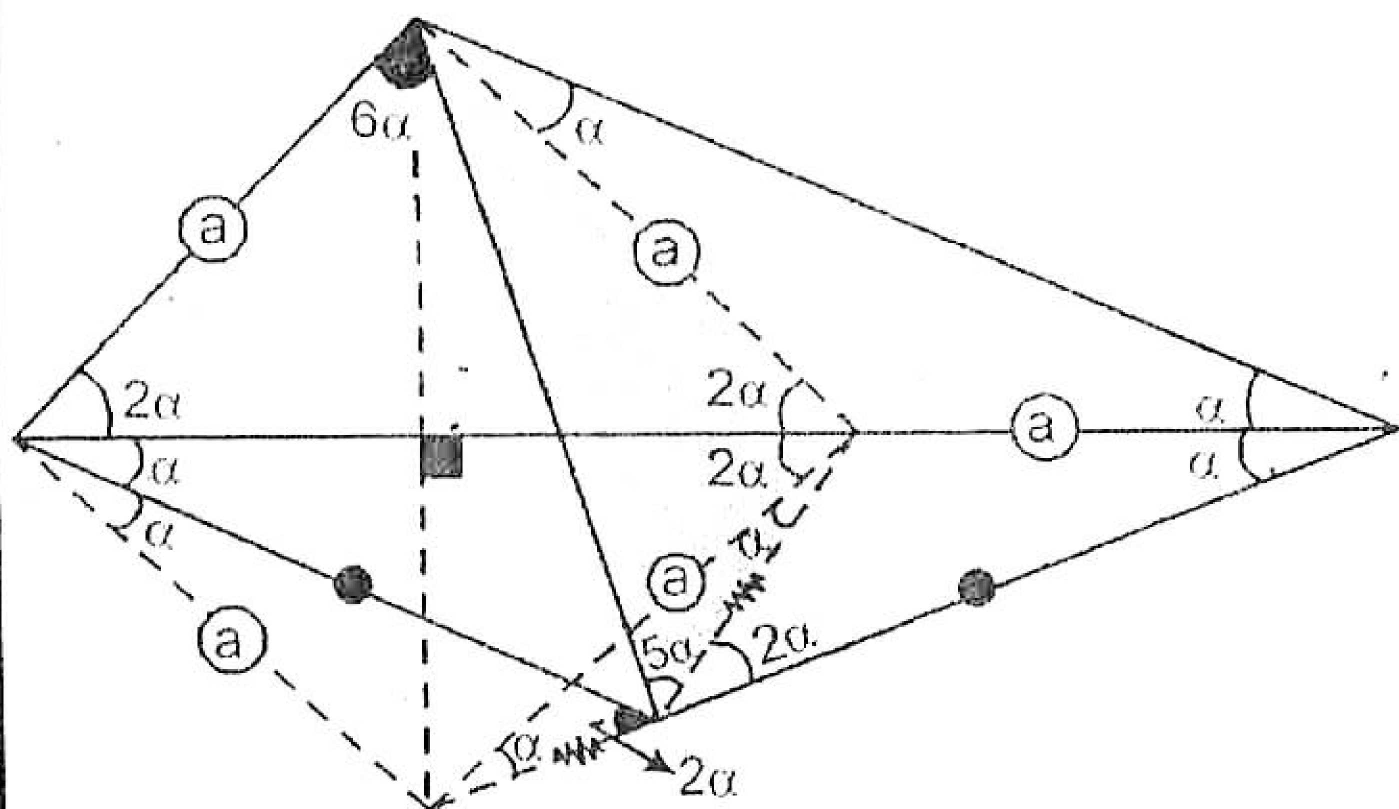


Paso N° 6:
Ahora se observa que se tiene la siguiente figura.

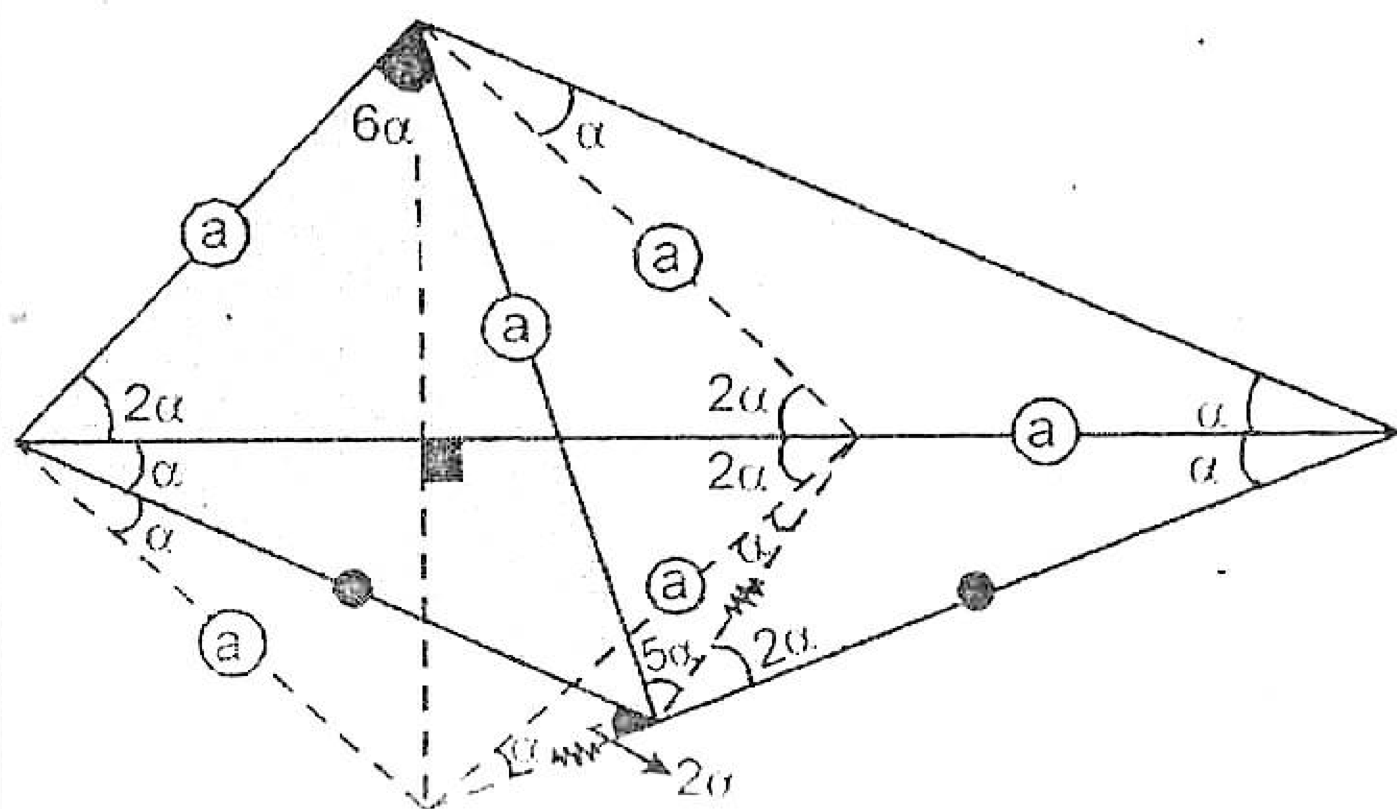


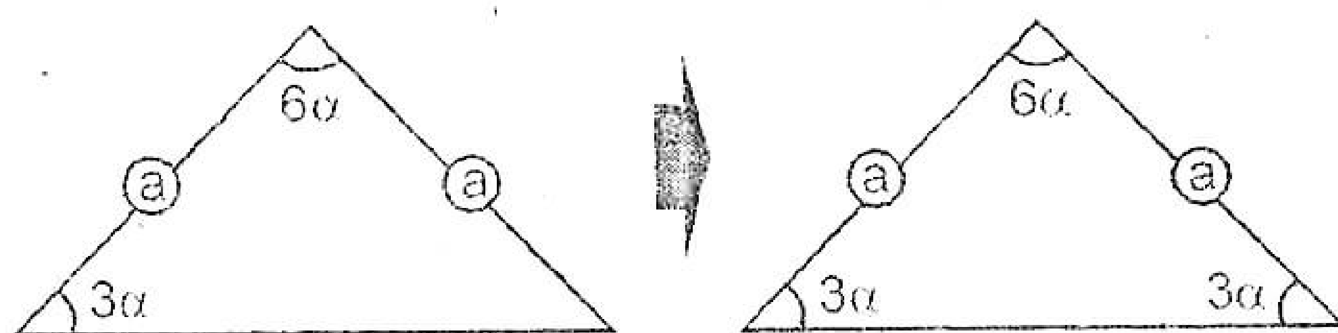
Paso N° 7:
Ahora tenemos un nuevo triángulo isósceles de la forma siguiente:





Paso N° 8:
Ahora tenemos en la figura que se cumple:

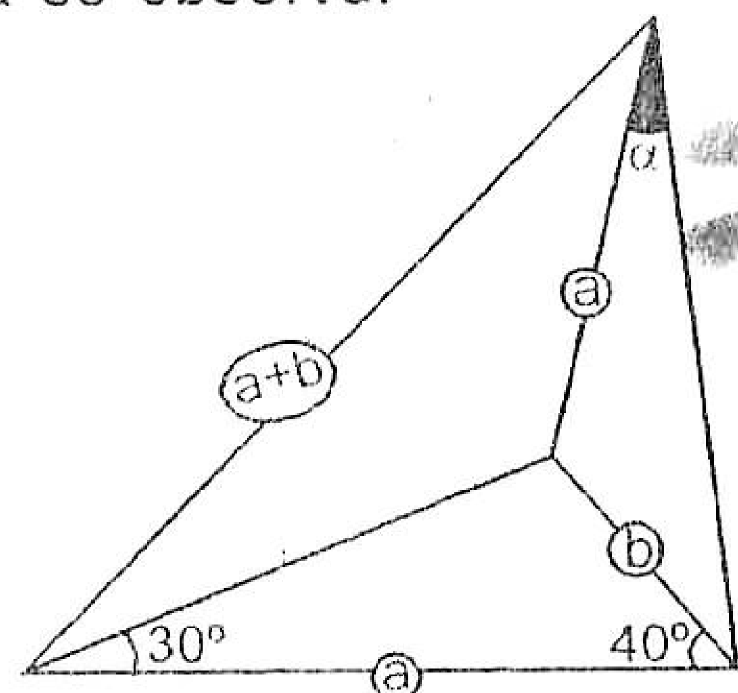




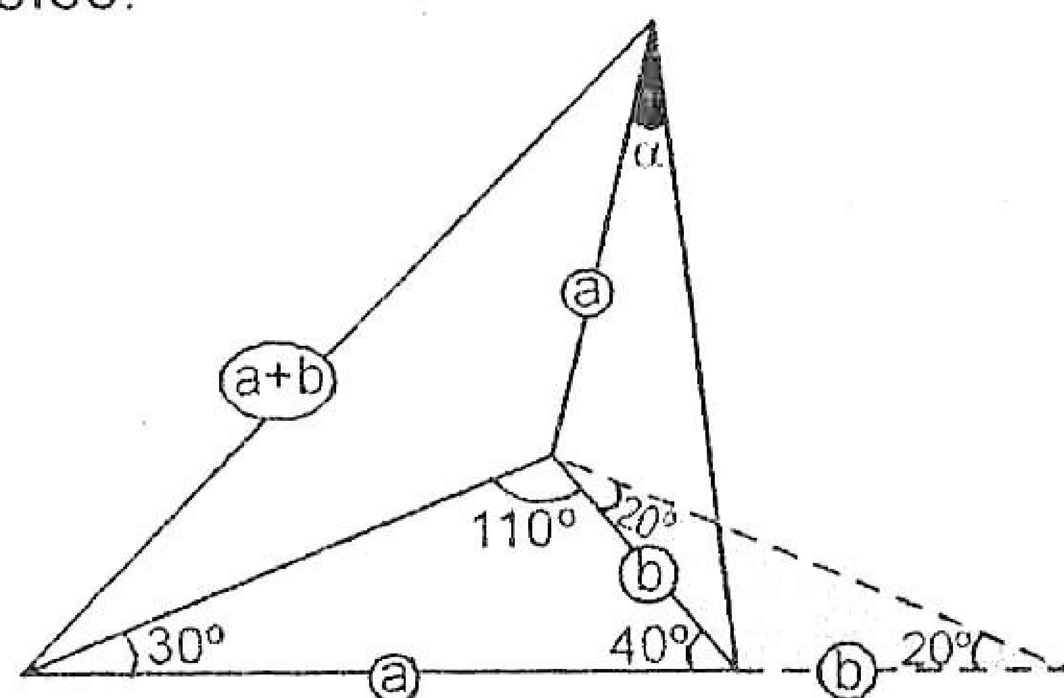
$$\therefore\ 3\alpha + 6\alpha + 3\alpha = 180^\circ$$
$$12\alpha = 180^\circ$$
$$\alpha = 15^\circ$$

Solución N° 80

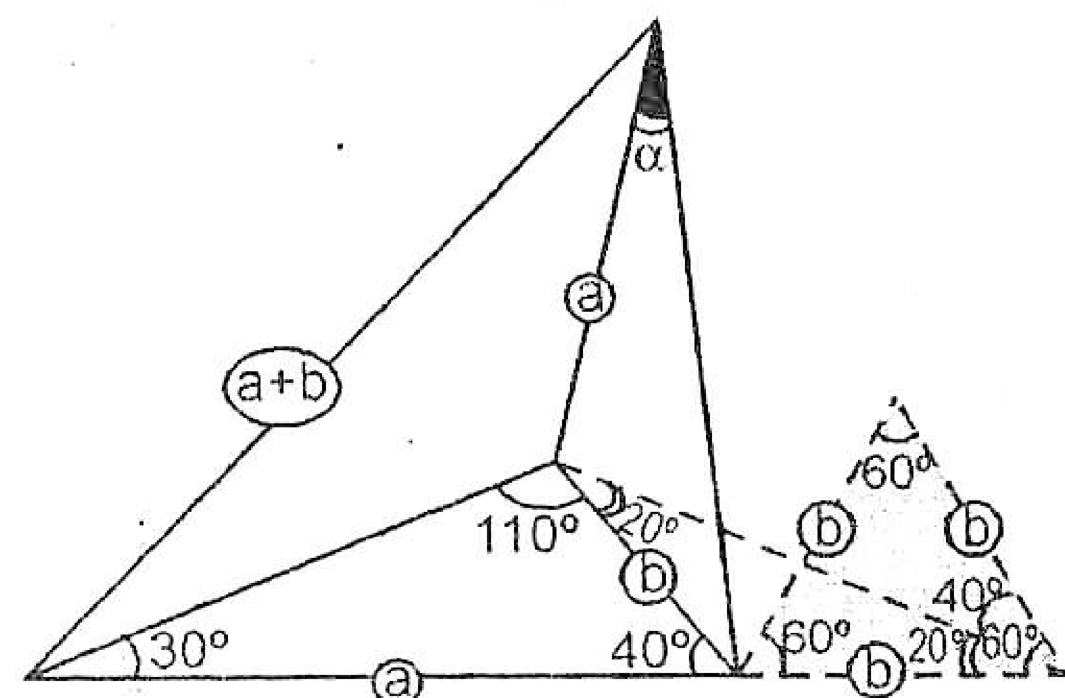
De la figura se observa:



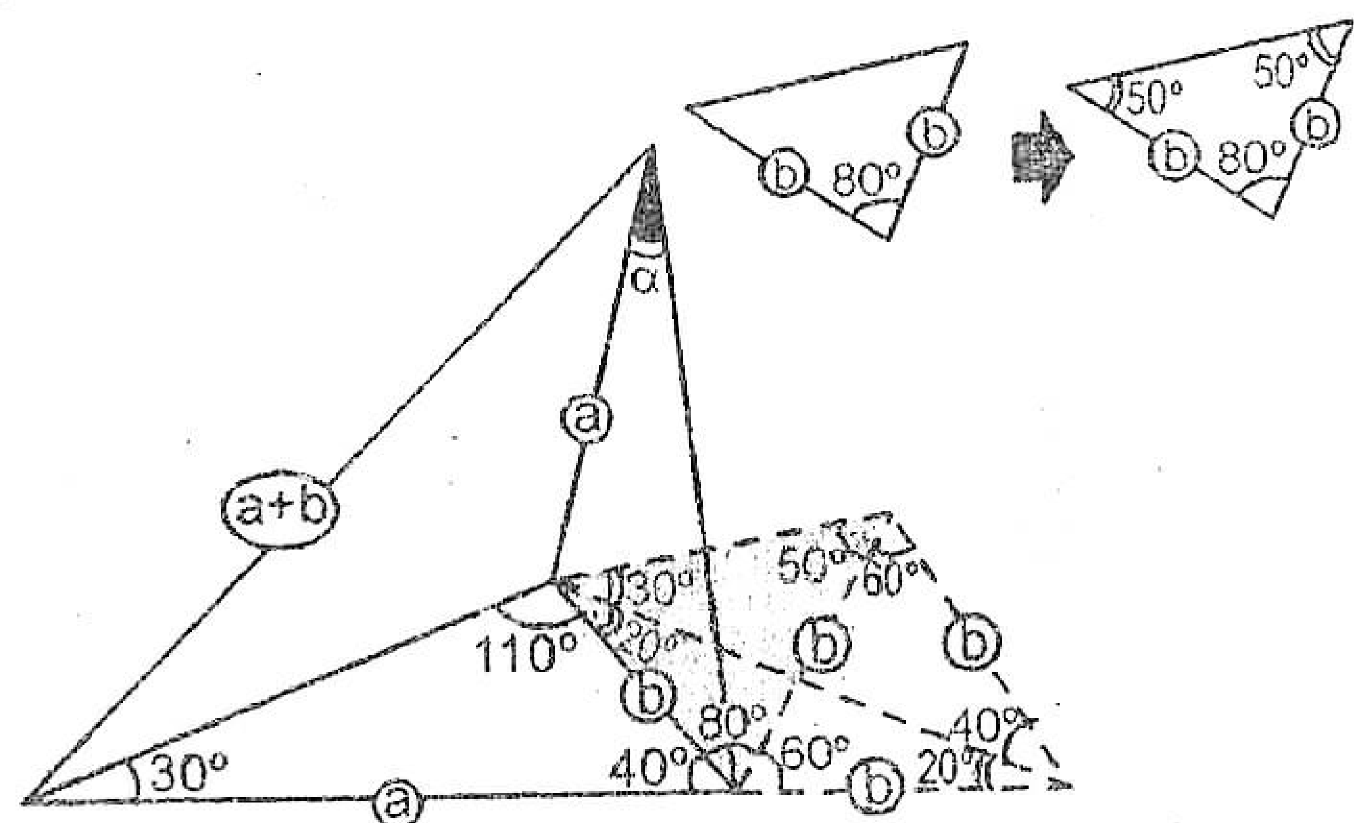
Paso N° 1:
Realizamos el siguiente trazo para formar lados iguales con ello obtenemos un triángulo isósceles.



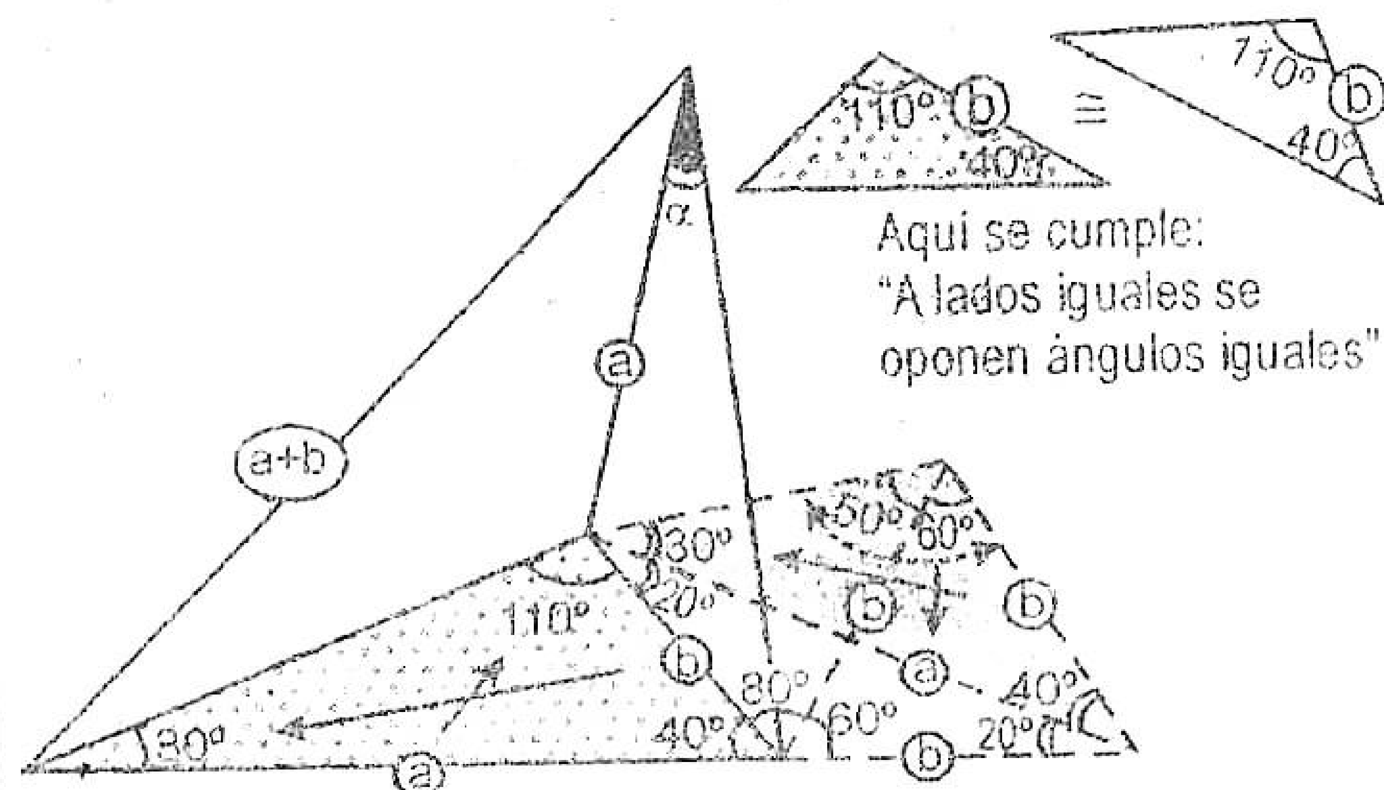
Paso N° 2:
Ahora construimos un triángulo equilátero de la siguiente manera.



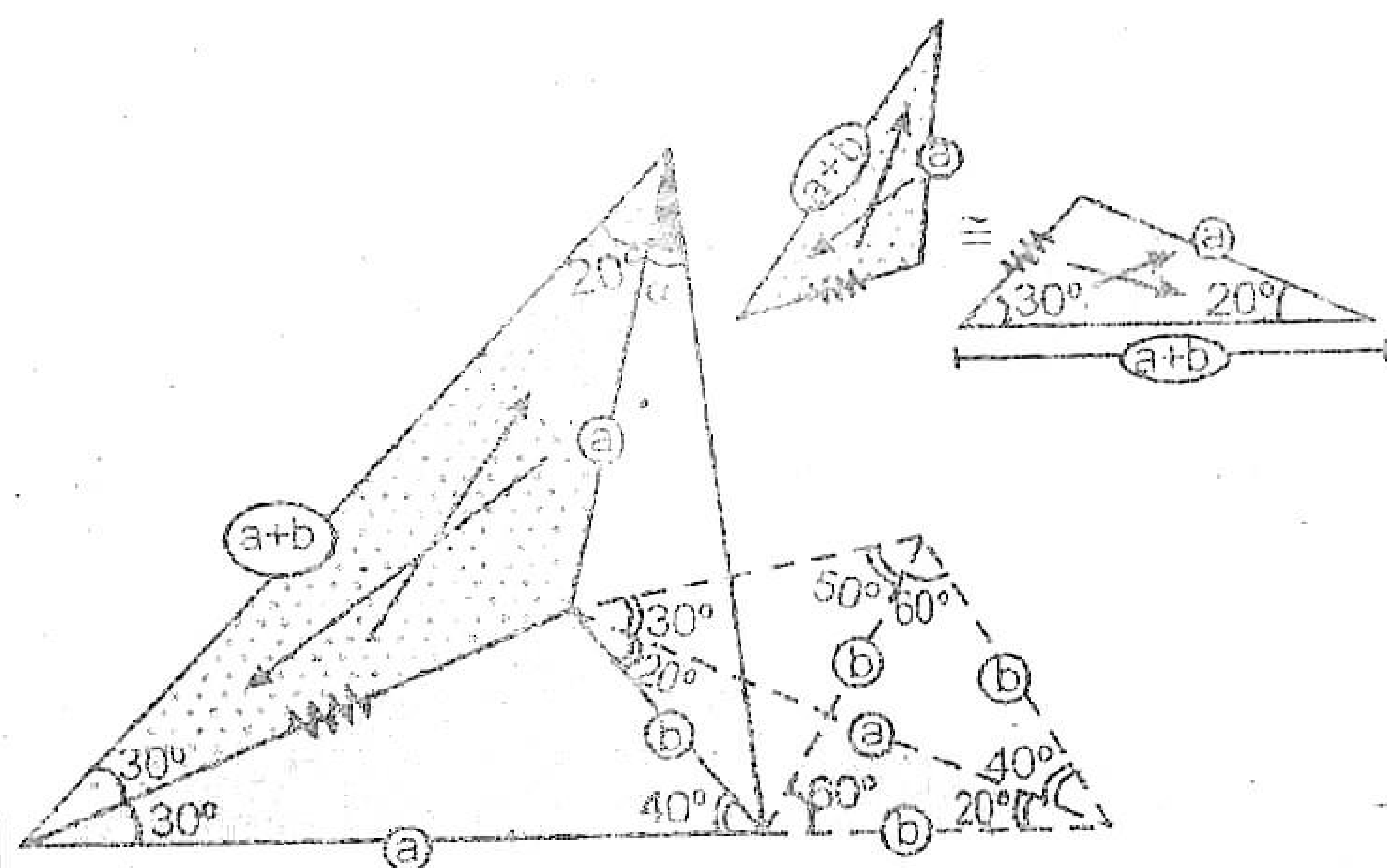
Paso N° 3:
Se observa un nuevo tirángulo isósceles de la forma siguiente.



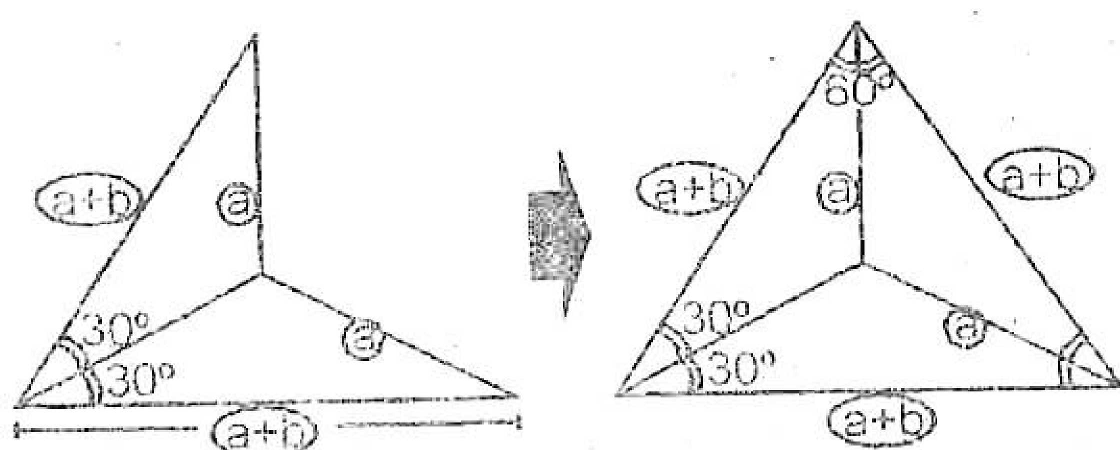
Paso Nº 4:
Se obtiene de la figura dos triángulos congruentes, caso (A.L.A.)



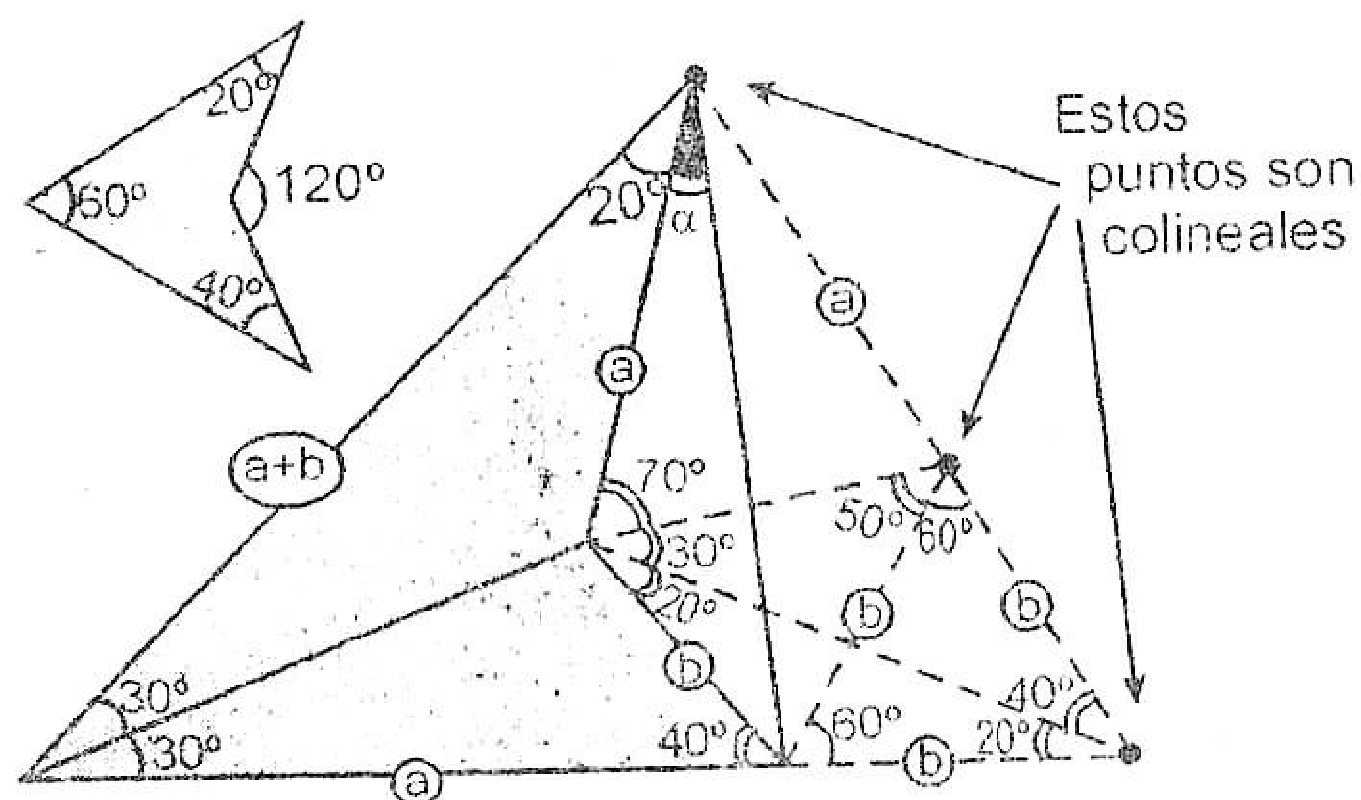
Paso Nº 5:
Ahora también se observa dos nuevos triángulos congruentes, caso (L.L.L.)



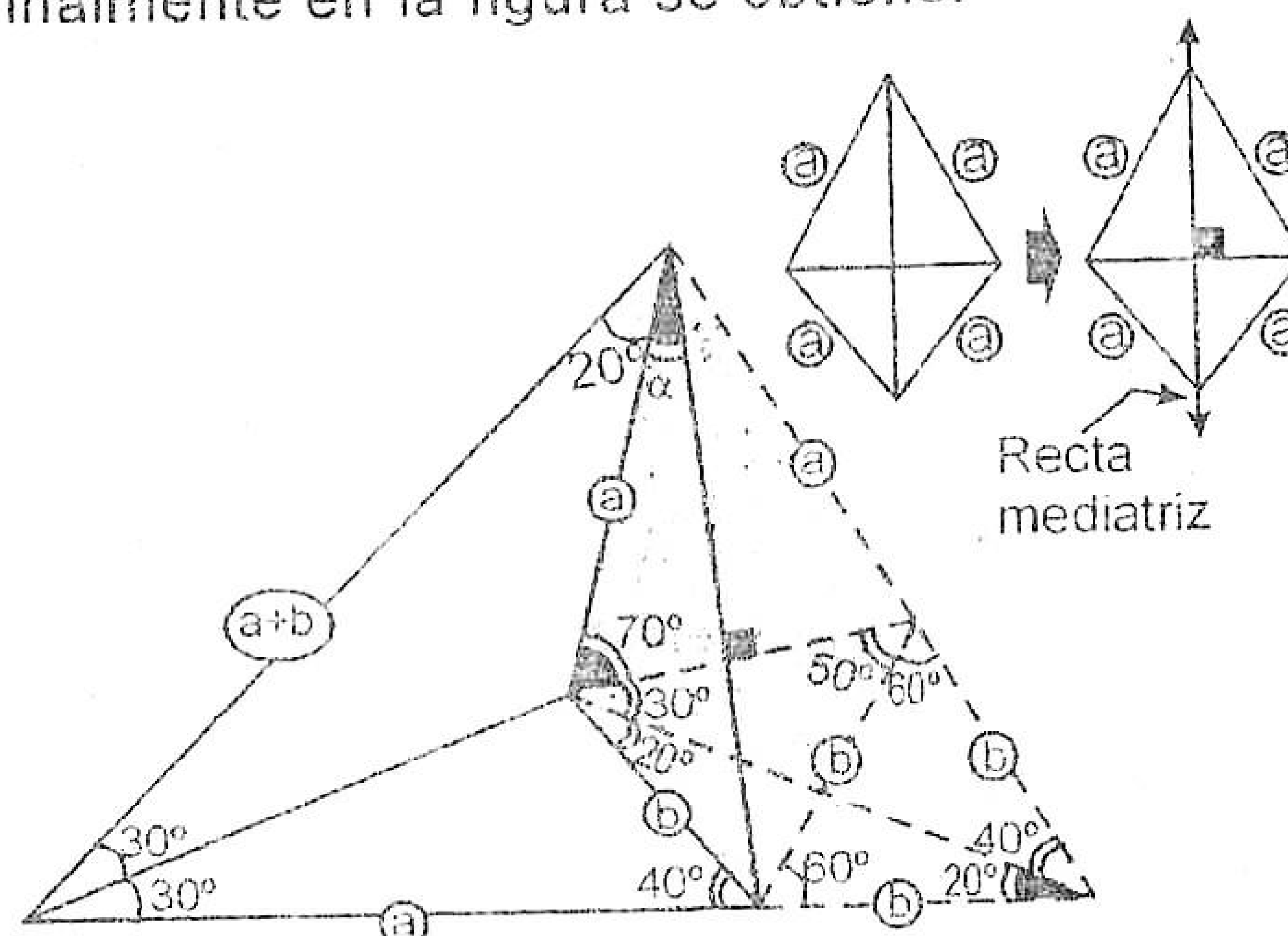
Paso Nº 6:
Son la nueva figura se ha obtenido un triángulo equilátero.

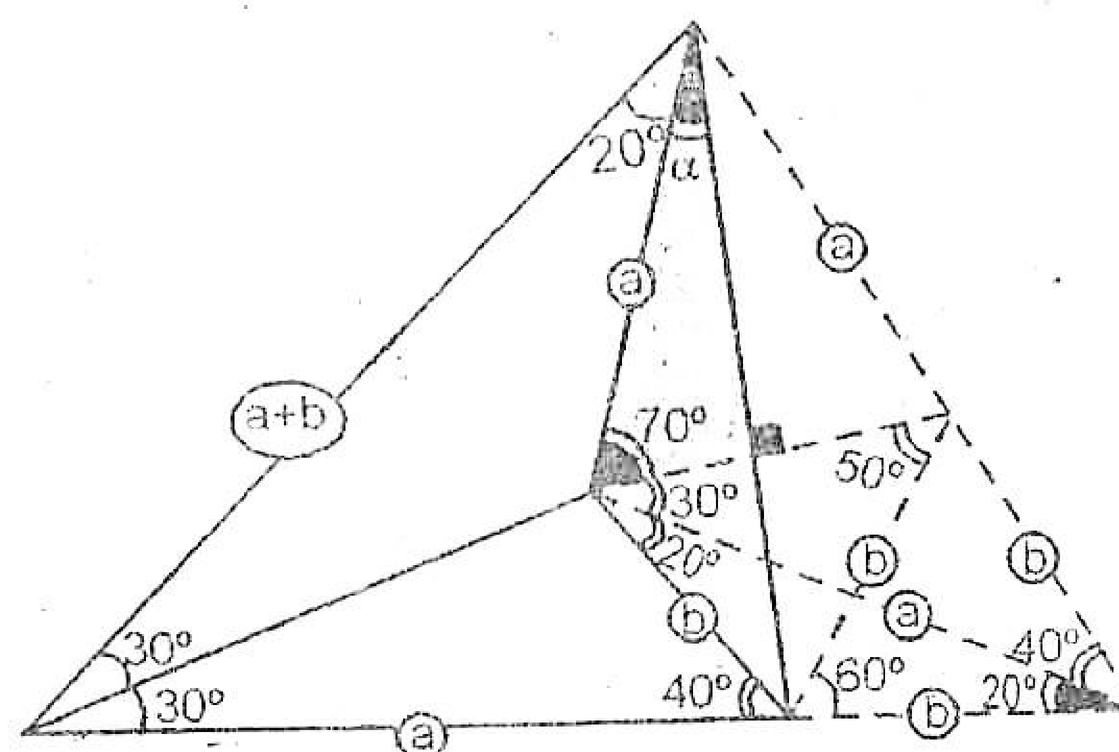


También se cumple:



Paso Nº 7:
Finalmente en la figura se obtiene:



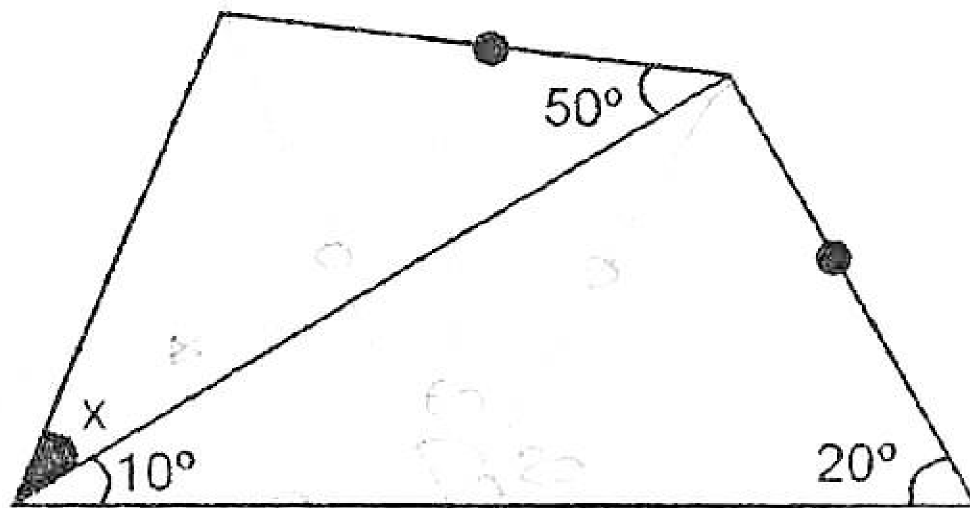


$\therefore \quad 70^\circ + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$

Problemas Propuestos

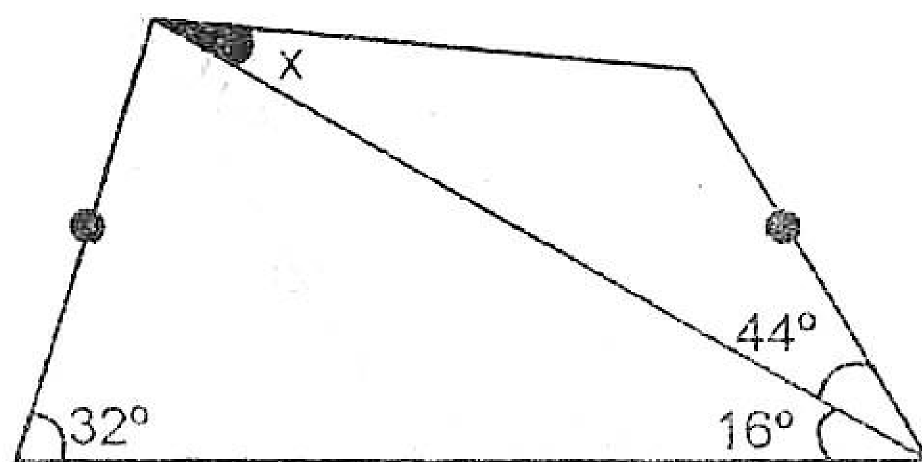
01. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 60°



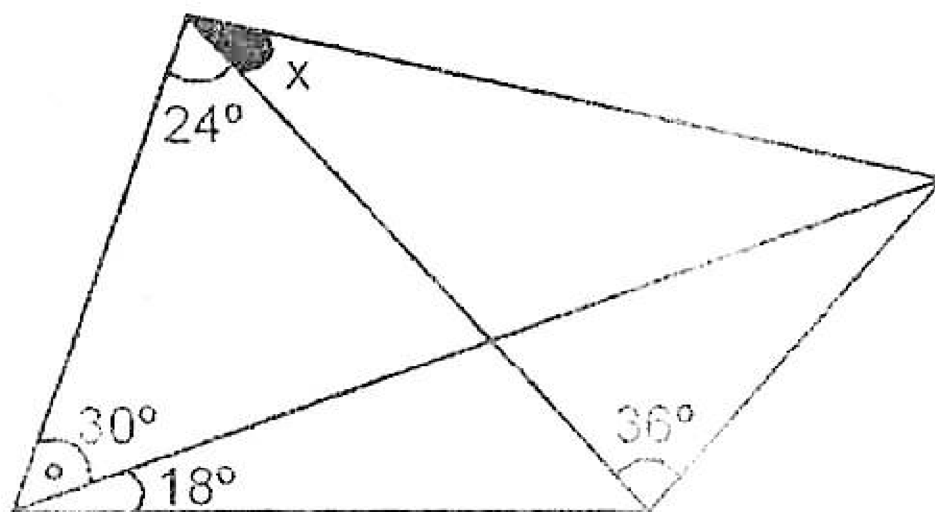
02. Calcular "x"

A) 16°
B) 24°
C) 30°
D) 32°
E) 44°



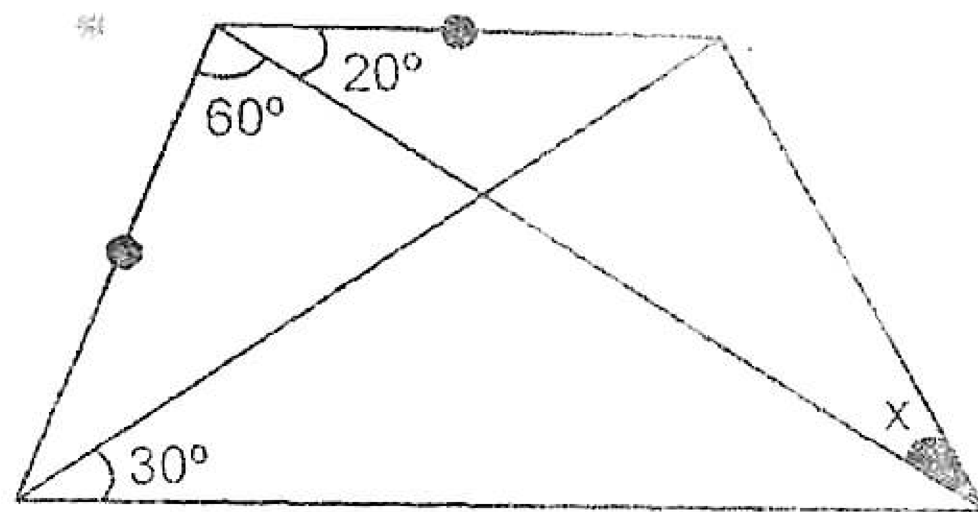
03. Calcular "x"

A) 15°
B) 24°
C) 18°
D) 30°
E) 36°



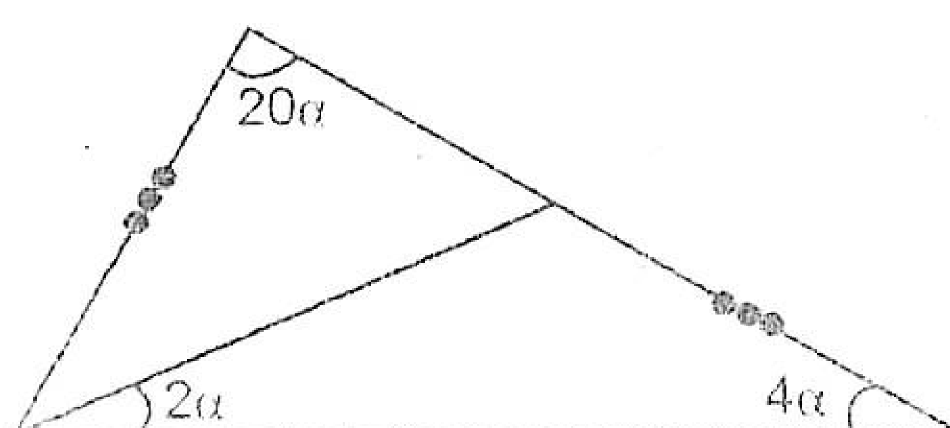
04. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 42°
E) 36°



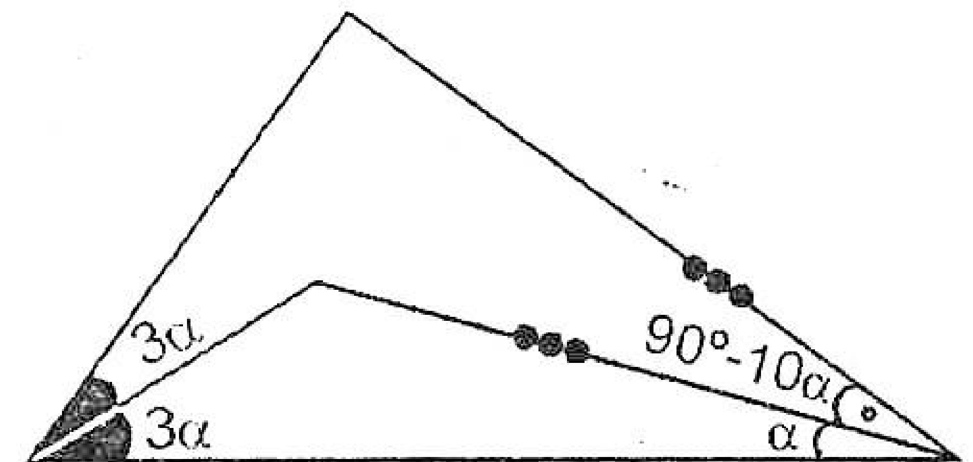
05. Calcular "α"

A) 4°
B) 5°
C) 5,5°
D) 4,5°
E) 6°



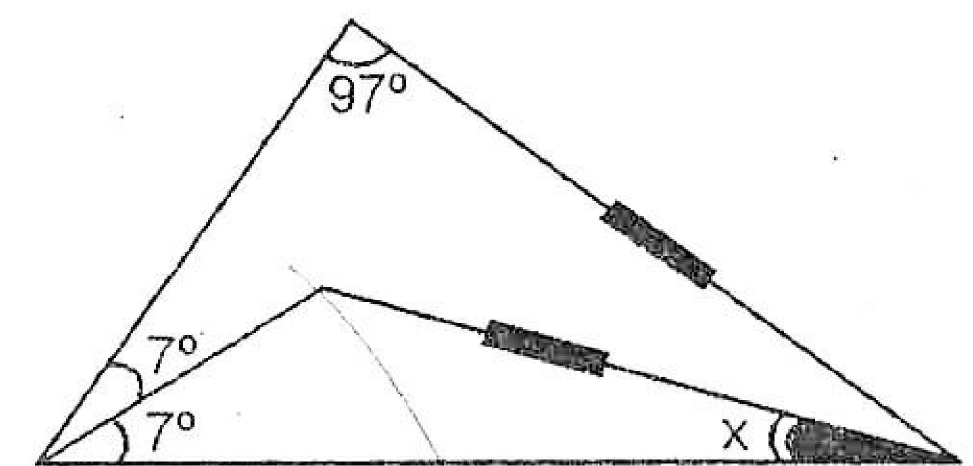
06. Calcular "α"

A) 6°
B) 7°
C) 7,5°
D) 8°
E) 9°



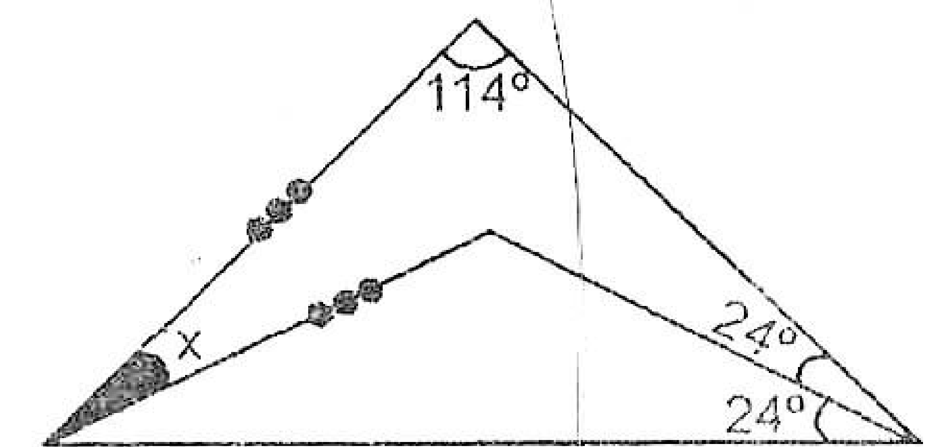
07. Calcular "x"

A) 20°
B) 21°
C) 22°
D) 23°
E) 24°



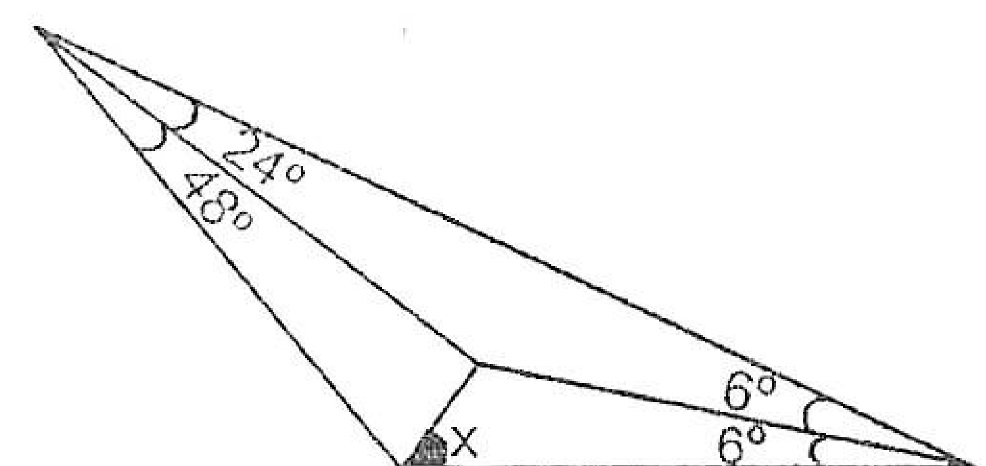
08. Calcular "x"

A) 12°
B) 16°
C) 18°
D) 20°
E) 24°



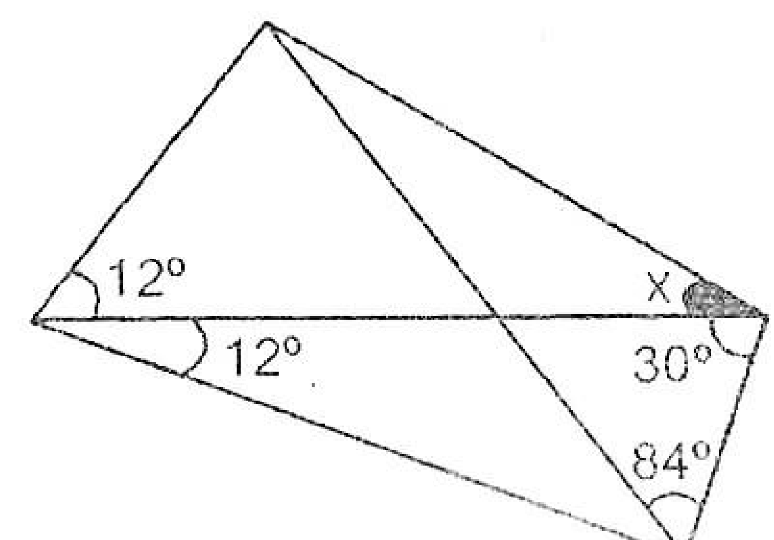
09. Calcular "x"

A) 24°
B) 30°
C) 32°
D) 36°
E) 60°



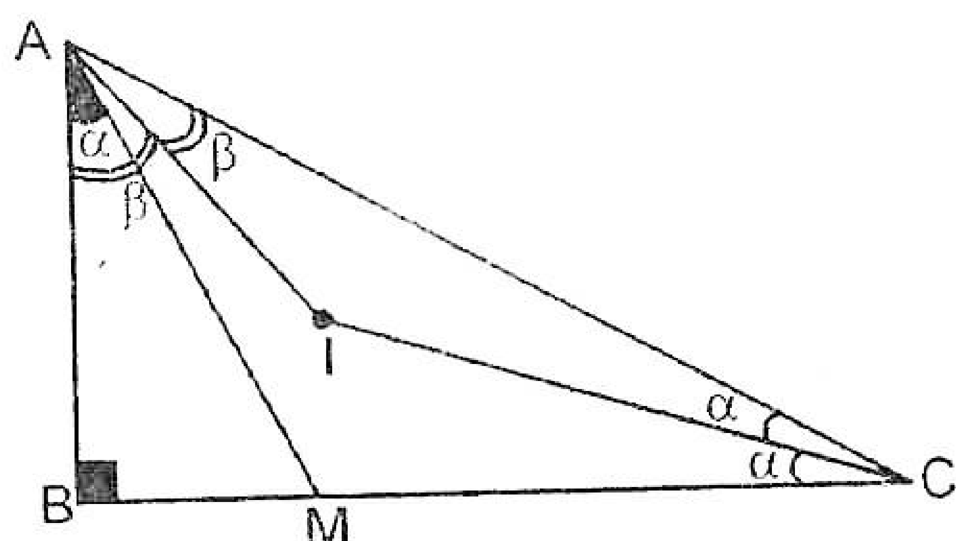
10. Calcular "x"

A) 12°
B) 16°
C) 18°
D) 20°
E) 24°



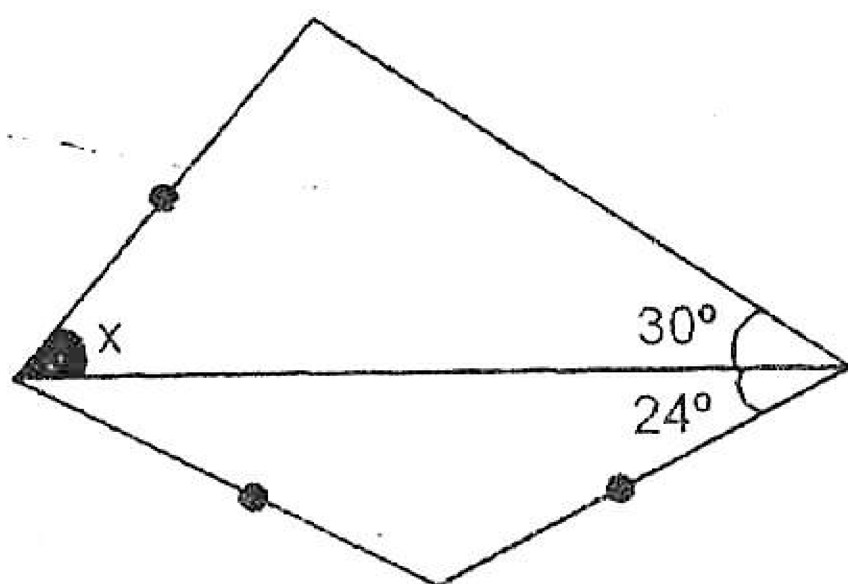
11. En la figura, AI = 4, calcular "AM"

A) $4\sqrt{3}$
B) $8\sqrt{2}$
C) $4\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{3}$



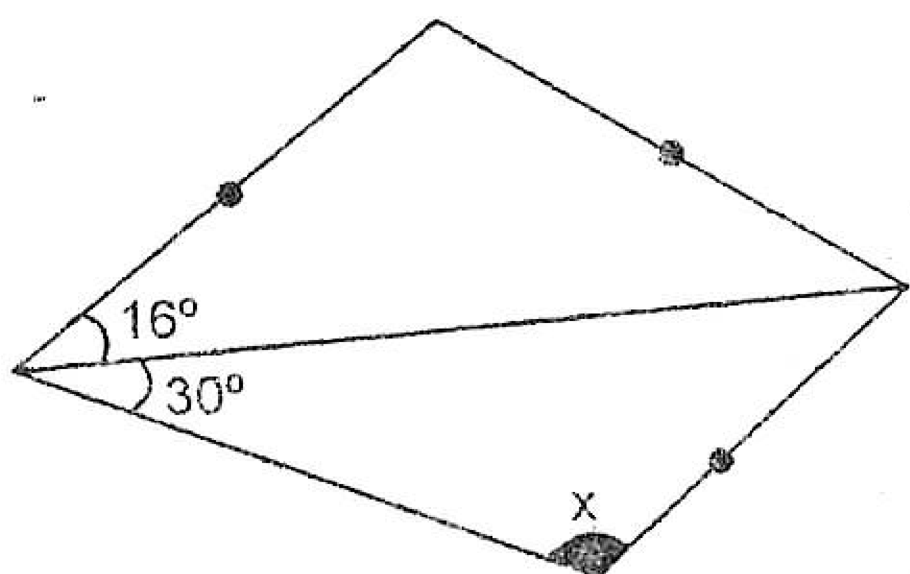
12. Calcular "x"

A) 36°
B) 30°
C) 24°
D) 48°
E) 16°



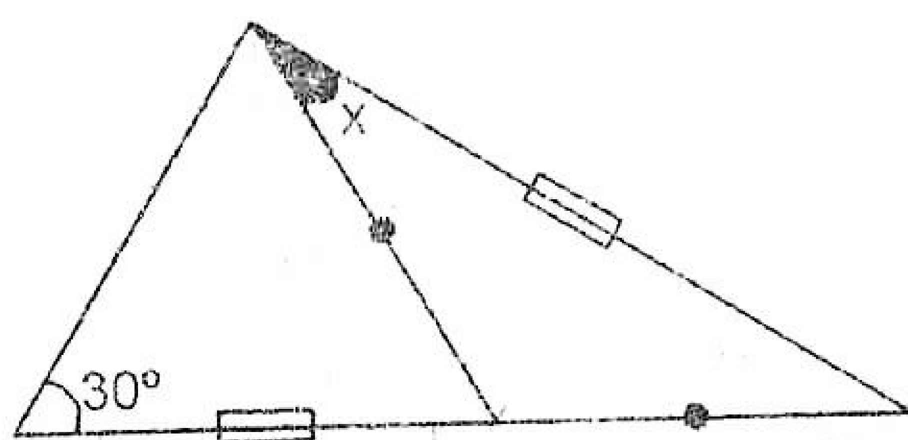
13. Calcular "x"

A) 44°
B) 24°
C) 106°
D) 95°
E) 94°



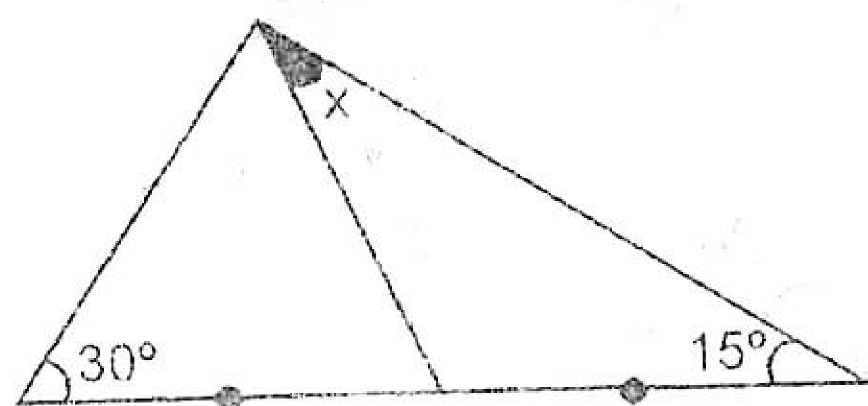
14. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



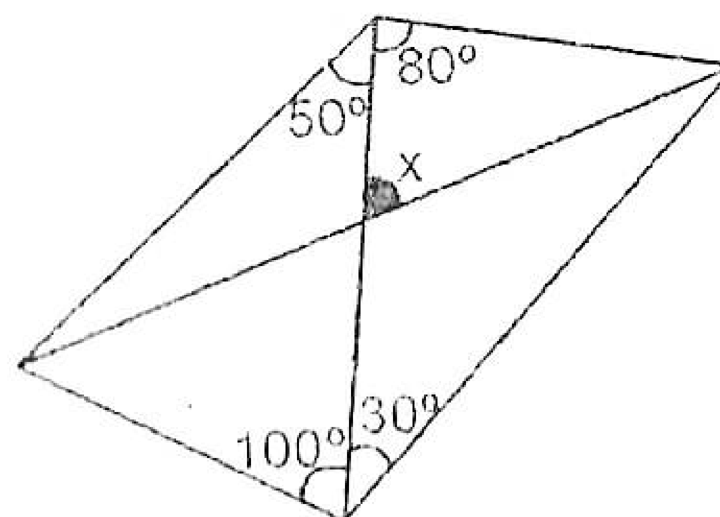
15. Calcular "x"

A) 15°
B) 20°
C) 28°
D) 30°
E) 37°



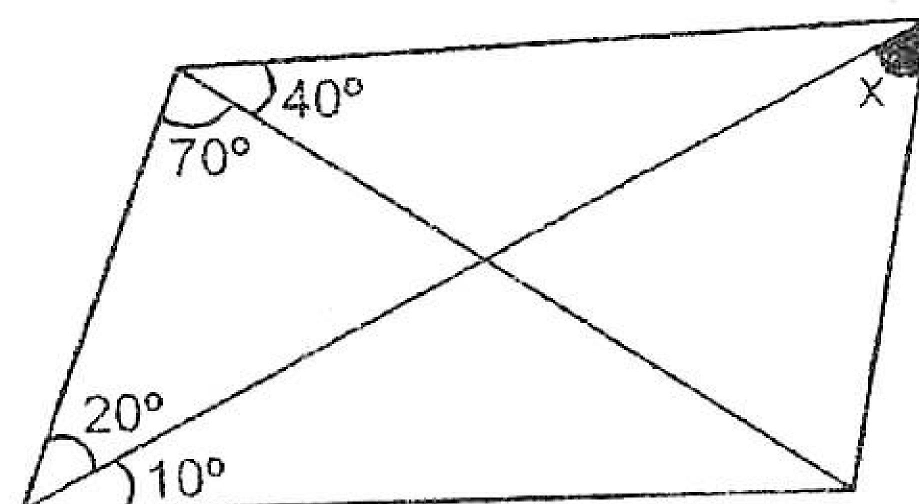
16. Calcular "x"

A) 30°
B) 45°
C) 50°
D) 60°
E) 70°



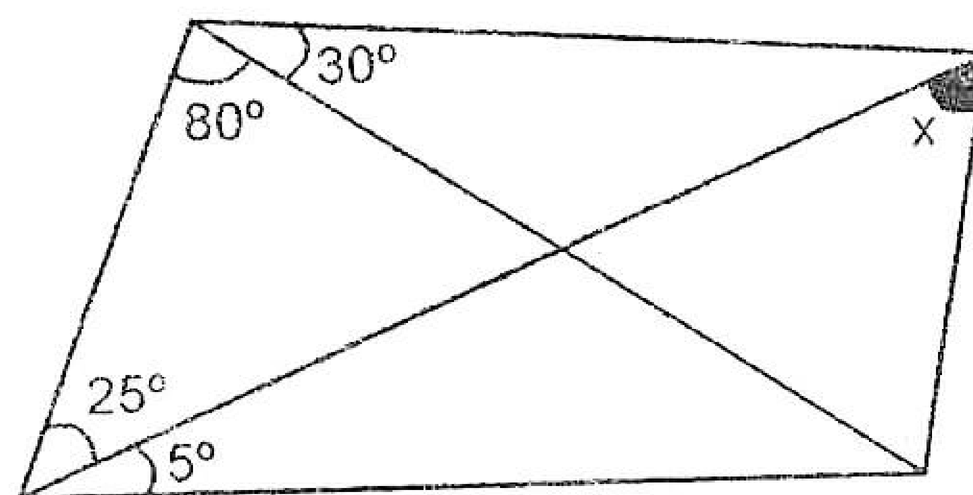
17. Calcular "x"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 40°
E) 45°



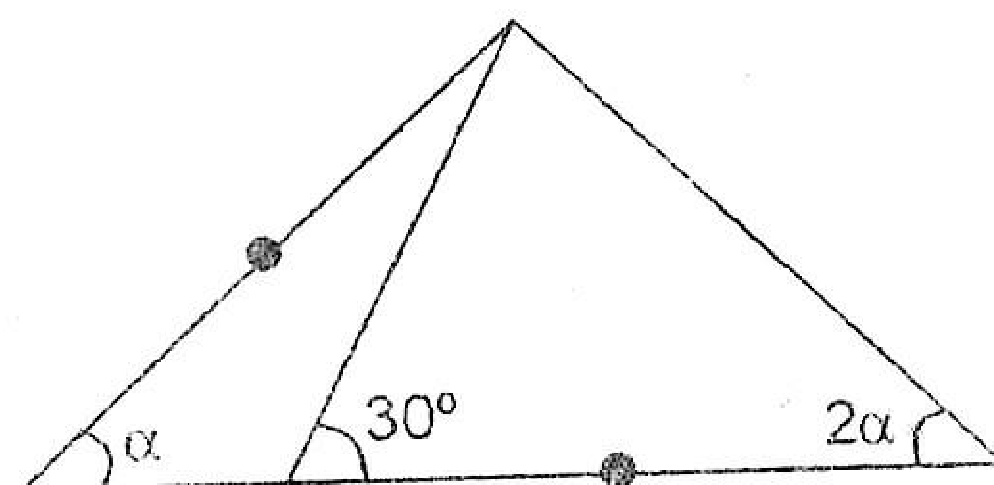
18. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 40°



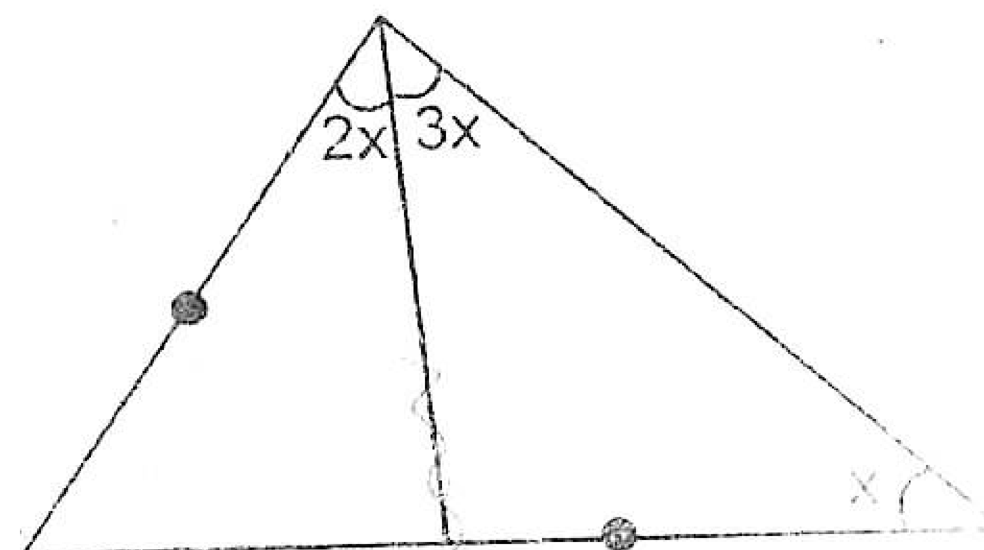
19. Calcular "α"

A) 10°
B) 20°
C) 30°
D) 15°
E) 18°



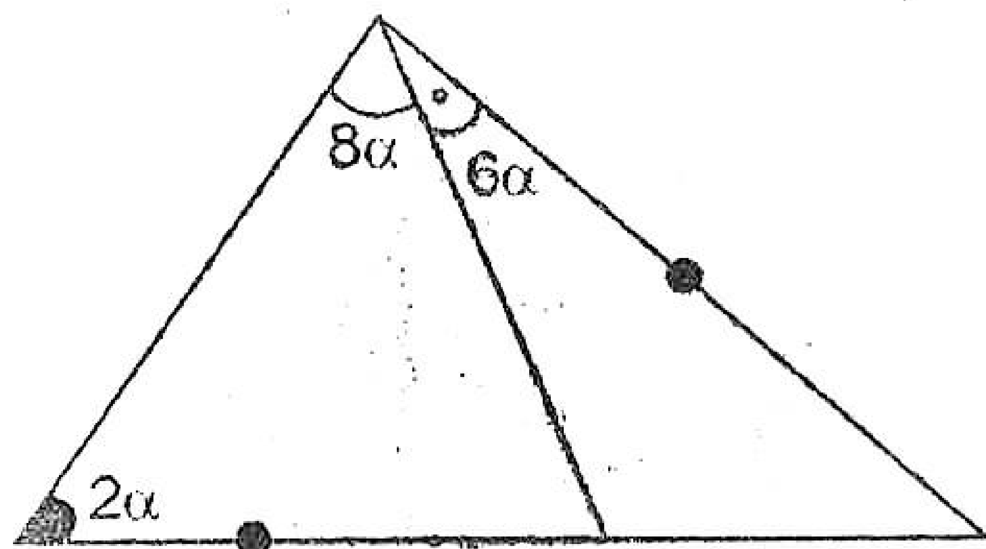
20. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 25,7°
D) 28°
E) 29°



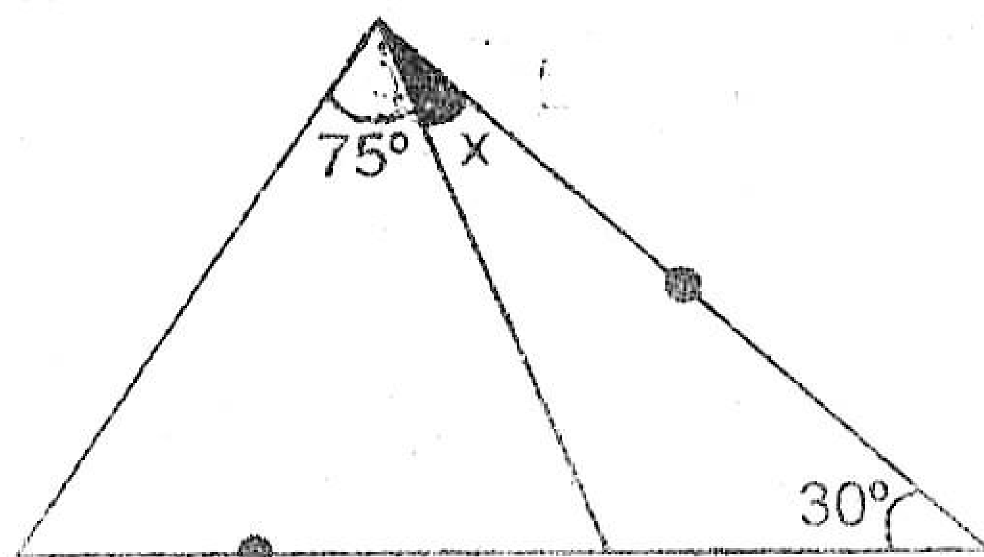
21. Calcular "α"

A) 10°
B) 12°
C) 8°
D) 9°
E) 6°



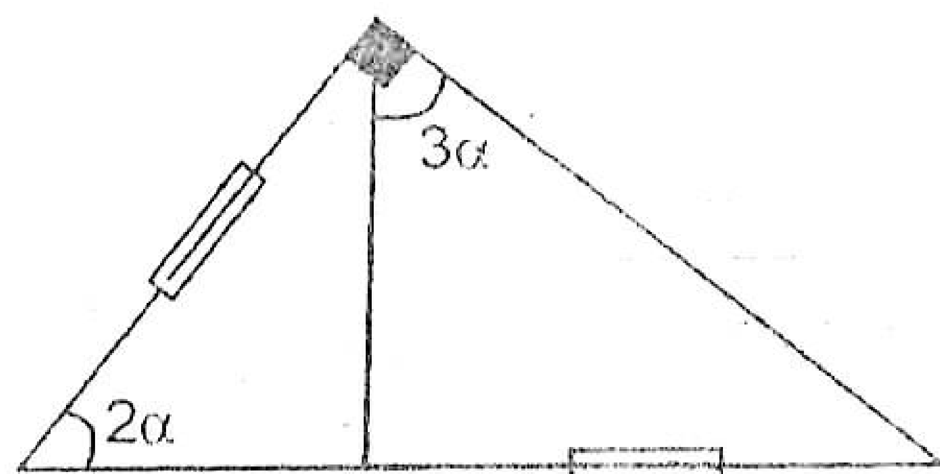
22. Calcular "x"

A) 30°
B) 35°
C) 45°
D) 50°
E) 55°



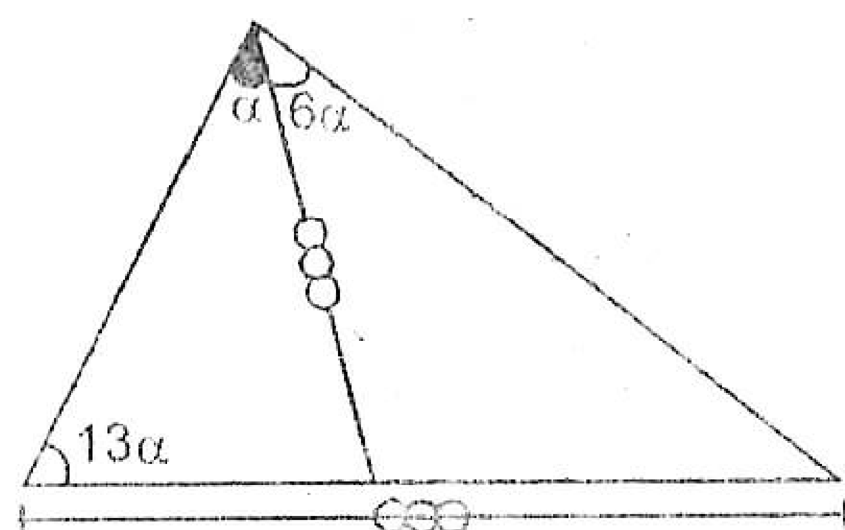
23. Calcular "α"

A) 18°
B) 20°
C) 22,5°
D) 23°
E) 24°



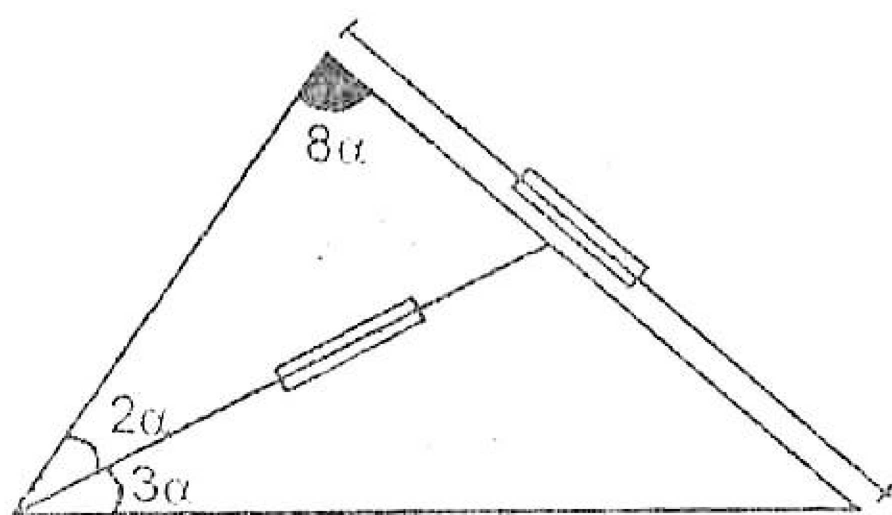
24. Calcular "α"

A) 5°
B) 5,5°
C) 6,6°
D) 6,3°
E) 6,8°



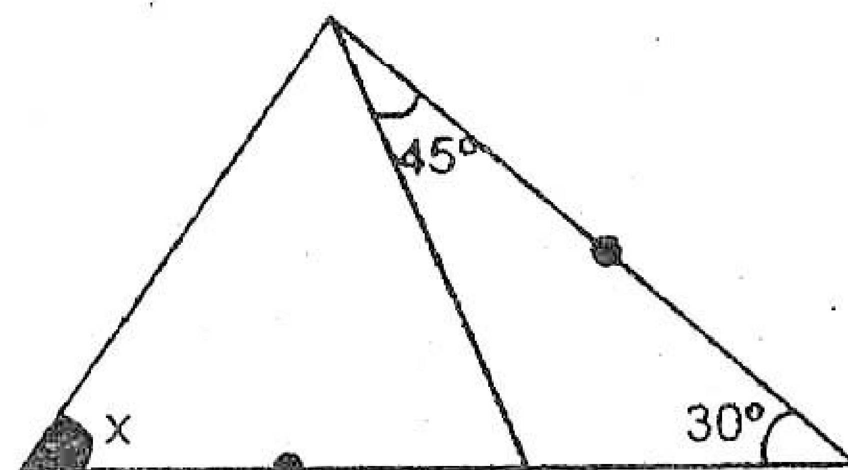
25. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



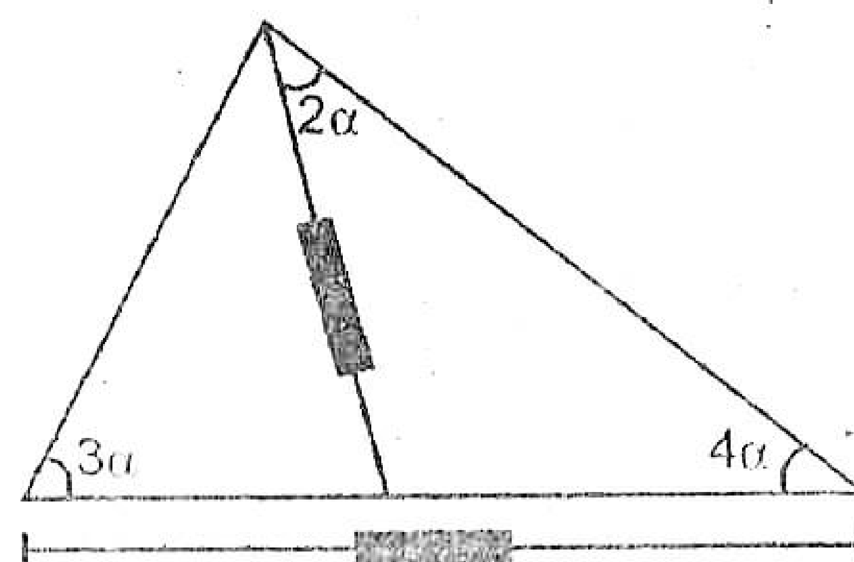
26. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 45°



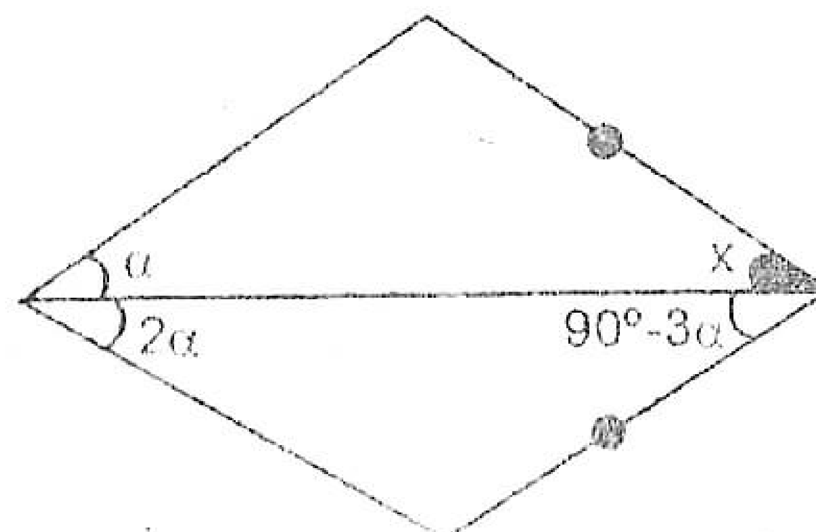
27. Calcular "α"

A) 18°
B) 20°
C) 24°
D) 15°
E) 12°



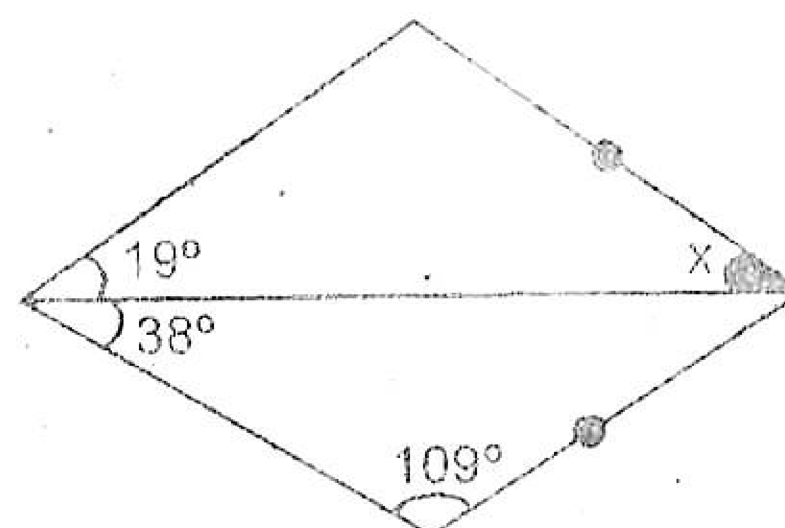
28. Calcular "x"

A) 30°
B) 15°
C) $30° - \alpha$
D) $30° + \alpha$
E) $45° - \dfrac{3\alpha}{2}$



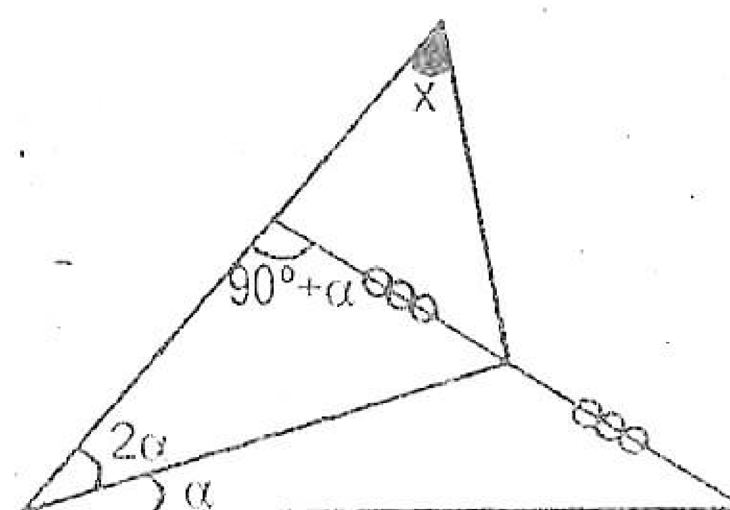
29. Calcular "x"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 19°
E) 11°



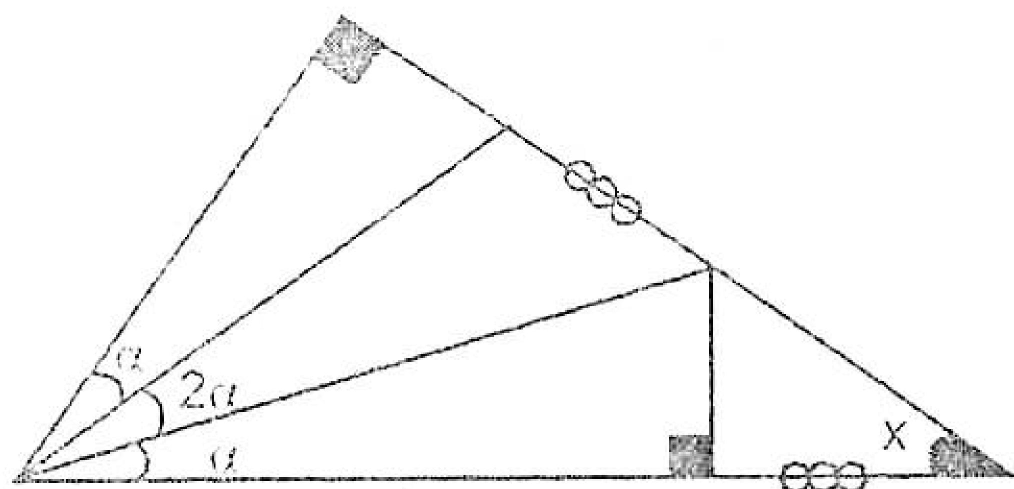
30. Calcular "x"

A) 30°
B) 18°
C) 37°
D) 8°
E) 15°



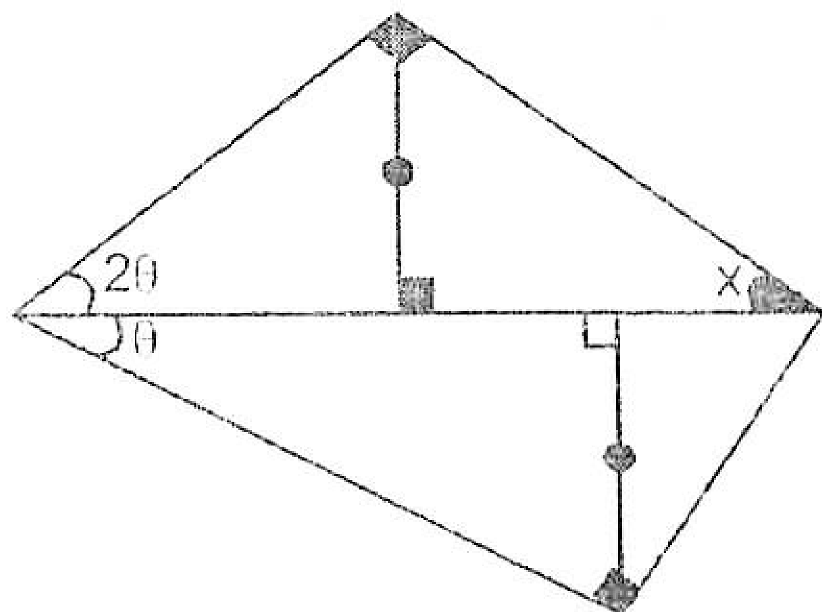
31. Calcular "x"

A) 15°
B) 30°
C) 53°/2
D) 37°/2
E) 14°



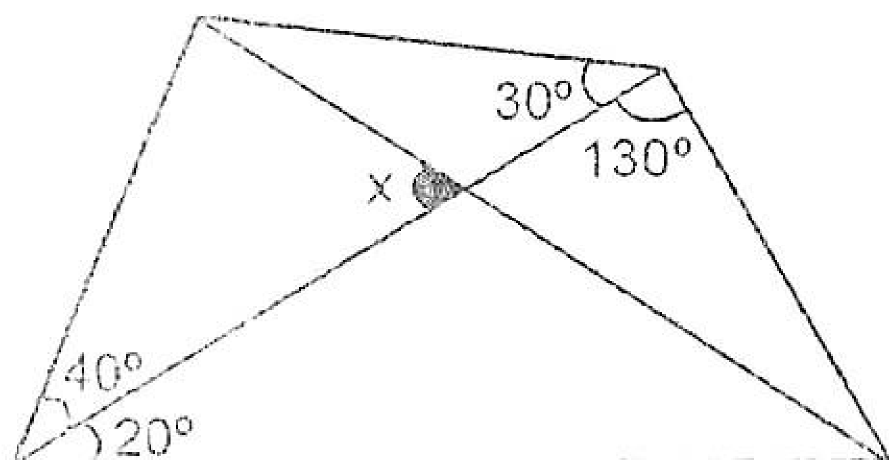
32. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 60°
D) 45°
E) 30°



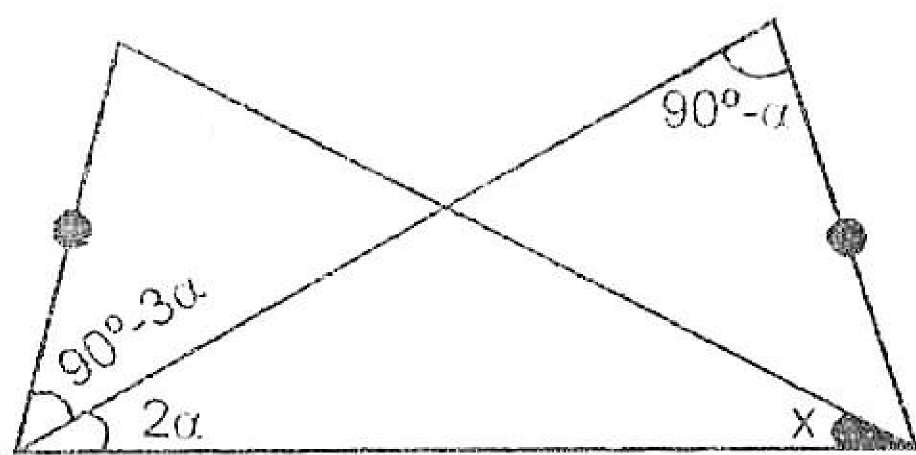
33. Calcular "x"

A) 40°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 24°



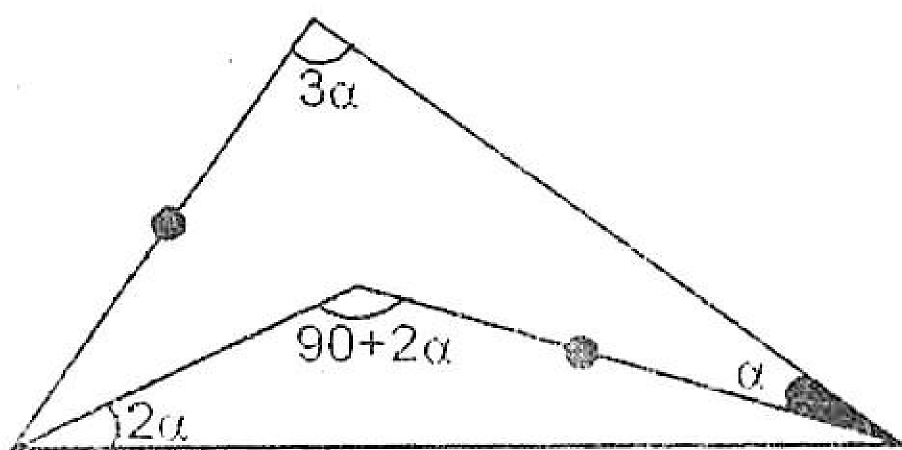
34. Calcular "x"

A) 2α
B) 90 – 3α
C) 45 – 2α
D) α
E) α/2



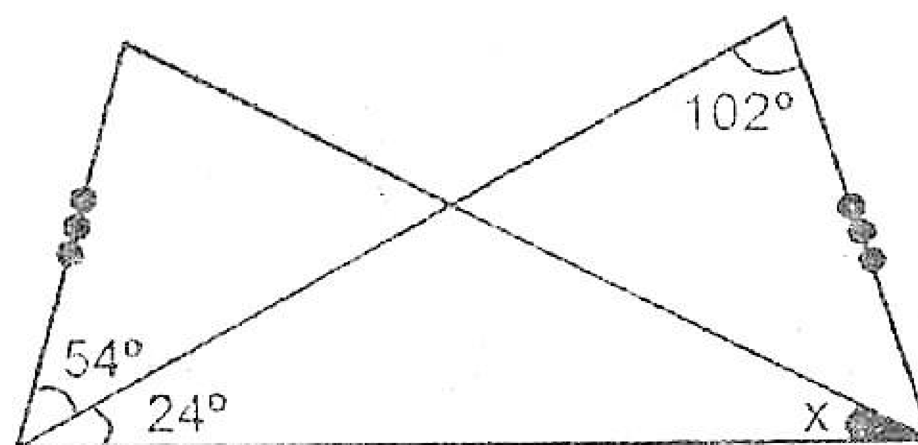
35. Calcular "α"

A) 15°
B) 18°
C) 20°
D) 22,5°
E) 24°



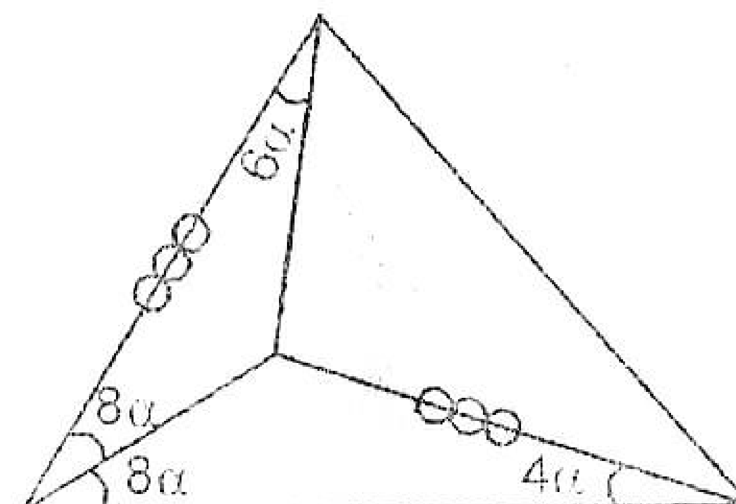
36. Calcular "x"

A) 12°
B) 24°
C) 26°
D) 30°
E) 36°



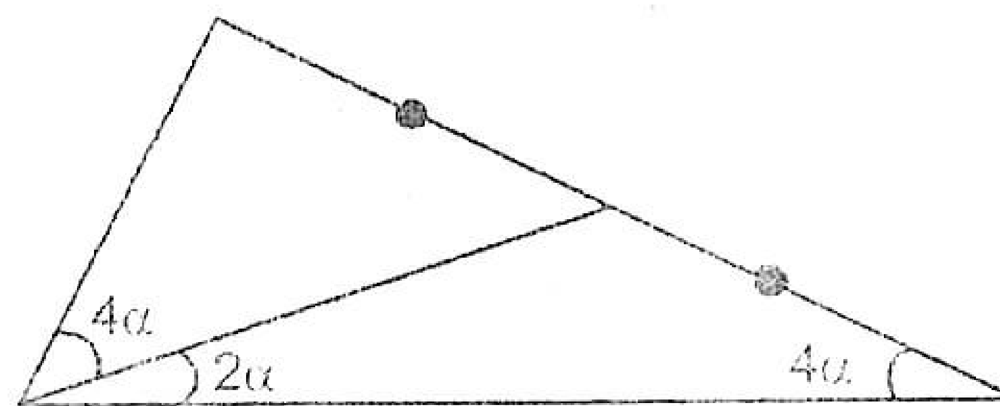
37. Calcular "α"

A) 3°
B) 4°
C) 5°
D) 6°
E) 7°



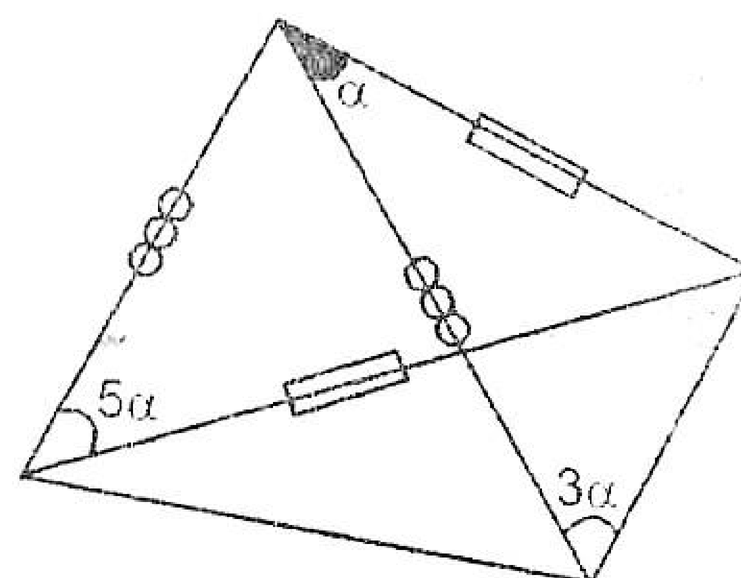
38. Calcular "α"

A) 6°
B) 7,5°
C) 8°
D) 9°
E) 10°



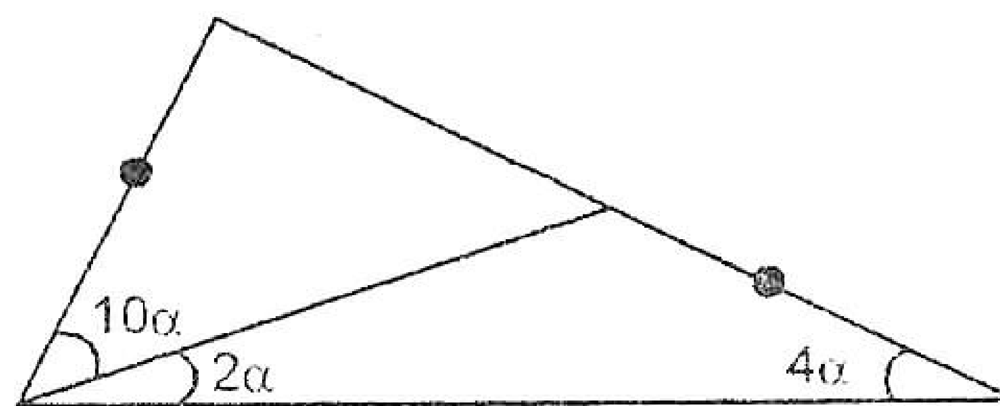
39. Calcular "α"

A) 8°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



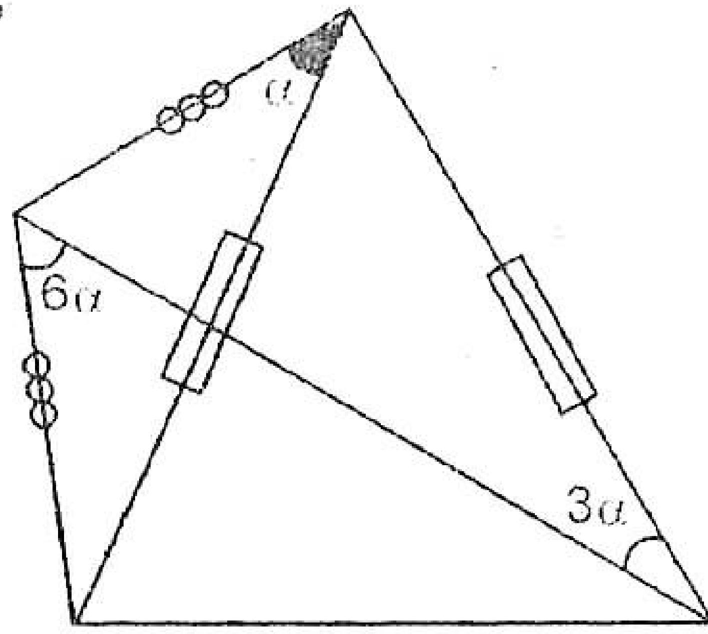
40. Calcular "α"

A) 5°
B) 6°
C) 7,5°
D) 9°
E) 10°



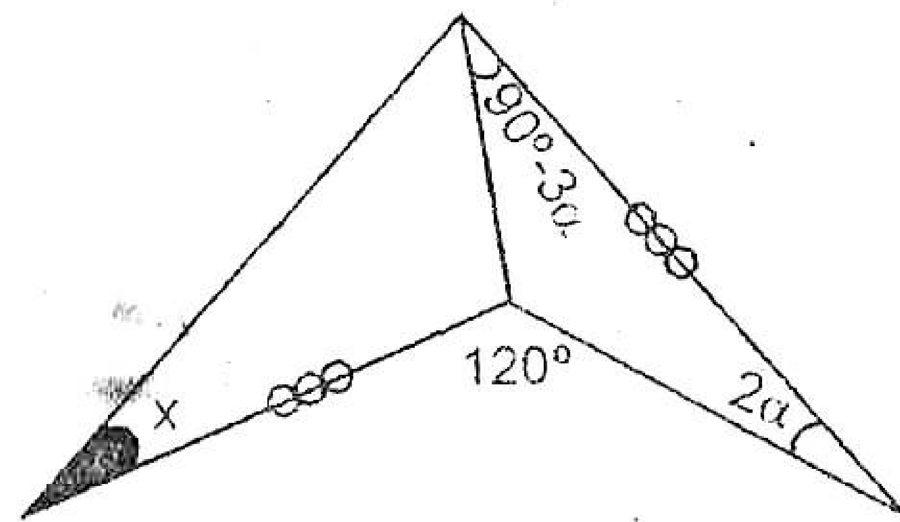
41. Calcular "α"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 30°
E) 32°



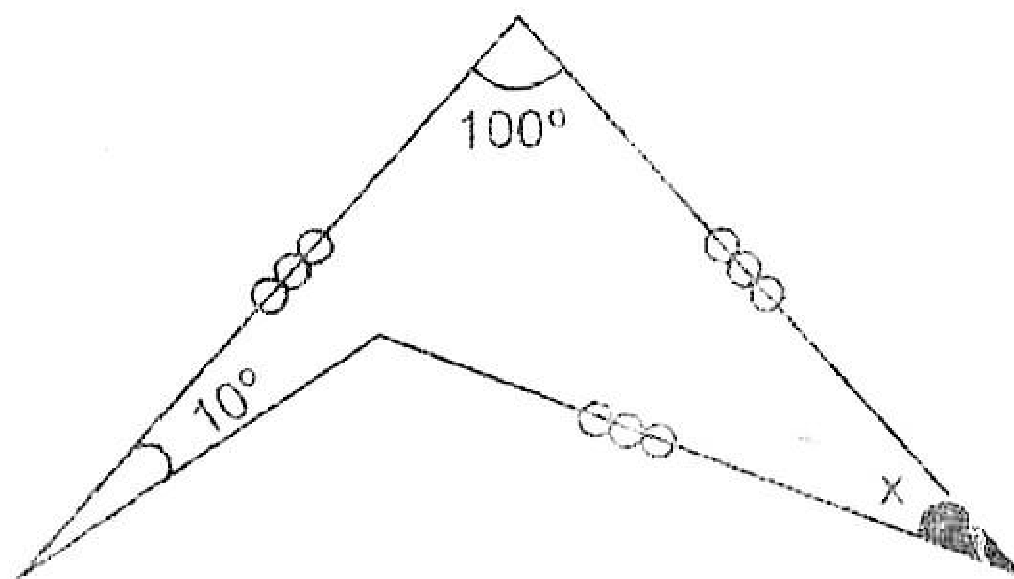
42. Calcular "x"

A) 30°–3α
B) 60°–3α
C) α
D) 2α/3
E) 90 – 4α



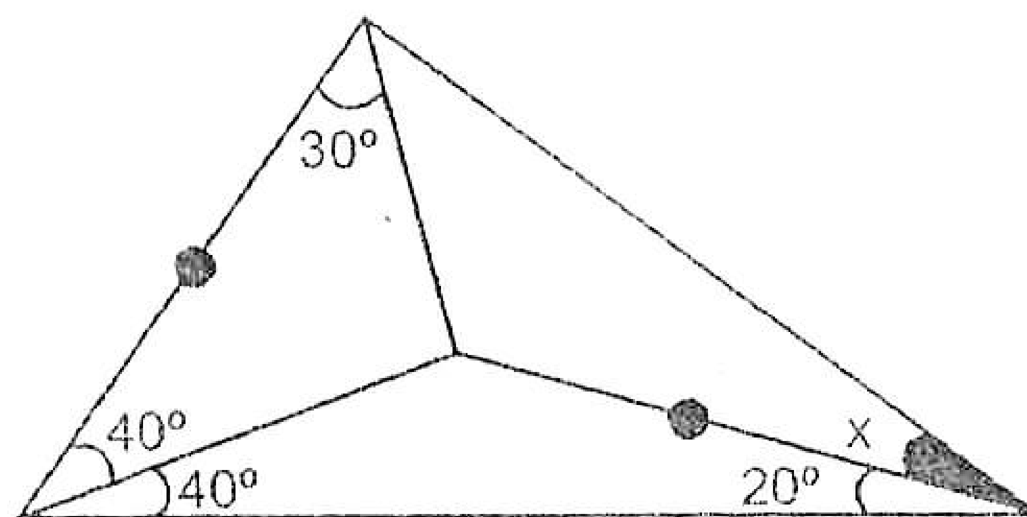
43. Calcular "x"

A) 5°
B) 10°
C) 15°
D) 20°
E) 25°



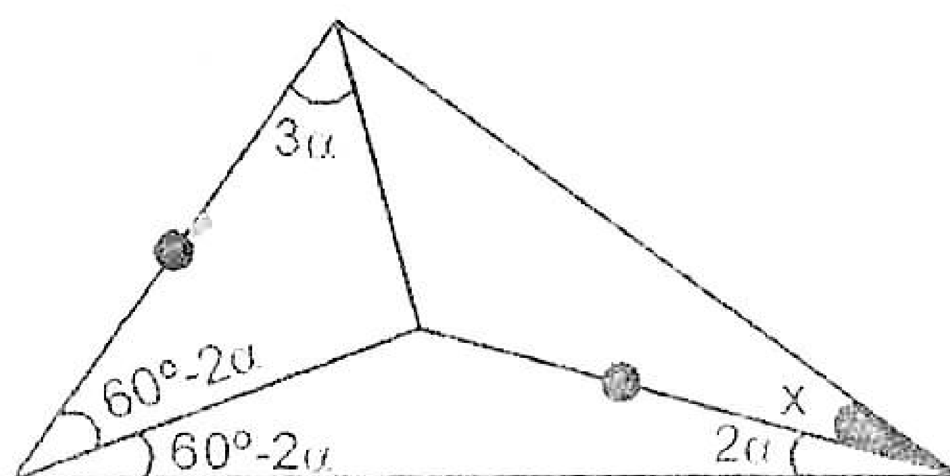
44. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 20°
D) 25°
E) 30°



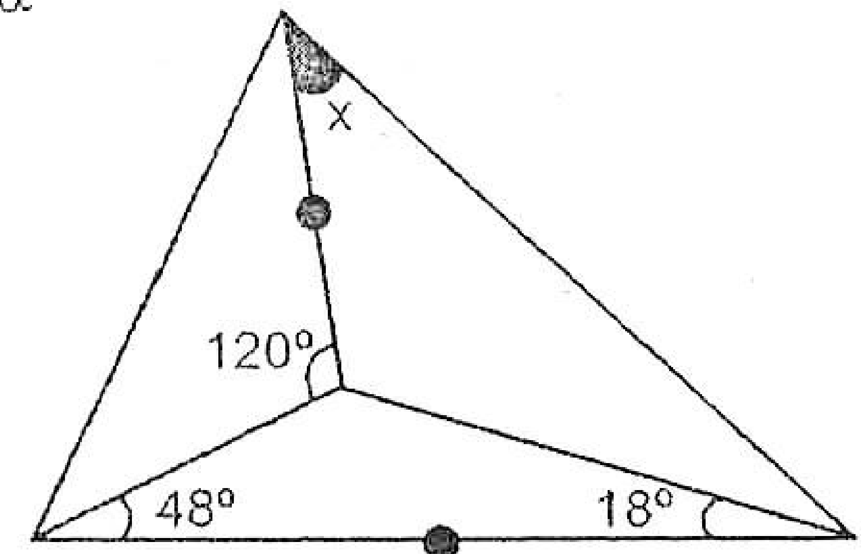
45. Calcular "α"

A) 30°
B) 30°+α
C) 30°–α
D) 60°–α
E) α



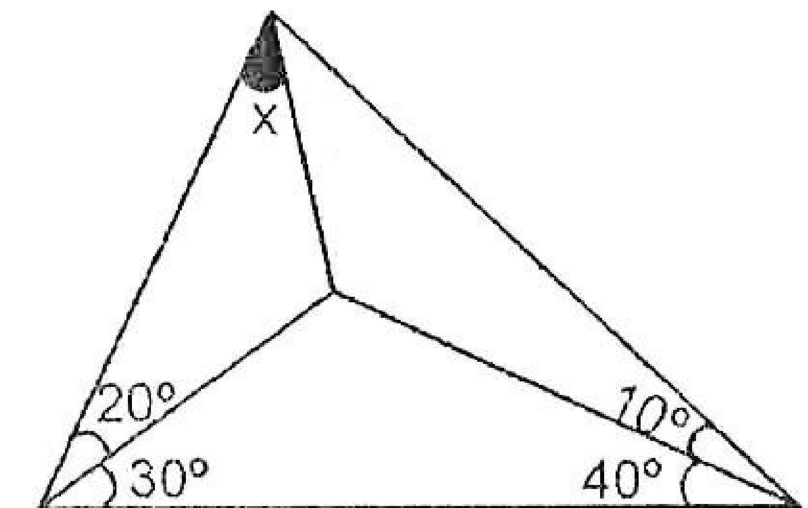
46. Calcular "α"

A) 12°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 30°



47. Calcular "x"

A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 50°
E) 60°



48. Exteriormente relativo al lado $\overline{AB}$ de un triángulo ABC, se ubica el punto "P", tal que PB = BC, calcular la m∡ APB.
Si: $m\measuredangle BAC = 2m\measuredangle PAB = 2\alpha$ y
$m\measuredangle ACB = 90° + \alpha$

A) 100° B) 135° C) 120°
D) 150° E) 127°

49. Exteriormente y relativo al lado $\overline{AC}$ de un triángulo obtuzangulo ABC, (obtuzo en "B") se ubica el punto "D", tal que BC=CD. Calcular m∡ ABC , si $m\measuredangle DAC = 2m\measuredangle BAC$ y $m\measuredangle ACD = 90° - 3m\measuredangle BAC$

A) 120° B) 135° C) 150°
D) 160° E) 165°

50. En un triángulo ABC acutangulo, sobre "BC" se ubica un punto exterior "D" de tal manera que AD es bisectriz del m∡ BDC , donde además $m\measuredangle DBC = 90°+\theta$, $m\measuredangle BDA = \theta$ y $m\measuredangle ACB = 60° + 2\theta$. Hallar el máximo valor entero de m∡ BAD . $(\theta \neq 0°)$

A) 30° B) 29° C) 28°
D) 27° E) 20°

51. En un triángulo isósceles ABC (AB=BC) donde $m\measuredangle ABC = 20°$ se traza la ceviana $\overline{CP}$ ($P \in \overline{AB}$), tal que: BC = AC + AP. Calcular m∡ APC

A) 10° B) 60° C) 30°
D) 45° E) 37°

52. En un triángulo ABC ($m\measuredangle B = 100^\circ$) se traza la bisectriz interior $\overline{CM}$, si AC = AM+BC. Calcular $m\measuredangle BAC$

A) 30° B) 15° C) 20°
D) 18° E) 37°

53. Se tiene el triángulo rectangulo ABC (recto en B), en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica el punto "P" tal que: AC = BP y $2m\measuredangle BAC = 3m\measuredangle CPB$. Calcular: $m\measuredangle BAC$

A) 15° B) 60° C) 37°
D) 45° E) 53°

54. En el interior de un triángulo ABC (AB=BC) se toma el punto "P" tal que PB=AC, $m\measuredangle PBA = 10^\circ$ y $m\measuredangle PBC = 30^\circ$. Hallar la $m\measuredangle PAB$.

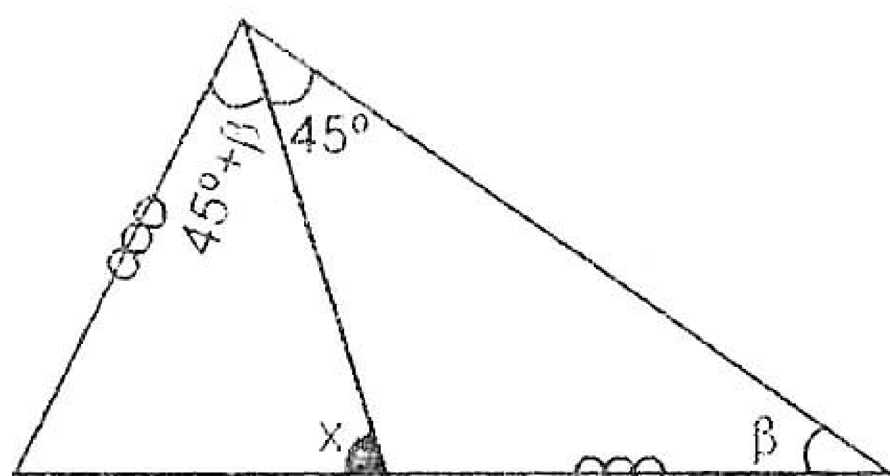
A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 25°

55. En la región interior a un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se ubica el punto "P", tal que $m\measuredangle ABP = 20^\circ$, $m\measuredangle PBC = 80^\circ$ y $m\measuredangle PCA = 10^\circ$. Calcular la $m\measuredangle PAC$.

A) 10° B) 12° C) 18°
D) 20° E) 15°

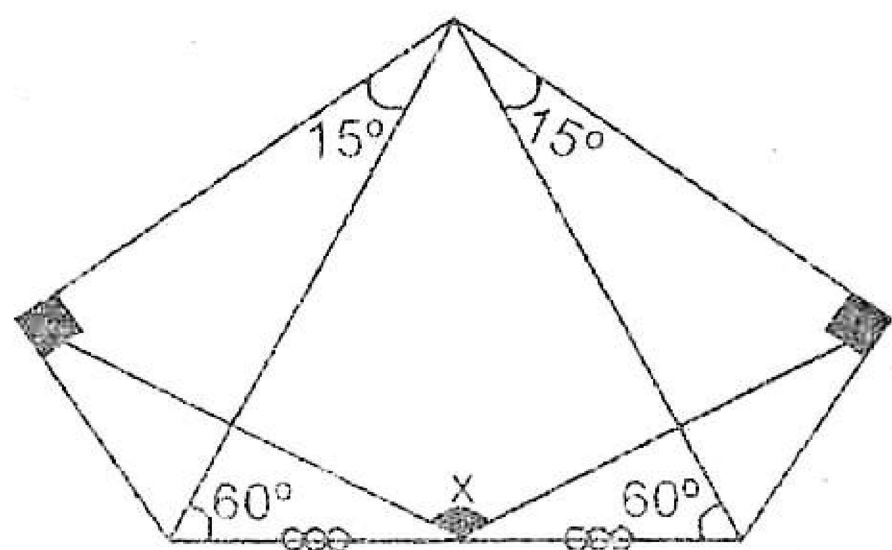
56. Calcular "x"

A) 26°30'
B) 71°30'
C) 60°
D) 75°
E) 63°30'



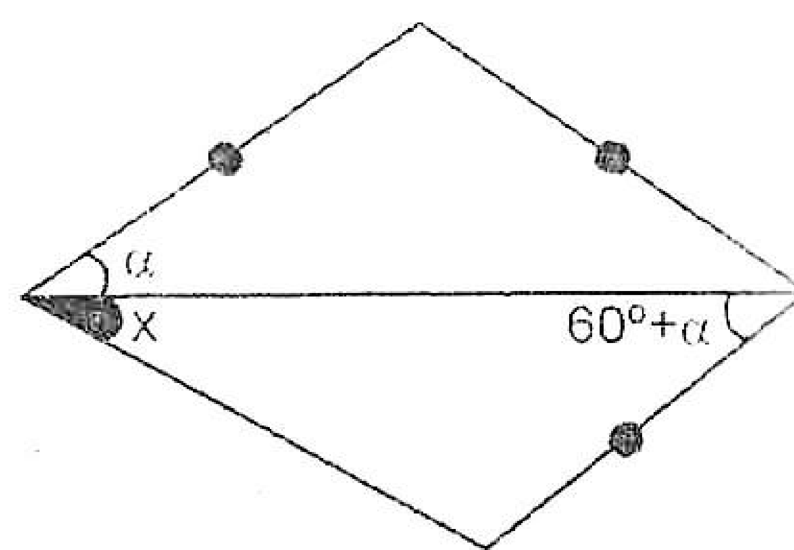
57. Calcular "x"

A) 100°
B) 120°
C) 135°
D) 150°
E) 160°



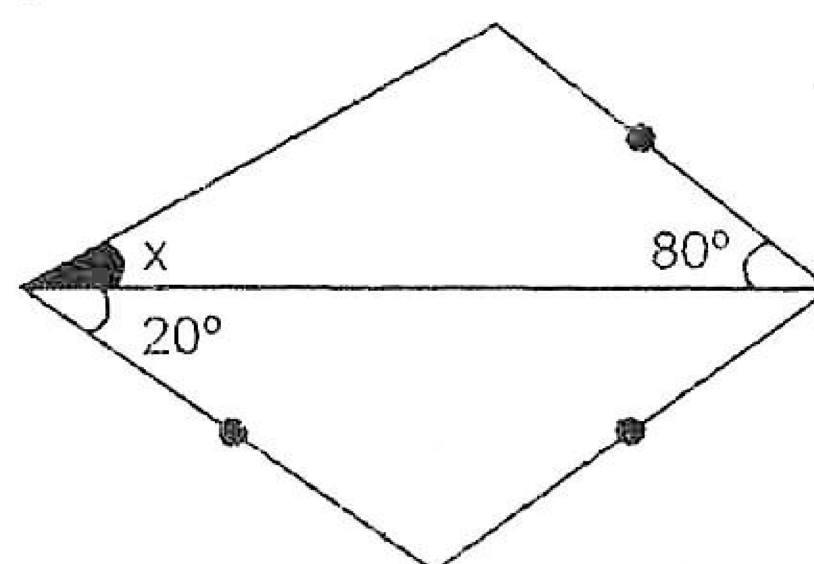
58. Calcular "α"

A) 24°
B) 30°−α
C) 60°−α
D) 30°
E) 60°



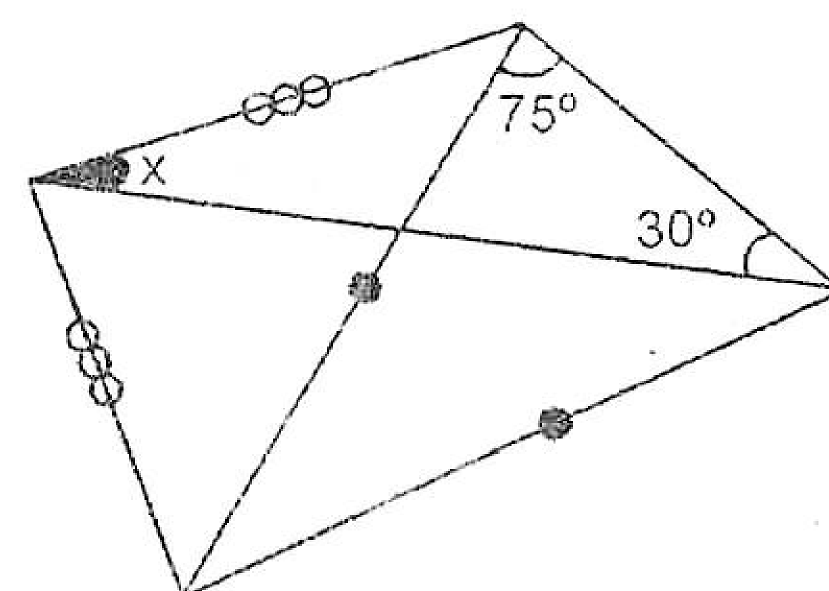
59. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 36°
D) 40°
E) 60°



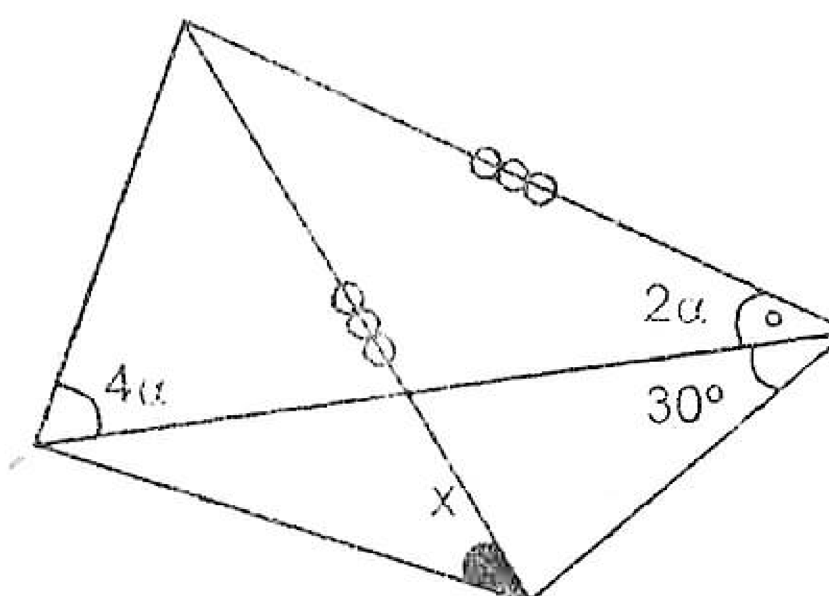
60. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 20°



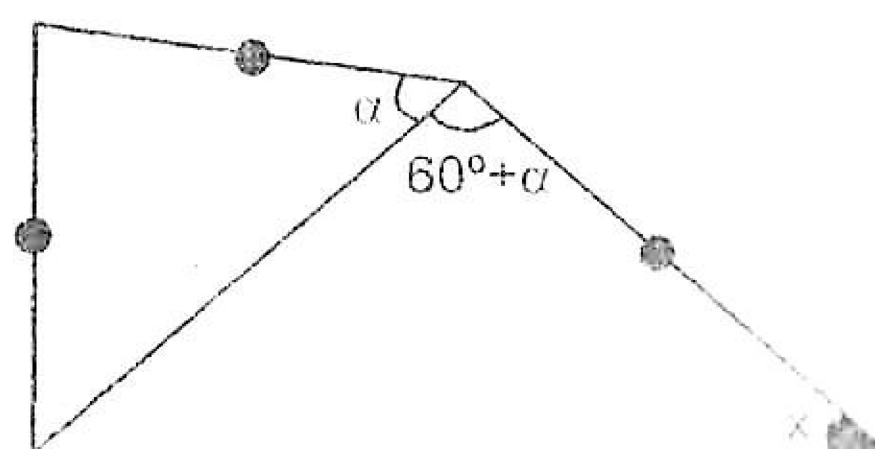
61. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 24°
D) 30°
E) 36°



62. Calcular "x"

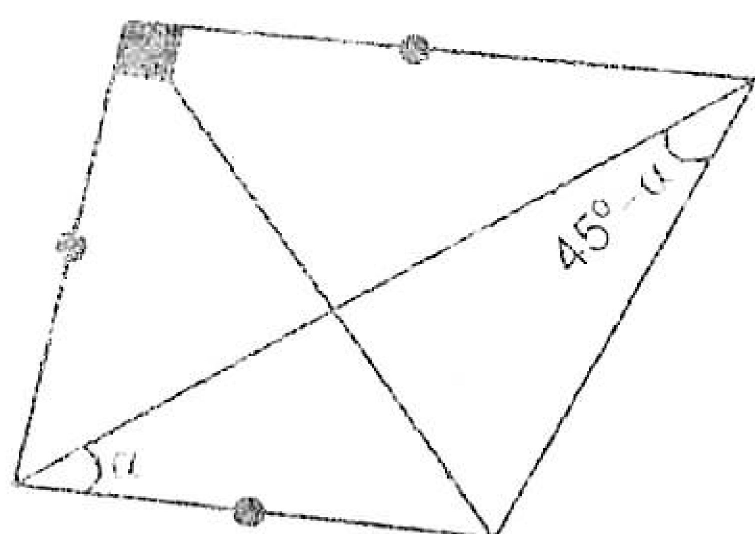
A) α
B) 60°−α
C) 30°−α
D) 120°−2α
E) 90°−α



El conocimiento es un adorno en la prosperidad y un refugio en la adversidad. (Aristóteles)

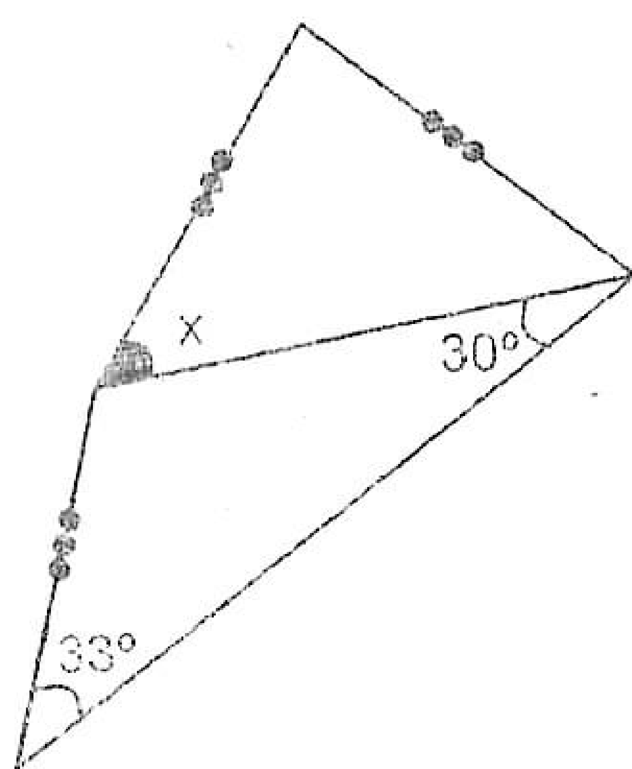
63. Calcular "α"

A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 18°
E) 30°



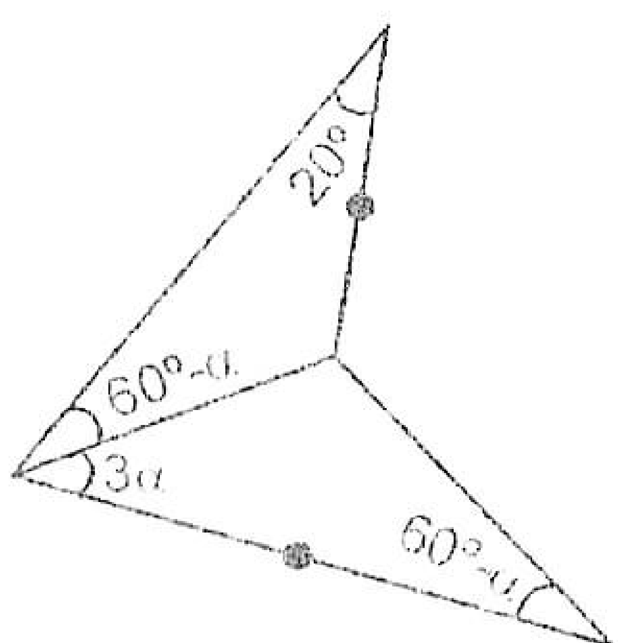
64. Calcular "α"

A) 53°
B) 57°
C) 33°
D) 43°
E) 67°



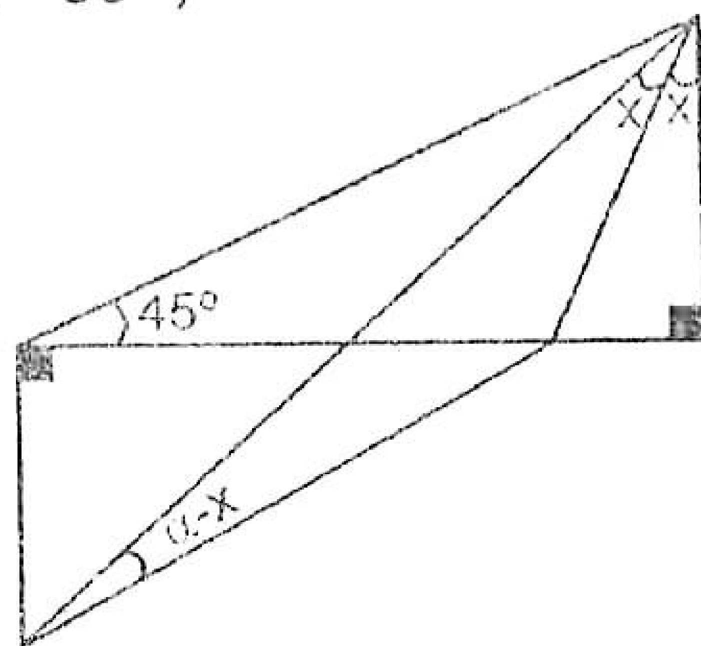
65. Calcular "α"

A) 7°30'
B) 10°
C) 15°
D) 3°
E) 30°



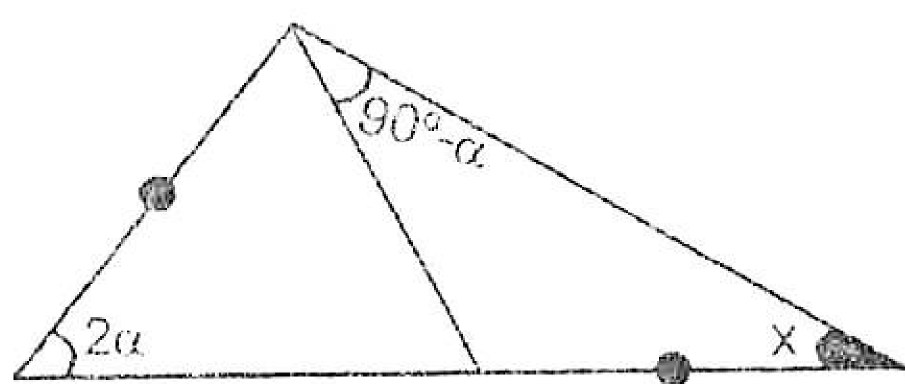
66. Calcular "x" ($2\alpha = 53°$)

A) 8°
B) 14°
C) 15°
D) 18°
E) 18°30'



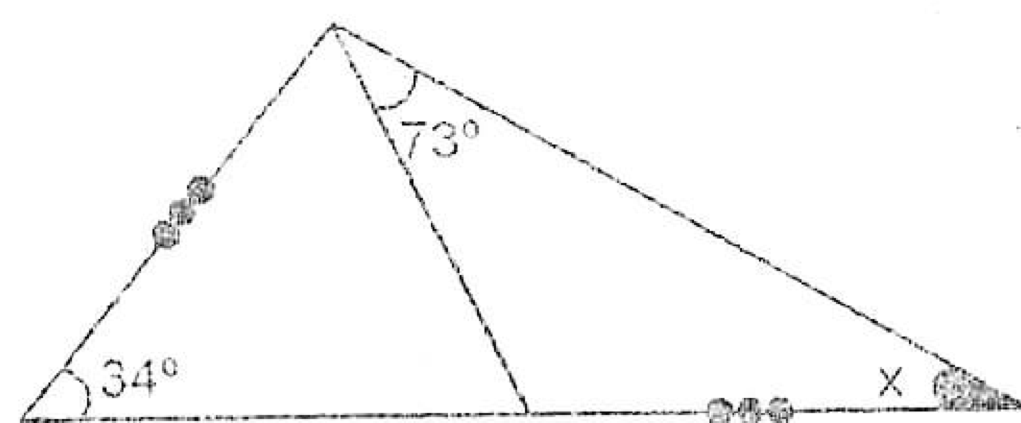
67. Calcular "x"

A) 2α
B) α
C) $90°-2\alpha$
D) $30°-\alpha$
E) $60°-\alpha$



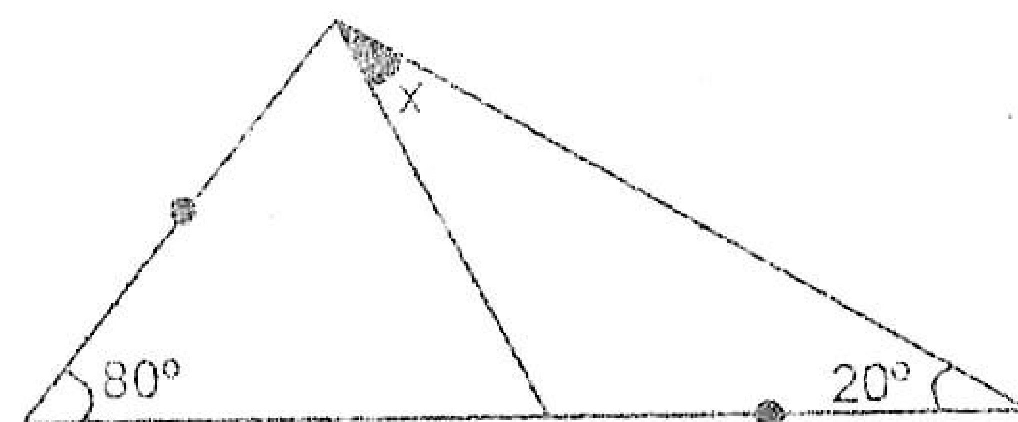
68. Calcular "x"

A) 17°
B) 34°
C) 30°
D) 33°
E) 68°



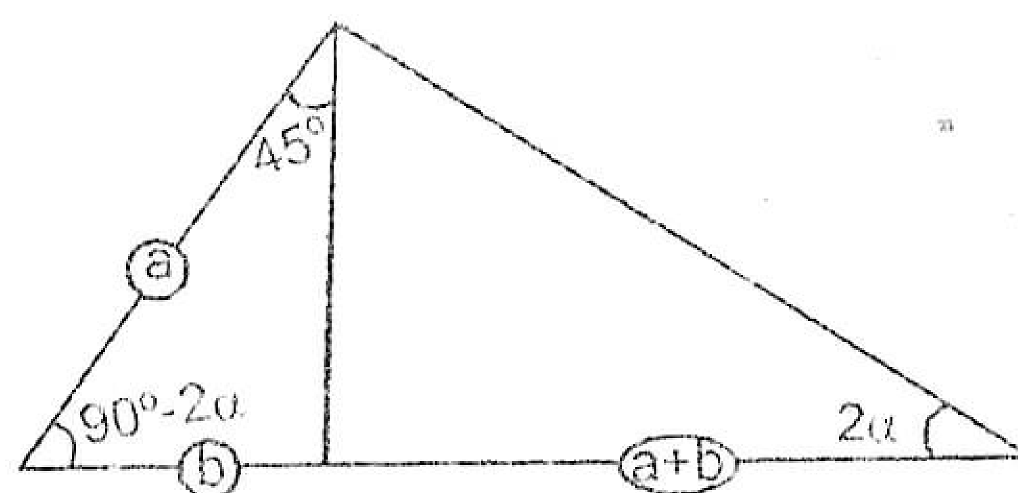
69. Calcular "x"

A) 30°
B) 25°
C) 20°
D) 15°
E) 10°



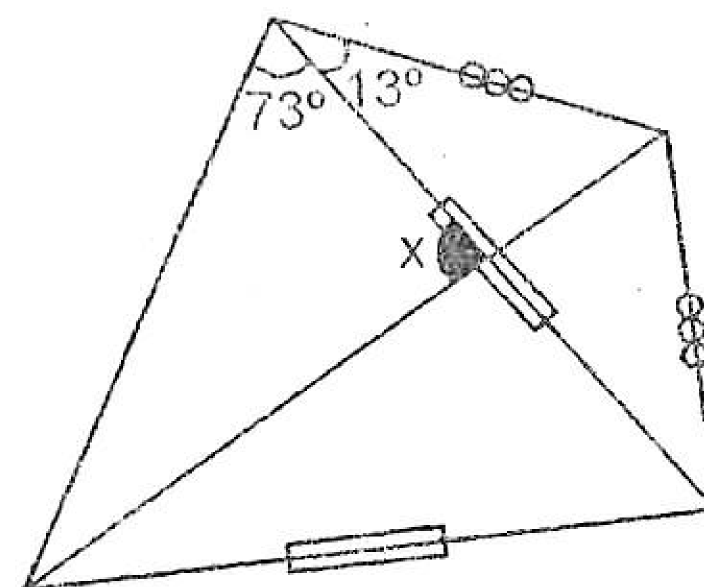
70. Calcular "α"

A) 10°
B) 12°
C) 14°
D) 15°
E) 18°



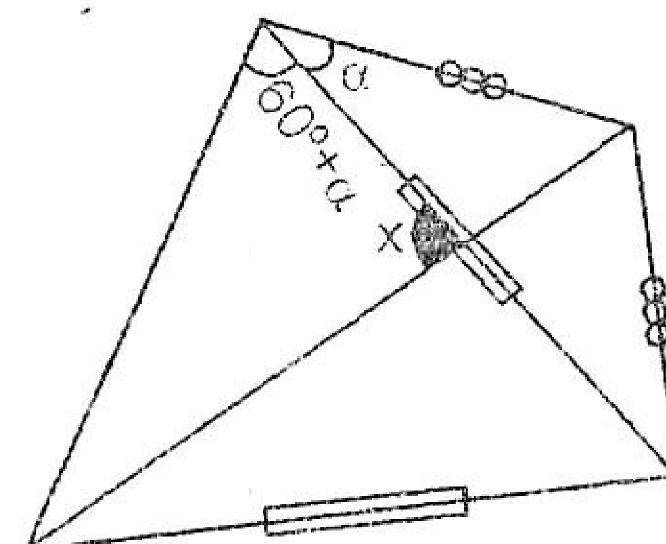
71. Calcular "x"

A) 64°
B) 60°
C) 72°
D) 84°
E) 30°



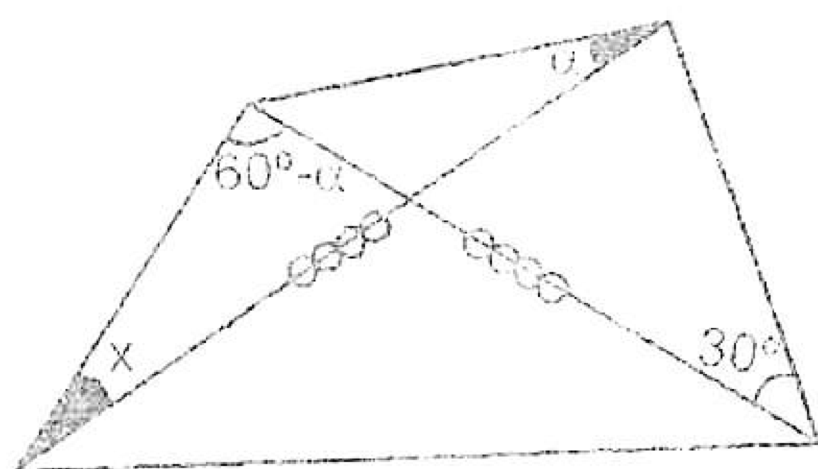
72. Calcular "x"

A) $90-\alpha$
B) $90-2\alpha$
C) 30°
D) 2α
E) $45-2\alpha$



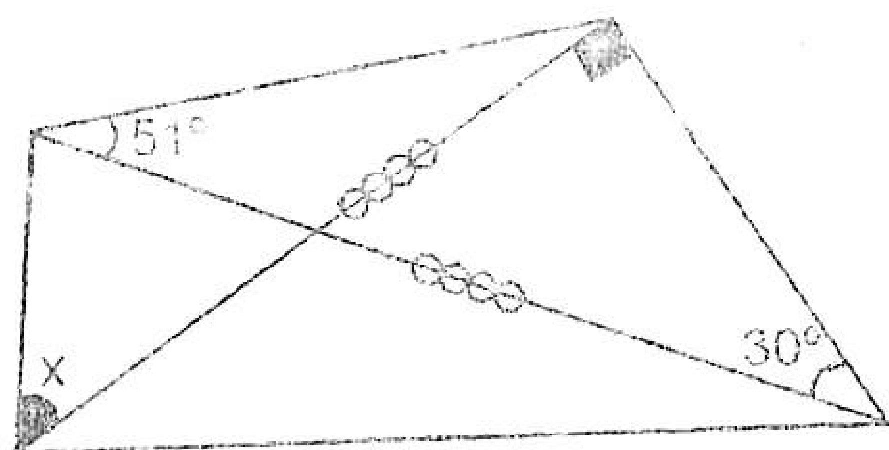
73. Calcular "x"

A) α
B) $30^\circ-\alpha$
C) $60^\circ-2\alpha$
D) 2α
E) 15°



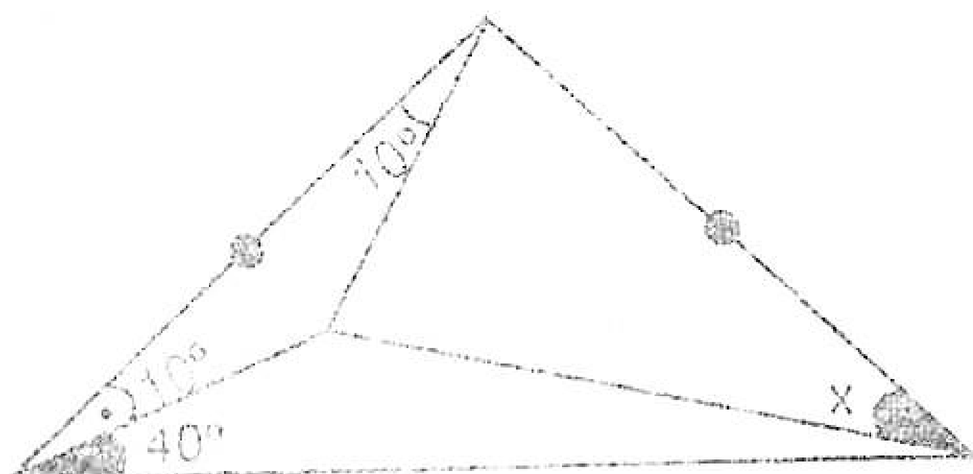
74. Calcular "x"

A) 10°
B) 15°
C) 9°
D) 35°
E) 12°



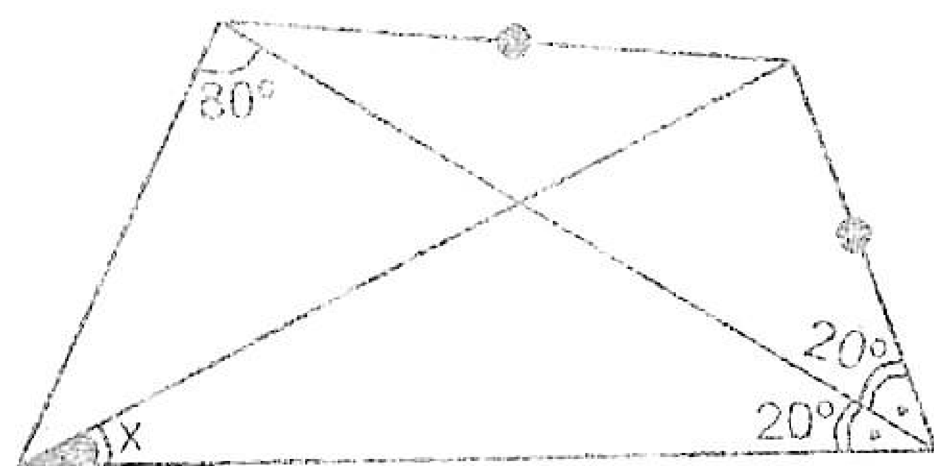
75. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 36°
D) 40°
E) 30°



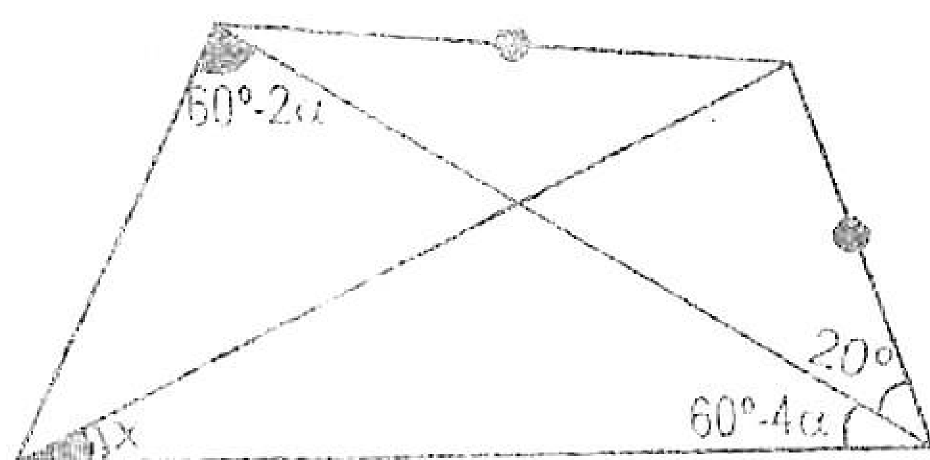
76. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 36°
D) 40°
E) 30°



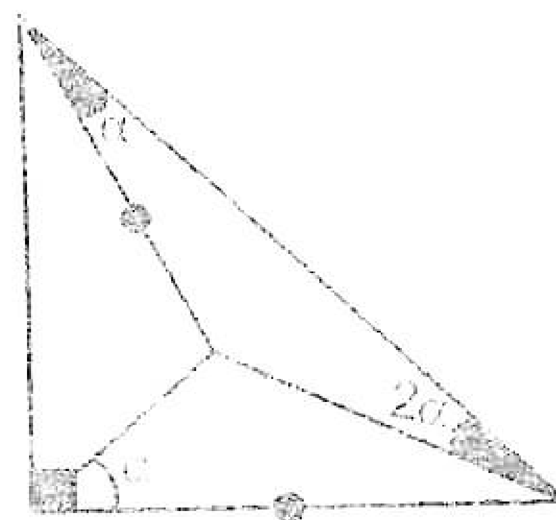
77. Calcular "x"

A) α
B) 2α
C) $60^\circ-\alpha$
D) $30^\circ+\alpha$
E) 30°



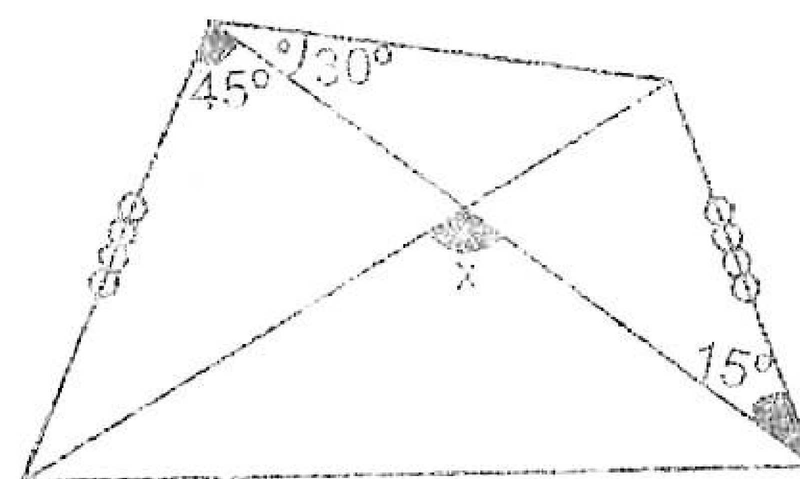
78. Calcular "α"

A) 10°
B) 15°
C) 20°30'
D) 18°30'
E) 18°



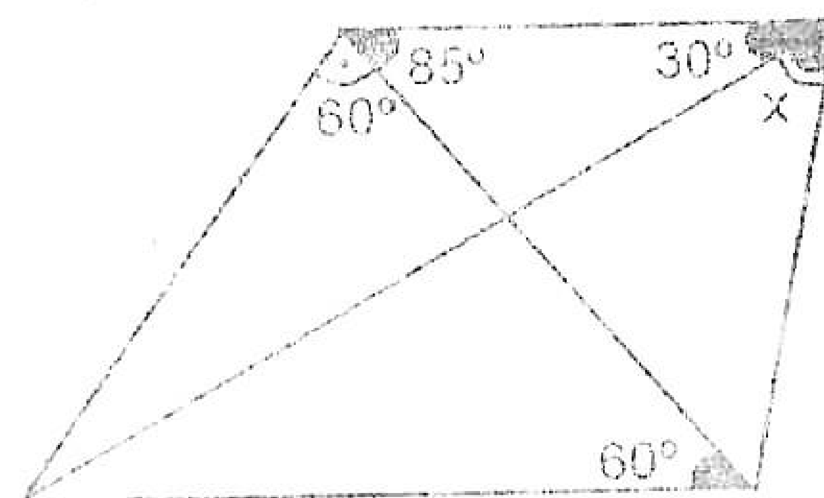
79. Calcular "x"

A) 60°
B) 90°
C) 45°
D) 37°
E) 75°



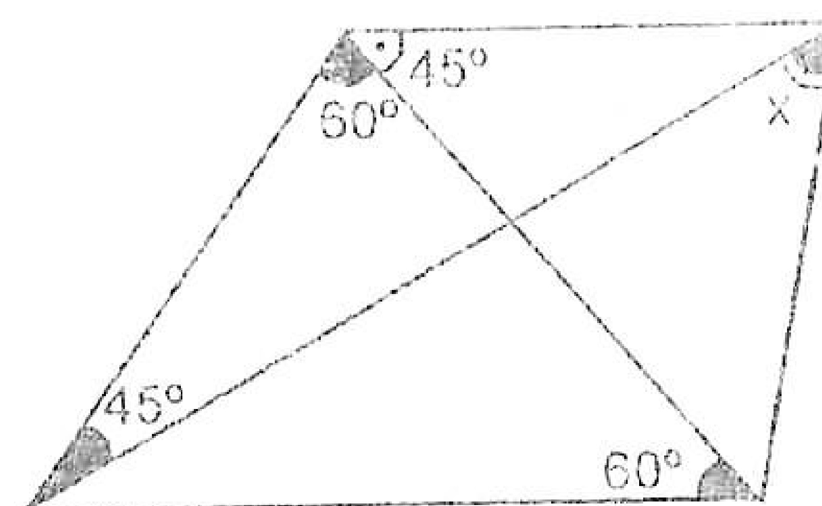
80. Calcular "x"

A) 30°
B) 55°
C) 60°
D) 65°
E) 50°



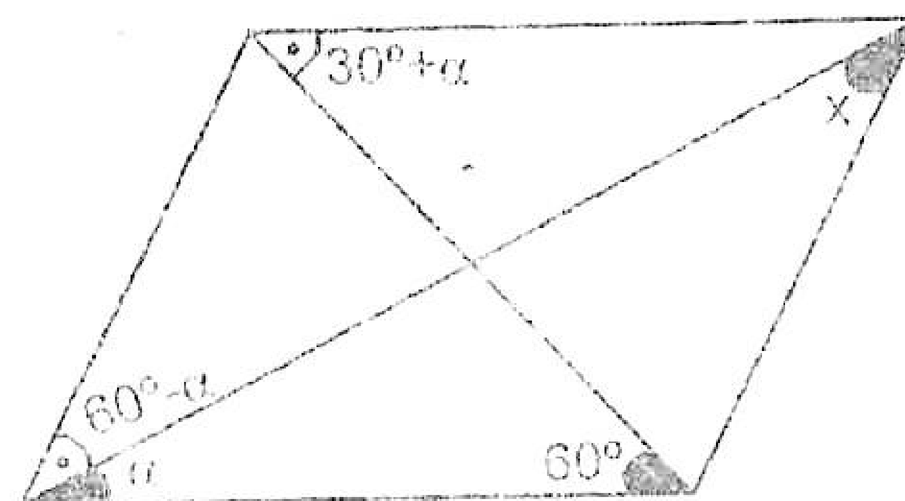
81. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 30°



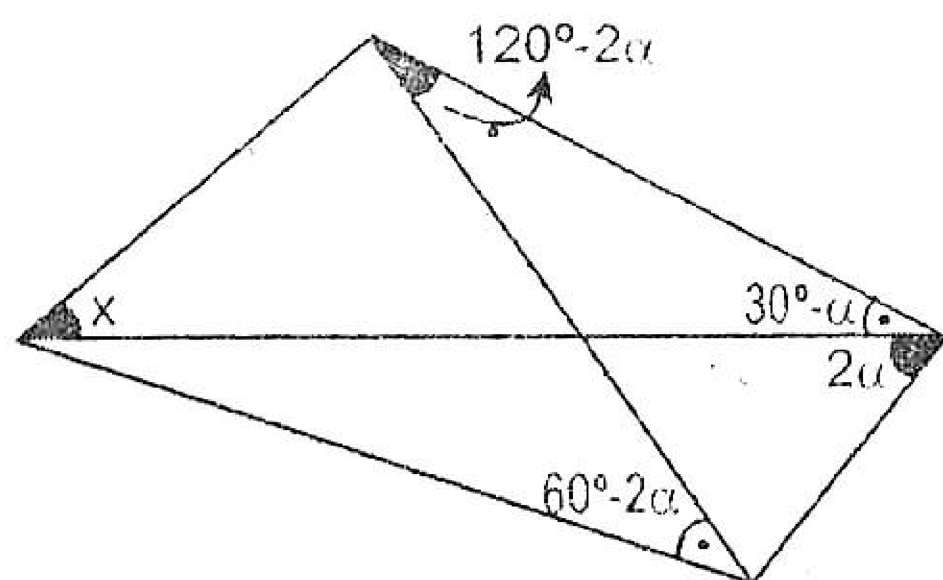
82. Calcular "x"

A) α
B) $30^\circ-\alpha$
C) $15^\circ+\alpha$
D) $30^\circ+\alpha$
E) 2α



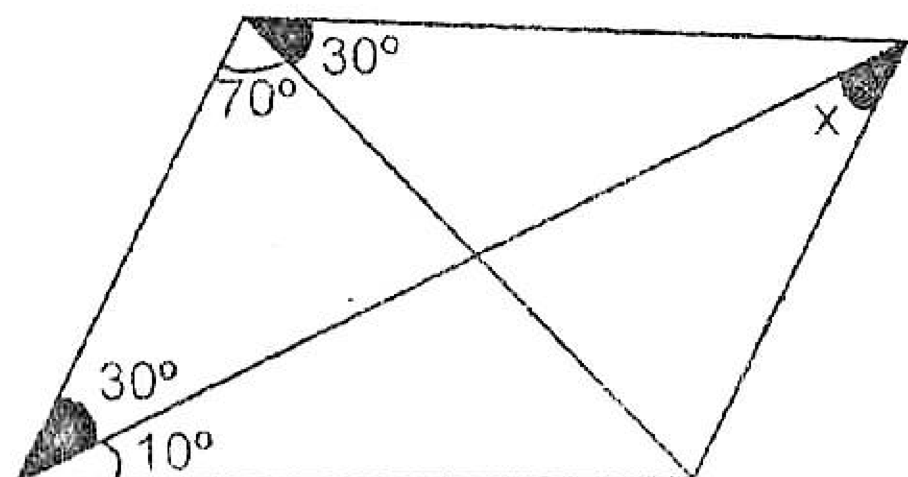
83. Calcular "x"

A) $60° - \alpha$
B) 15
C) $30° + \alpha$
D) $30° - \alpha$
E) 30



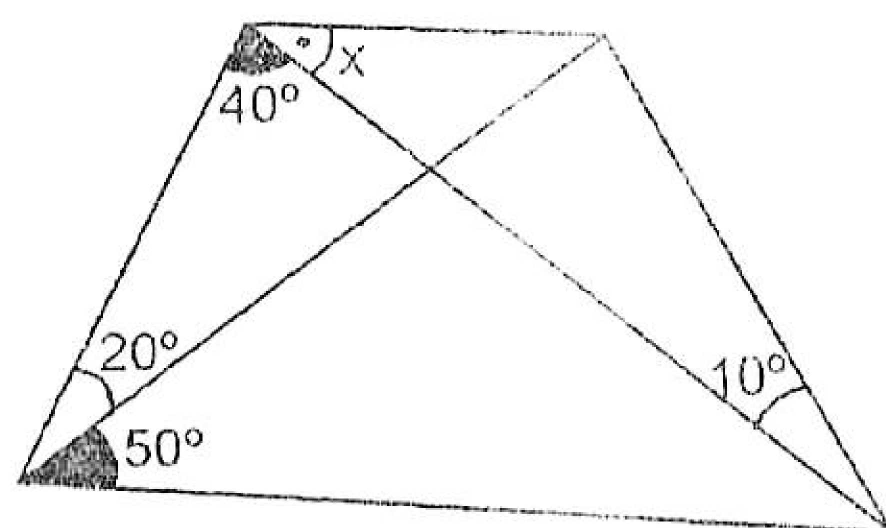
84. Calcular "x"

A) 30°
B) 20°
C) 10°
D) 18°
E) 32°



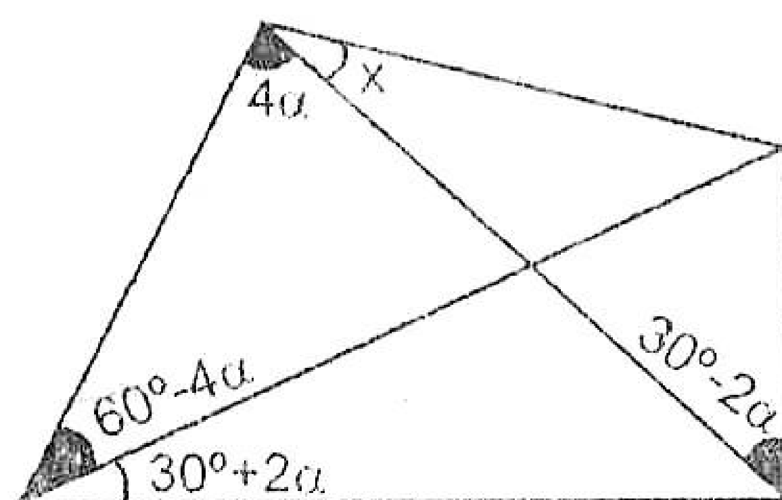
85. Calcular "x"

A) 20°
B) 30°
C) 36°
D) 40°
E) 10°



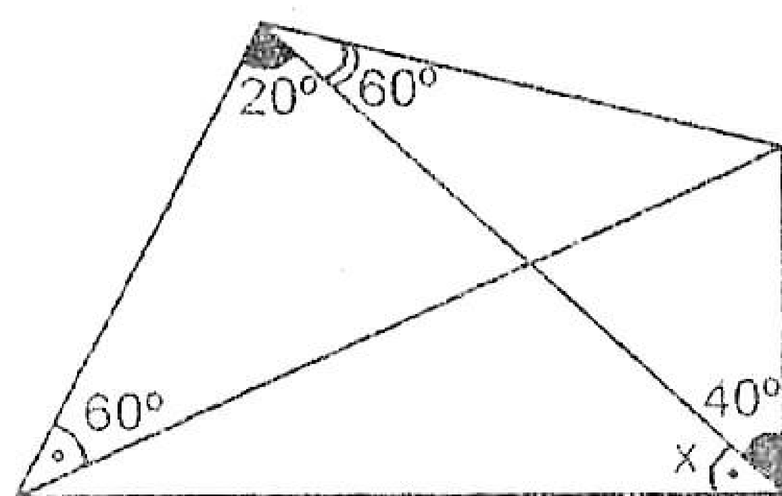
86. Calcular "x"

A) α
B) 2α
C) $30° - \alpha$
D) $60° - \alpha$
E) $30° - 2\alpha$



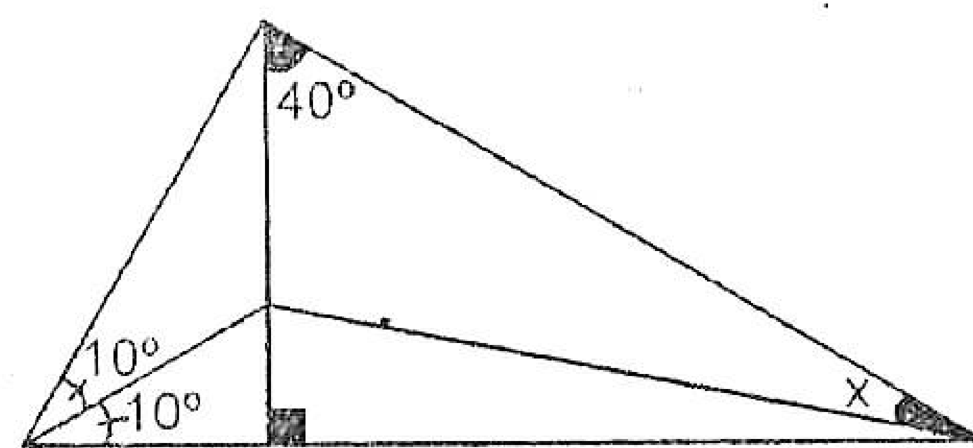
87. Calcular "x"

A) 18°
B) 20°
C) 30°
D) 35°
E) 40°



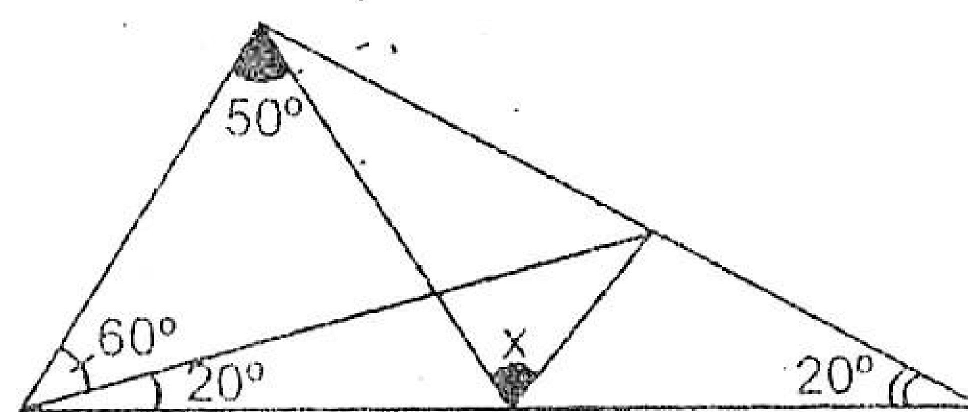
88. Calcular "x"

A) 10°
B) 18°
C) 20°
D) 24°
E) 30°



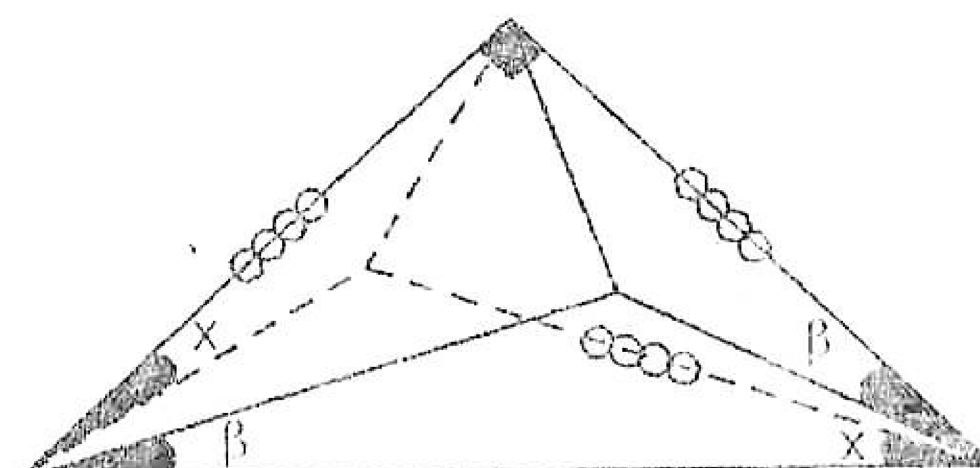
89. Calcular "x"

A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 80°



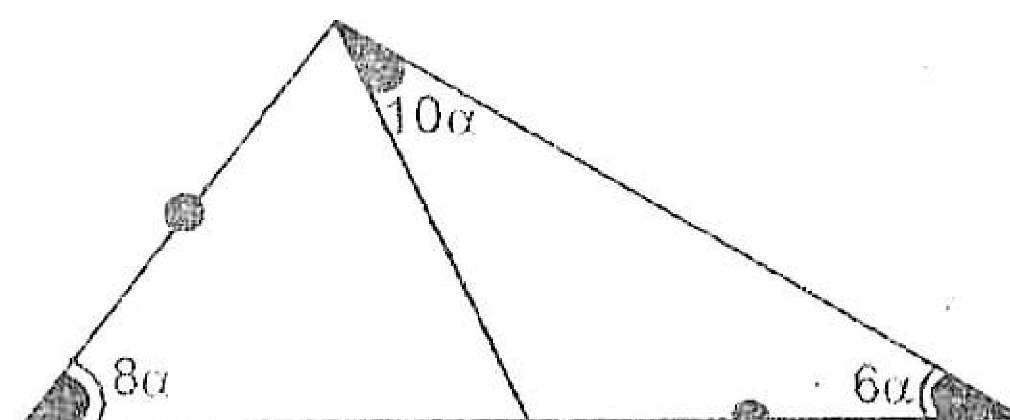
90. Calcular "x"

A) 30°
B) 18°
C) 15°
D) 18°30'
E) 22°30'



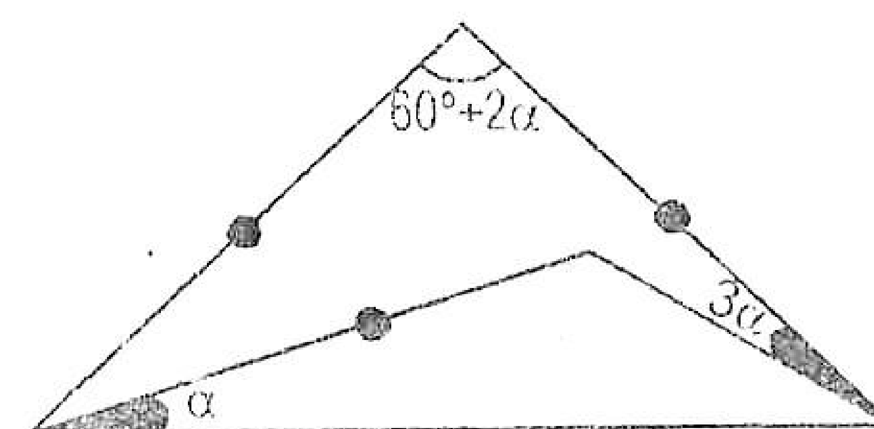
91. Calcular "α"

A) 3°
B) 4°
C) 5°
D) 6°
E) 7°



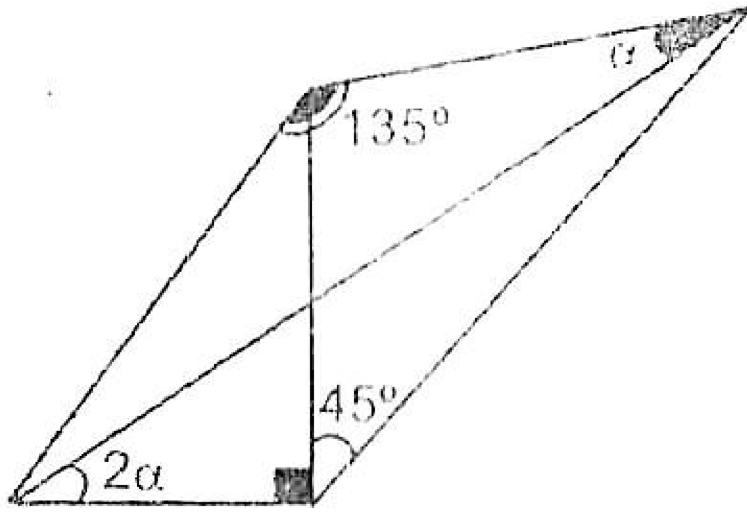
92. Calcular "α"

A) 6°
B) 6°30'
C) 7°
D) 7°30'
E) 8°



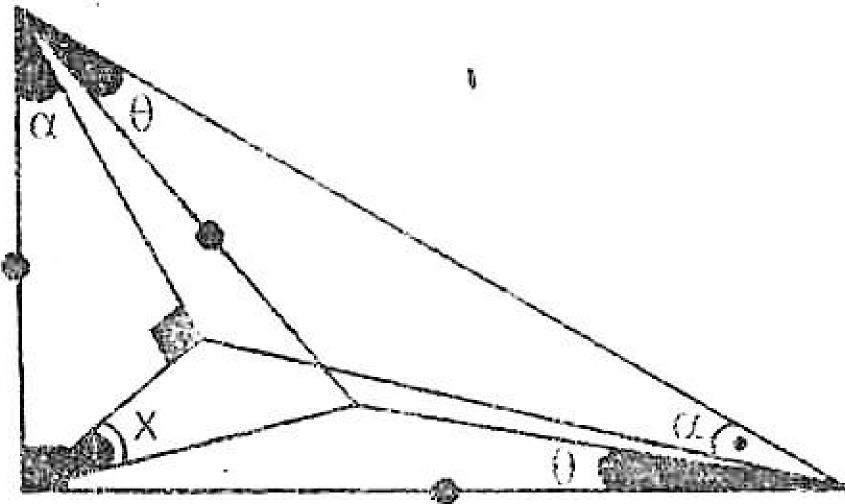
93. Calcular "α"

A) 12°
B) 18°30'
C) 15°
D) 20°
E) 22°30'



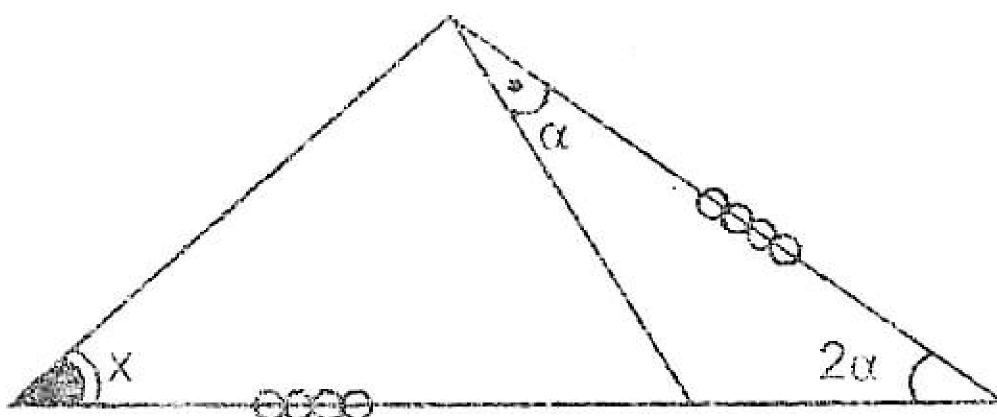
94. Calcular "x"

A) 10°
B) 11°30'
C) 12°
D) 15°
E) 23°



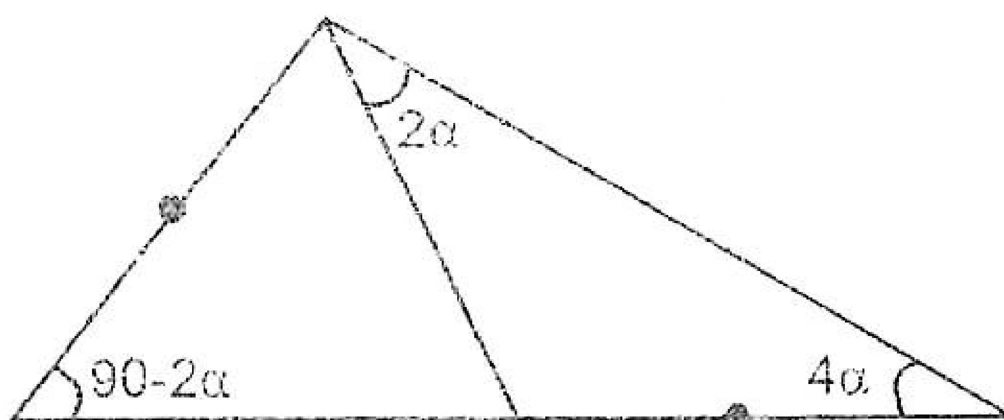
95. Calcular "x"

A) 15°
B) 30°
C) 45°
D) 53°
E) 60°



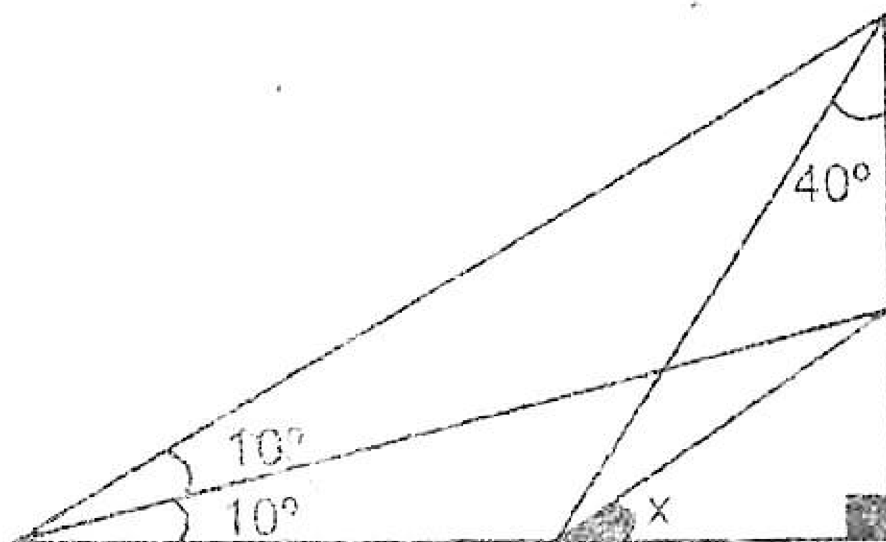
96. Calcular "α"

A) 5°
B) 6°
C) 8°
D) 10°
E) 12°



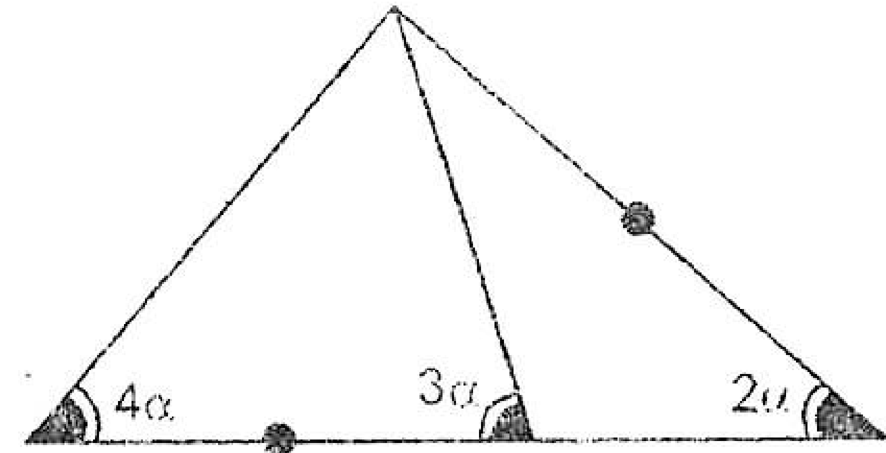
97. Calcular "x"

A) 18°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 40°



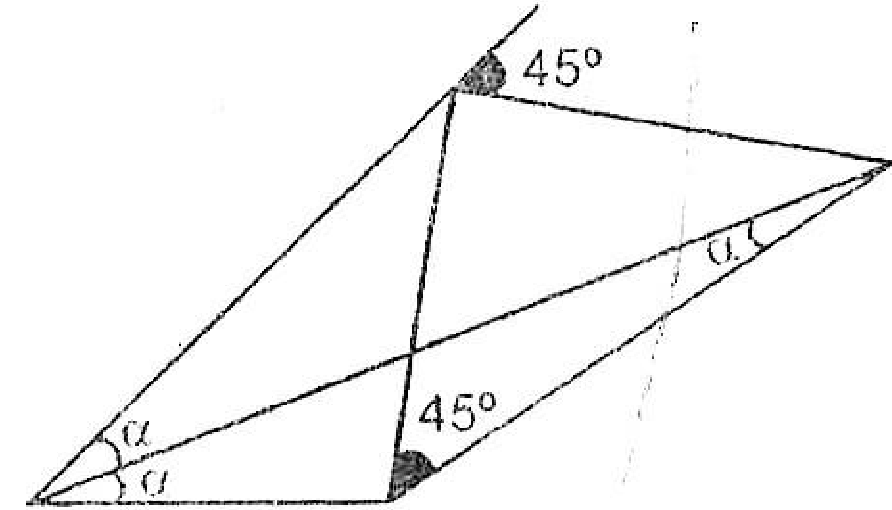
98. Calcular "α"

A) 5°
B) 8°
C) 9°
D) 10°
E) 12°



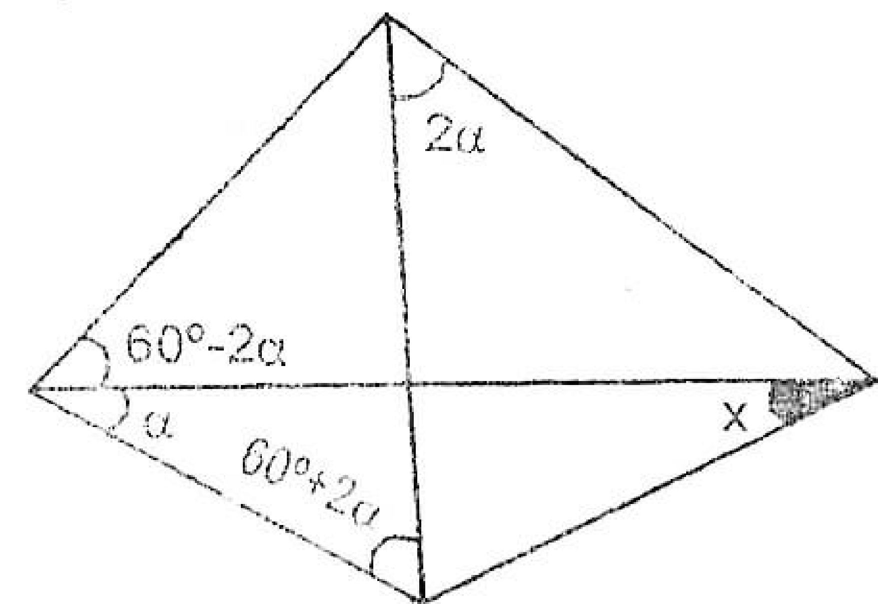
99. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 15°
E) 18°



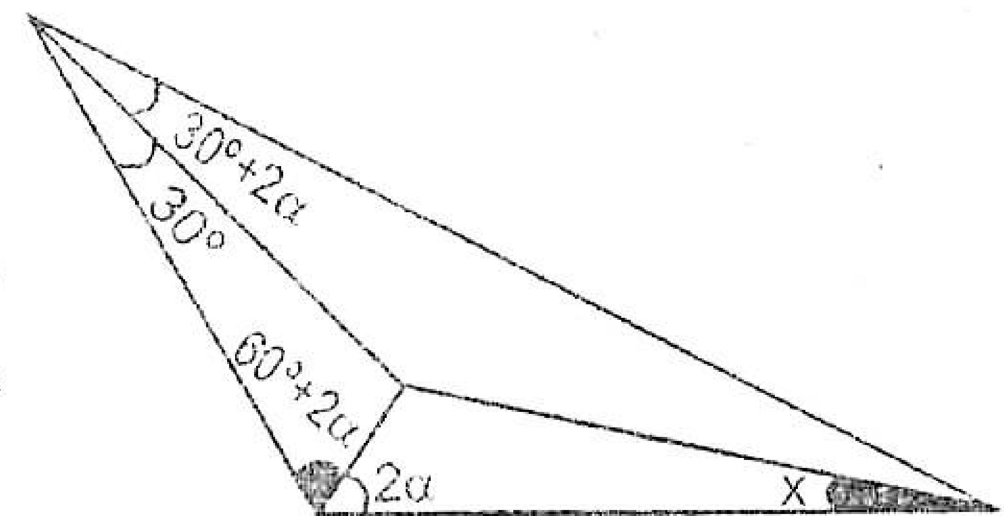
100. Calcular "α"

A) 15°
B) 18°
C) 24°
D) 30°
E) 45°



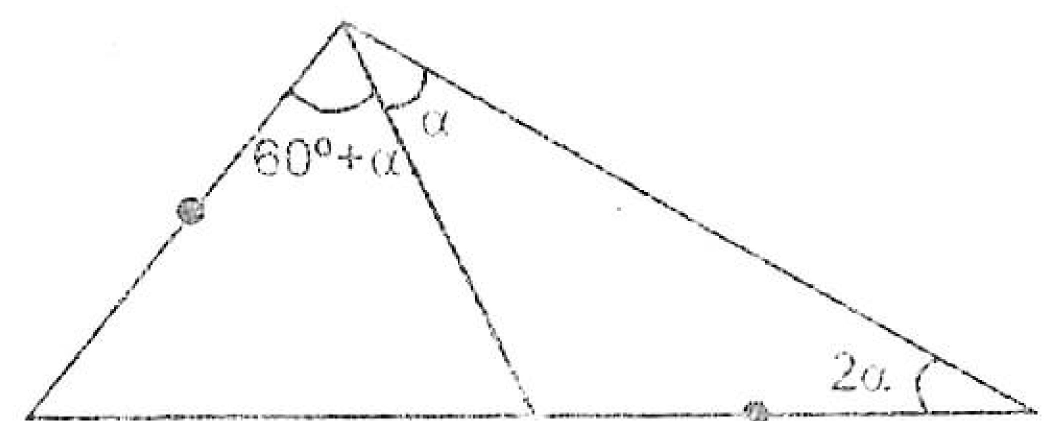
101. Calcular "α"

A) α
B) 2α
C) 30°–α
D) 60°–α
E) 10°



102. Calcular "α"

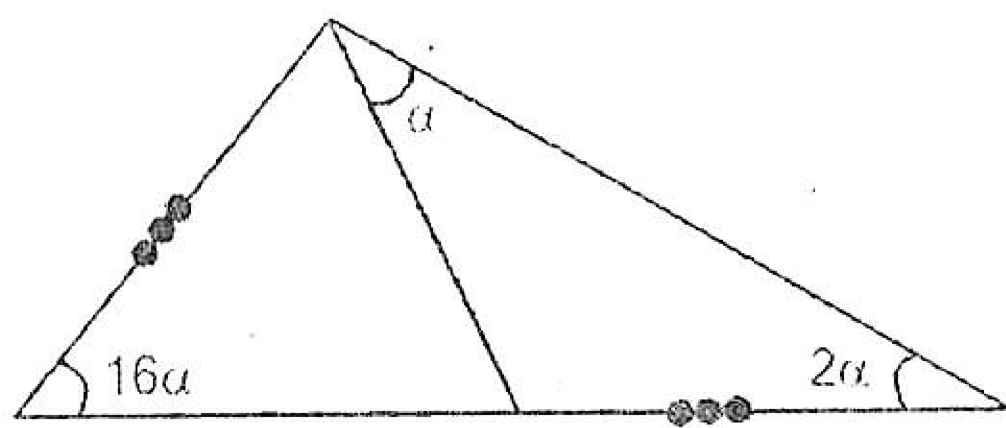
A) 10°
B) 8°
C) 5°
D) 15°
E) 20°



127

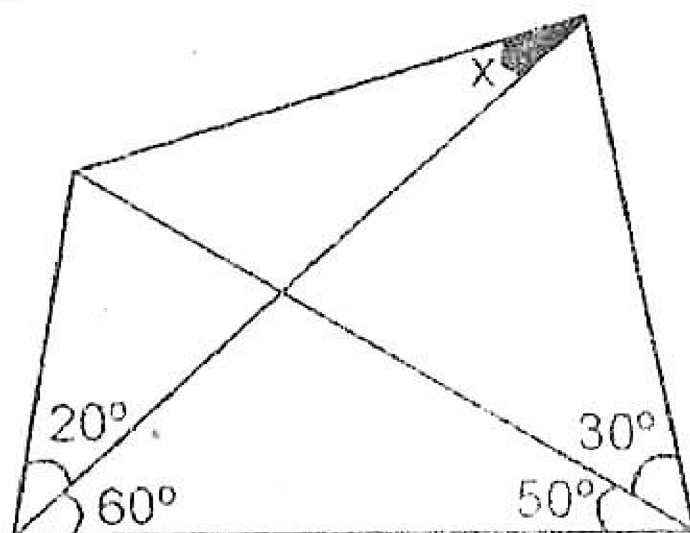
103. Calcular "α"

A) 3°
B) 4°
C) 5°
D) 6°
E) 9°



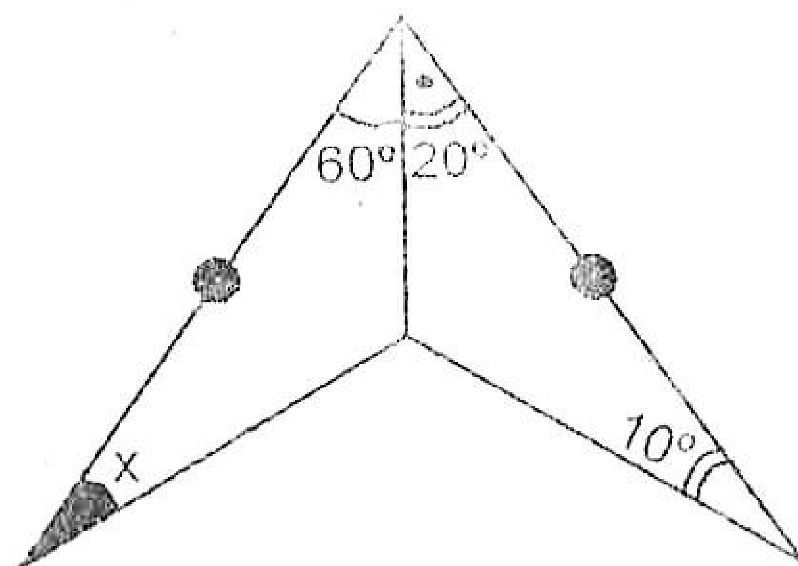
104. Calcular "x"

A) 36°
B) 30°
C) 45°
D) 24°
E) 60°



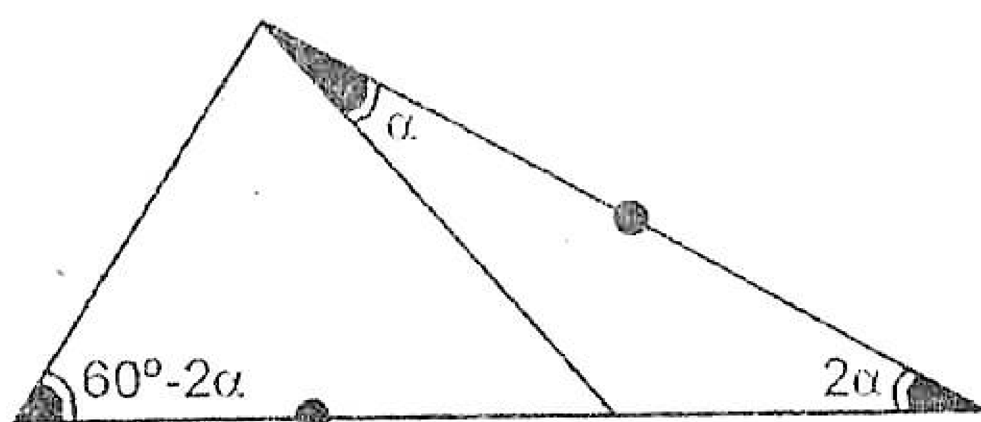
105. Calcular "x"

A) 10°
B) 12°
C) 14°
D) 18°
E) 20°



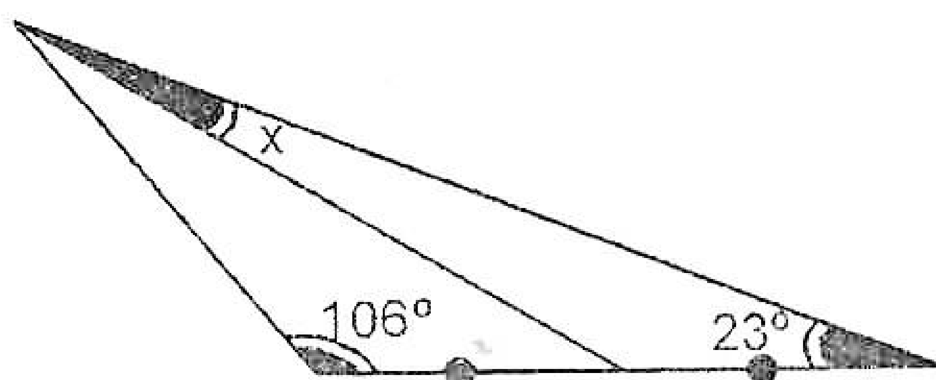
106. Calcular "α"

A) 5°
B) 9°
C) 10°
D) 12°
E) 15°



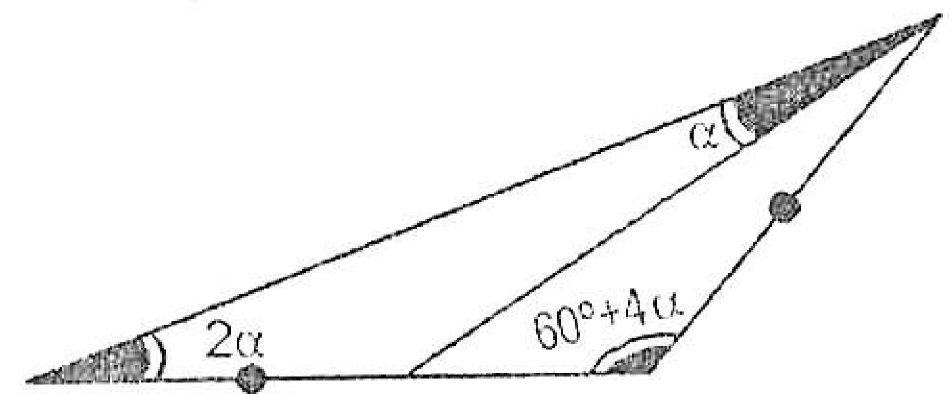
107. Calcular "x"

A) 10°
B) 14°
C) 16°
D) 20°
E) 37°



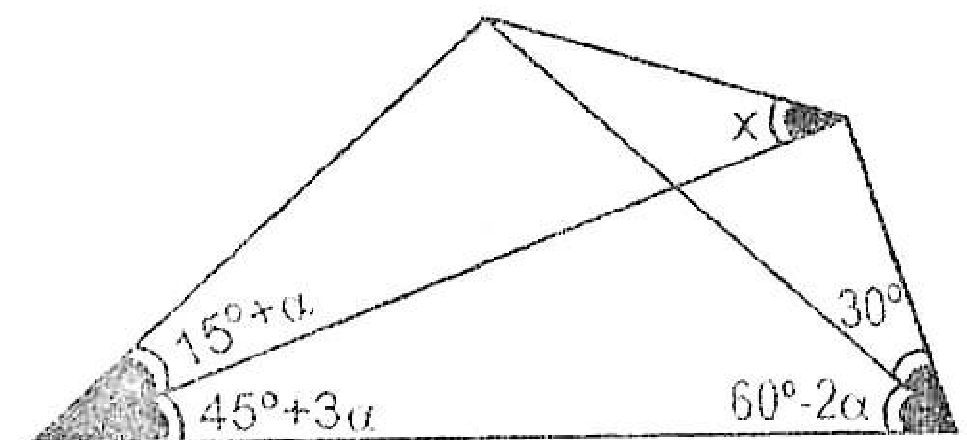
108. Calcular "α"

A) 9°
B) 10°
C) 12°
D) 14°
E) 15°



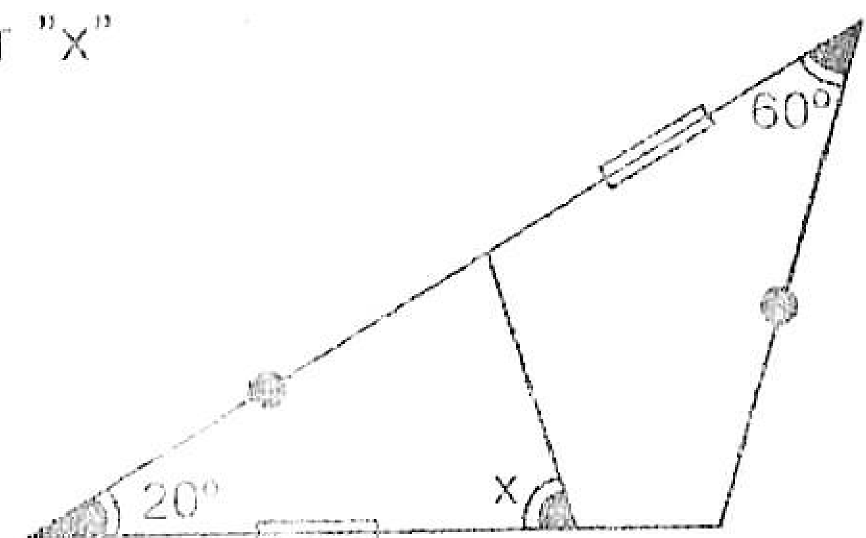
109. Calcular "x"

A) 15°
B) 18°
C) 23°
D) 30°
E) 39°



110. Calcular "x"

A) 20°
B) 24°
C) 30°
D) 36°
E) 40°



MUJER

Eres la razón de la hermosura
Axioma de mujer y dulzura
creada por la ley divina
la diosa que me fascina.

Eres la obra perfecta
del más sabio geómetra
quien con finos trazos
ingenió; la más bella silueta.

Eres un teorema de amor, alucinante
que lo difícil no es demostrarte,
sino conquistarte,
donde la solución requiere; belleza y arte.

Sólo un genio puede conocerte
y plasmar con su compás ardiente
en una esfera transparente
tus curvas en el futuro y en el presente.

Venero al Dios del universo
con este humilde verso
que con sus manos de aurora
moldeó a tan maravillosa criatura.

MBarcena

Humor Matemático

1. Distintos puntos de vista :

*** A la pregunta: ¿2 + 2 = ...?**

entonces responden:

El ingeniero : 3,9968743

El físico: 4,000,0000004 ± 0,000 000 000 6

El matemático: esperen, sólo unos minutos más, ya he probado que la solución existe y es única, ahora la estoy acotando...

El filósofo: ¿qué quiere decir 2+2?

El lógicó: Defina mejor 2+2 y le responderé.

*** A la pregunta:**

2. **¿Cómo se calcula el volumen de una vaca?**

El Ingeniero: Metemos la vaca dentro de una gran cuba de agua y la diferencia de volumen es la de la vaca.

El matemático: Parametrizamos, la superficie de la vaca y se calcula el volumen mediante una integral triple.

El físico: Supongamos que la vaca es esférica ......

3. **Para los que saben química:**

¿Por qué los osos blancos se disuelven en agua?

- porque son polares

¿Qué hace un electrón cuando cae al suelo?

- Plank

Chistes Matemáticos

1. **Estaba Jesús predicando en el monte Sinaí, cuando comento a sus discípulos:**

   $$y = ax^2 + bx + c$$

   ¿y eso es? Dijo uno de los discípulos.

   A lo que Jesús respondió : ¡una parábola!

2. **¿Qué es un niño complejo?**

   Un niño con la madre real y el padre imaginario

3. **¿Qué es un oso polar?**

   Un oso rectangular, después de un cambio de coordenadas.

4. **¿Qué le dice la curva a la tangente?**

   ¡No me toques!

5. **¿Te gusta los polinomios?**

   Pero, sólo hasta cierto grado

6. **¿Por qué se suicidó el libro de matemática?**

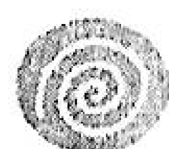
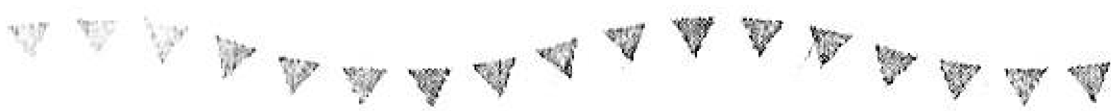
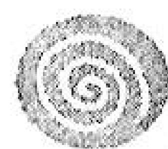
   Porque tenía demasiados problemas.

7. **Un estadístico** podría meter su cabeza en un horno y sus pies en hielo, y decir que en promedio se encuentra bien.

8. Va e^x **por la calle y se le cruza un integrador**, el cual, todo prepotente, le dice: "¡a que te integro!" y e^x le contesta: "Y a mí que".

9. **Un médico, un abogado y un matemático** están hablando de si tener una esposa o novia. Empieza el abogado : "obviamente, lo mejor es tener una novia; porque divorciarte de tu mujer puede ser muy difícil, en cambio, en cambio cortar con una novia es fácil". El doctor dice:¡No estoy de acuerdo, esta claro que el tener una mujer te evita el estrés y mejora tu salud". A lo que el matemático señala: "lo mejor es tener a los dos; así consigues que la esposa crea que estas con la otra, la otra crea que estas con la esposa, y mientras tanto tu puedes trabajar tranquilo en la matemática.

CLAVES DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS									
Nº		Nº		Nº		Nº		Nº	
1	C	23	C	45	B	67	A	89	E
2	C	24	D	46	D	68	B	90	A
3	D	25	B	47	A	69	E	91	C
4	B	26	C	48	D	70	D	92	D
5	B	27	A	49	C	71	A	93	B
6	C	28	C	50	B	72	B	94	B
7	D	29	E	51	C	73	A	95	C
8	A	30	A	52	C	74	C	96	A
9	B	31	C	53	D	75	C	97	C
10	C	32	E	54	B	76	E	98	D
11	C	33	A	55	D	77	E	99	D
12	A	34	A	56	B	78	C	100	D
13	C	35	D	57	D	79	E	101	B
14	C	36	B	58	B	80	B	102	A
15	D	37	C	59	B	81	A	103	C
16	D	38	B	60	C	82	A	104	B
17	C	39	C	61	D	83	E	105	E
18	C	40	A	62	E	84	A	106	C
19	B	41	A	63	C	85	A	107	B
20	C	42	C	64	B	86	B	108	B
21	A	43	D	65	C	87	C	109	D
22	C	44	C	66	B	88	C	110	A

REFLEXIÓN

Toda está en el estado mental;
Porque muchas carreras se han perdido
Antes de haberse corrido;
Y muchos cobardes han fracasado;
Antes de haber su trabajo empezado.
Piensa en grande y tus hechos crecerán.
Piensa en pequeño, y quedarás atrás;
Piensa que puedes y podrás;
Todo está en el estado mental.

